Questão 1: (3.0 pontos)

(a) (1.0 ponto) Seja a função $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, com $x \in \mathbb{R}$, $|x| \neq 1$. Encontre a série de potências que representa $f(x)$ em uma vizinhança de $x = 0$ (se desejar, use o lembrete ao final do enunciado da questão)

Solução:
Tomando $a = -x$ e $q = x^2$ e sendo $|x^2| < 1$ obtemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-x)(x^2)^n = \frac{-x}{1-x^2} = \frac{x}{x^2-1} = f(x).$$

Portanto, obtivemos que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -x^{2n+1}$ se $|x^2| < 1$. Notemos que a série encontrada é uma série de potências em torno de $x = 0$, como desejado.
Obs: Muitos alunos fizeram um manuseio algébrico e obtiveram que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{-(n+1)}$. No entanto, esta não é uma série de potências (tem expoente negativo) e converge para $f(x)$ somente quando $|x| > 1$ (este tipo de série se chama série de Laurent).

(b) (0.8 ponto) Seja a Equação Diferencial Ordinária (EDO) dada por

$$(x^2-1)y''(x) + 6xy'(x) + 4y(x) = 0 \tag{1a}$$

Verifique que $x = 0$ é ponto ordinário desta EDO e encontre a relação de recorrência da solução em série de potências da EDO (1a) em torno de $x_0 = 0$.

Solução:
Usando a notação do livro texto temos que $P(x) = x^2 - 1$, $Q(x) = 6x$ e $R(x) = 4$. Então, $p(x) = \dfrac{6x}{x^2-1}$ e $q(x) = \dfrac{4}{x^2-1}$. Ambas são funções analíticas (razão entre dois polinômios) para todo $x \neq \pm 1$, já que nestes pontos o denominador se anula. Portanto, $x = 0$ é ponto ordinário pois $p(x)$ e $q(x)$ são analíticas em uma vizinhança de $x = 0$.
Vamos supor que a solução pode ser escrita na forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Então $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ e $y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$. Subtituindo na EDO temos

$$(x^2-1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + 6x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0,$$

isto é,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + 6\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Alterando um índice de somatório obtemos que

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + 6\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Agrupando os termos segue que

$$-2c_2 - 6c_3x + 6c_1x + 4c_0 + 4c_1x + \sum_{n=2}^{\infty}\left(n(n-1)c_n - (n+2)(n+1)c_{n+2} + 6nc_n + 4c_n\right)x^n = 0. \tag{1b}$$

Dos termos dentro do somatório concluímos que,

$$n(n-1)c_n - (n+2)(n+1)c_{n+2} + 6nc_n + 4c_n = 0, \quad n = 2,3,4,5,\cdots$$

e, daí, $(n^2+5n+4)c_n = (n+2)(n+1)c_{n+2}$, isto é, $(n+4)(n+1)c_n = (n+2)(n+1)c_{n+2}$. Como, neste caso, $n+1 \neq 0$ podemos concluir que

$$c_{n+2} = \frac{n+4}{n+2}c_n, \quad n = 2,3,4,5,\cdots,$$

que é a relação de recorrência da EDO.

(c) (0.7 ponto) Encontre a solução geral da EDO (1a) em torno de $x_0 = 0$ explicitando as duas soluções linearmente independentes. Calcular, no mínimo, os quatro primeiros termos não nulos de cada solução linearmente independente.

Solução:
Analisando os termos de ordem 0 e 1 da equação (1b) obtemos que $-2c_2 + 4c_0 = 0$ e $-6c_3 + 10c_1 = 0$, isto é, $c+2 = 2c_0$ e $c_3 = 5/3c_1$. Pela relação de recorrência vemos que cada termo par(ímpar) depende somente do termo par(ímpar) anterior, permitindo caracterizar de forma simples as duas soluções linearmente independentes (uma corresponde aos termos pares e a outra aos termos ímpares).
Analisando os termos pares temos que $a_4 = 3/2a_2 = 3a_0$, $a_6 = 8/6a_4 = 4a_0$.. Prosseguindo desta forma vemos que $a_{2n} = (n+1)a_0$ (isto pode ser verificado observando que, se assim fosse, teríamos, $a_{2n+2} = (2n+4)/(2n+2)a_{2n} = (n+2)/(n+1).(n+1)a_0 = (n+2)a_0$, comprovando a nossa hipótese).
Analogamente, analisando os termos ímpares obtemos que $a_5 = 7/5a_3 = 7/3a_1$, $a_7 = 9/7a_5 = 9/3a_1$. Prosseguindo desta forma vemos que $a_{2n-1} = \dfrac{2n+1}{3}a_1$.
Então, a solução geral da EDO é dada por

$$y(x) = a_0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{2n}\right) + a_1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3}x^{2n-1}\right).$$

As soluções linearmente independentes pedidas são dadas por $y_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{2n}$ e $y_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3}x^{2n-1}$.
Obs: Uma forma de obter diretamente a solução $y_0(x)$ é considerar $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$. A solução $y_1(x)$ pode ser obtida considerando $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$. Vários alunos tentaram isto, mas fizeram somente o primeiro (ou o segundo) caso e esqueceram de usar os coeficientes obtidos para expressar a solução $y_0(x)$ (ou $y_1(x)$).

(d) (0.5 ponto) Determine o raio de convergência mínimo da solução desta EDO em Séries de Potências em torno do ponto $x_0 = 0$.

Solução:
Pode-se obter o raio de convergência a partir da relação de recorrência (1b) pois

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+2}x^{n+2}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{n+2}x^2 = x^2.$$

Usando o teste da razão temos que $R^2 = 1$ e, portanto, o raio de convergência R é igual a 1.

Se o aluno não conseguisse obter a relação de recorrência, poderia usar o teorema sobre o raio de convergência da solução de EDOs por séries de potência que afirma que o raio de convergência da solução é maior ou igual ao menor raio de convergência das funções analíticas $p(x)$ e $q(x)$. Neste caso, pelo item (a) temos que o raio de convergência de $p(x)$ é 1 e, de forma análoga, o raio de convergência de $q(x)$ também é 1 (notemos que, neste caso, o raio de convergência mínimo coincide com o raio de convergência obtido).

Obs: Vários alunos argumentaram que o raio de convergência é 1 pois a distância entre o ponto $x = 1$ em que o denominador de $p(x)$ se anula e o ponto $x = 0$ é igual a 1 e, portanto, o raio de convergência 1. Este raciocínio não é, de forma alguma, correto. Se o primeiro termo da EDO fosse $(1 + x^2)y''$ ao invés de $(1 - x^2)y''$, o raio de convergência obtido seria o mesmo, apesar do termo $1 + x^2$ não se anular para $x \in \mathbb{R}$.

Lembrete: Sabemos que a soma dos termos de uma série geométrica da forma $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, com $|q| < 1$, é dada por $\dfrac{a}{1-q}$.

Questão 2: (2.0 pontos)

Faça o que se pede

(a) (1.0 ponto) Determine a $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(4s^2 - s + 3)e^{-4s}}{(s^2+1)(s-1)}\right\}$

Solução:

Usando frações parciais obtemos que $\dfrac{4s^2 - s + 3}{(s^2+1)(s-1)} = \dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{3}{s-1} = \mathcal{L}\left\{\cos t + 3e^t\right\}$.

Então $\dfrac{(4s^2 - s + 3)e^{-4s}}{(s^2+1)(s-1)} = e^{-4s}\mathcal{L}\left\{\cos t + 3e^t\right\} = \mathcal{L}\left\{u_4(t)\left(\cos(t-4) + 3e^{t-4}\right)\right\}$

Então $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(4s^2 - s + 3)e^{-4s}}{(s^2+1)(s-1)}\right\} = u_4(t)\left(\cos(t-4) + 3e^{t-4}\right)$.

(b) (1.0 ponto) Determine $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$, sendo

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leqslant t < 2, \\ 8 - 3t, & \text{se } 2 \leqslant t < 3 \\ 0, & \text{se } t \geqslant 3. \end{cases}$$

Solução:

Vemos que $f(t) = (1 - u_2(t))t + (u_2(t) - u_3(t))(8 - 3t) = t + u_2(t)(8 - 4t) + u_3(t)(3t - 8)$.

Aplicando Transformadas de Laplace temos que

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{s^2} + e^{-2s}\mathcal{L}\{8 - 4(t+2)\} + e^{-3s}\mathcal{L}\{3(t+3) - 8\} = \frac{1}{s^2} - e^{-2s}\frac{4}{s^2} + e^{-3s}\left(\frac{3}{s^2} + \frac{1}{s}\right).$$

Questão 3: (2.0 pontos)

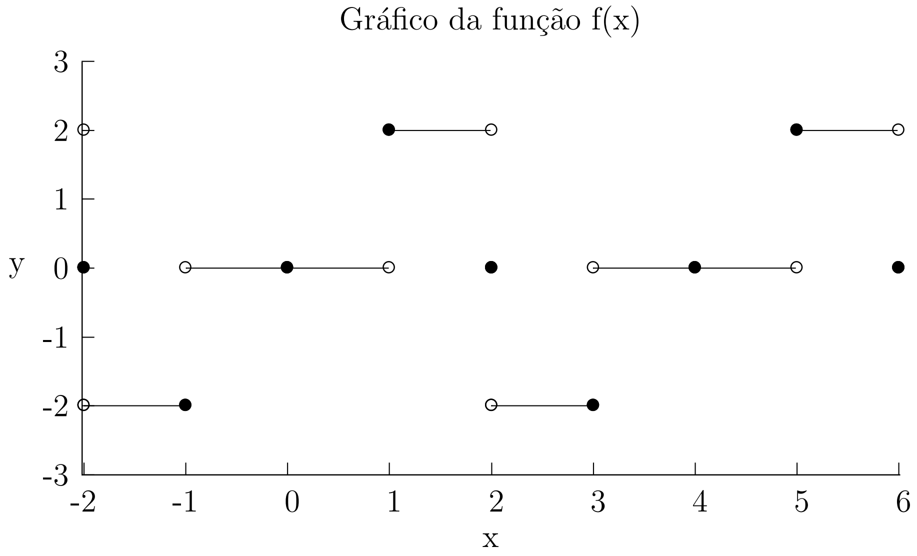
Seja f a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ 2, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

(a) (0.5 ponto) Seja $\tilde{f}(x)$ a extensão de $f(x)$ que é ímpar, periódica, com período 4, definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Faça o gráfico de $\tilde{f}(x)$ no intervalo $[-2, 6]$

Solução:

Como a extensão é ímpar de período 4 temos, usando a notação do livro-texto, que $2l = 4$. Das propriedades de funções ímpares temos que $f(nl) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Com isso, o gráfico da extensão $\tilde{f}(x)$ é como a seguir.



(b) (1.0 ponto) Encontre a Série de Fourier da função $\tilde{f}(x)$.

Solução:

Como a função $\tilde{f}(x)$ é ímpar temos, das propriedades da Série de Fourier, que $a_n = 0$, para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Basta calcular b_n. Então,

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{0}^{l} \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{1}^{2} 2 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} dx =$$

$$\frac{4}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right) = \frac{4}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right).$$

Então, a Série de Fourier da função $\tilde{f}(x)$ é dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}$.

(c) (0.5 ponto) Calcule a soma da Série de Fourier do item anterior no ponto $x = -1$.

Solução:

Pelo gráfico do item (a) vemos que a função $\tilde{f}(x)$ é uma função seccionalmente contínua (três pontos de descontinuidade ao longo de um período e, neste pontos, os limites laterais existem) com derivada seccionalmente contínua (apenas três pontos em que $f'(x)$ não está definida ao longo de um período e nestes pontos os limites laterais existem). Temos, então, as condições necessárias para aplicar o Teorema de Fourier e obter que a soma da Série de Fourier em $x = -1$ é igual a $0.5(\tilde{f}(-1^-) + \tilde{f}(-1^+)) = -0.5(\tilde{f}(1^-) + \tilde{f}(1^+)) = -1$.

Questão 4: (3.0 pontos)
Considere o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF):

$$\begin{cases} u_t(x,t) - 4u_{xx}(x,t) + u(x,t) = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \qquad (4a) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geqslant 0, \qquad (4b) \\ u(x,0) = 3\,\mathrm{sen}\,4x + 2\,\mathrm{sen}\,8x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \qquad (4c) \end{cases}$$

(a) (2.0 pontos) Utilizando o Método da Separação de Variáveis, obtenha as equações diferenciais ordinárias nas variáveis x e t e as resolva, detalhando todas as etapas.

Solução:
Vamos aplicar a técnica de separação de variáveis para resolver o Problema de Valor Inicial e de Fronteira. Vamos procurar, por enquanto, funções não nulas que satisfaçam a EDP e que sejam da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Então, $u_t = X(x)T'(t)$ e $u_{xx} = X''(x)T(t)$. Substituindo na EDP obtemos $XT' - 4X''T + XT = 0$. Rearranjando os termos e dividindo por $4X(x)T(t)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T' + T(t)}{4T(t)} = -\lambda.$$

Notemos que o primeiro termo da equação acima só depende de x, o segundo termo só depende de t e como desejamos que sejam iguais para todo $t > 0$ e $x \in (0,\pi)$ concluimos que independem de x e t e, portanto, são uma constante. Denominamos esta constante como sendo $-\lambda$, sendo o sinal negativo apenas para seguir a notação do livro texto, pois o sinal escolhido não importa no resultado final.
Obtivemos, assim, as equações diferenciais ordinárias nas variáveis x e t que são dadas por

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$
$$T'(t) + (4\lambda + 1)T(t) = 0$$

Para resolver estas equações, deveremos encontrar as condições de fronteira adequadas de forma que $X(x)$ satisfaça um problema de autovalor, resolvê-lo e, finalmente, usar os autovalores obtidos na EDO envolvendo a variável t para obter as soluções $T(t)$. Abaixo iremos seguir este procedimento.
Inicialmente, vamos obter as condições de fronteira da EDO em x usando as condições de fronteira do problema proposto. Temos que $0 = u(0,t) = X(0)T(t)$, para todo $t > 0$. Como não estamos interessados em solução trivial concluimos que $X(0) = 0$. Analogamente, obtemos que $X(\pi) = 0$. Usando estas condições nas EDOs obtidas anteriormente podemos obter o seguinte problema de autovalores:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$$

O procedimento a seguir visa obter os autovalores e autofunções do problema de autovalor acima.

A equação característica é dada por $r^2 + \lambda = 0$. Vamos analisar as três situações possíveis:

- Raízes da equação característica reais e distintas. Isto ocorrerá quando $\lambda < 0$ e as raízes serão $r_1 = \sqrt{-\lambda}$ e $r_2 = -r_1$. A solução geral é dada por $X(x) = Ce^{r_1 x} + De^{-r_1 x}$. Aplicando a restrição $X(0) = 0$ obtemos que $D = -C$. A solução se torna $X(x) = C\left(e^{r_1 x} - e^{-r_1 x}\right)$. Substituindo $X(\pi) = 0$ obtemos que $0 = X(\pi) = C(e^{r_1\pi} - e^{-r_1\pi})$. Se $C = 0$ teríamos solução trivial, que não nos interessa e, daí, obtemos que $e^{r_1\pi} = e^{-r_1\pi}$. Como a exponencial é uma função injetiva, segue que $r_1\pi = -r_1\pi$, o que não é possível pois $r_1 \neq 0$ (já que, por hipótese, $\lambda < 0$ e $r_1 = \sqrt{-\lambda}$). Concluimos que se $\lambda < 0$ não temos autovalor, já que a única solução é a trivial.

- Raízes da equação característica reais iguais. Isto ocorrerá quando $\lambda = 0$ e as raízes serão $r_1 = r_2 = 0$. A solução geral é dada por $X(x) = C + Dx$. Aplicando a restrição $X(0) = 0$ obtemos que $C = 0$ e a solução se torna $X(x) = Dx$. A restrição $X(\pi) = 0$ implica que $D = 0$ e, portanto, a única solução possível quando $\lambda = 0$ é a solução trivial. Concluímos daí que $\lambda = 0$ não é autovalor deste problema de autovalor.

- Raízes da equação característica são complexos conjugados. Isto ocorrerá quando $\lambda > 0$ e as raízes serão $r_1 = \sqrt{\lambda}\sqrt{-1}$ e $r_2 = -\sqrt{\lambda}\sqrt{-1}$. Seja $\gamma = \sqrt{\lambda} > 0$. A solução geral é dada por $X(x) = C \operatorname{sen} \gamma x + D \cos \gamma x$. Aplicando a restrição $X(0) = 0$ obtemos que $D = 0$. Portanto, a solução se torna $X(x) = C \operatorname{sen} \gamma x$. Usando que $X(\pi) = 0$ obtemos que $0 = X(\pi) = C \operatorname{sen} \gamma\pi$. Isto implica que ou $C = 0$ (que não nos interessa pois fornece solução trivial) ou $\operatorname{sen} \gamma\pi = 0$. Sabemos que o seno se anula nos pontos da forma $n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$. Então, como $\gamma > 0$, concluímos que $\gamma\pi = n\pi$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Daí temos que os autovalores correspondentes a $\lambda > 0$ são da forma $\lambda_n = n^2$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e suas autofunções correspondentes serão $X_n(x) = \operatorname{sen} nx$.

Em resumo, temos que os autovalores são dados por $\lambda_n = n^2$, com $n = 1, 2, 3, \ldots$ e as autofunções respectivas são dadas por $X_n(x) = \operatorname{sen} nx$, considerando como 1 o coeficiente da autofunção.

Com estes autovalores, podemos usar a EDO em t para obter $T_n(t)$. Temos, então, que $T_n' + (4n^2 + 1)T_n(t) = 0$, com $n = 1, 2, 3, \ldots$.

A solução geral é dada por $T_n(t) = e^{-(4n^2+1)t}$.

Em resumo, obtivemos que as soluções não nulas das EDOs são dadas por $X_n(x) = \operatorname{sen} nx$ e $T_n(t) = e^{-(4n^2+1)t}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Nesta resposta consideramos como 1 o coeficiente das autofunções obtidas do problema de autovalor.

(b) (0.5 ponto) Obtenha a solução em série que satisfaz a EDP (4a) e as condições de fronteira (4b)

Solução:

Do item anterior temos que $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-(4n^2+1)t} \operatorname{sen} nx$. Finalmente, a série de funções que é candidata a solução do PVIF é da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(4n^2+1)t} \operatorname{sen} nx. \tag{4d}$$

(c) (0.5 ponto) Analisando a condiçâo inicial do PVIF (4c), obtenha a solução do problema dado.

Solução:
Resta, agora, utilizar a condição inicial para obter todos os coeficientes C_n.
Tomando $t = 0$ na solução em série vemos que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} nx. \tag{4e}$$

Para satisfazer a equação (4c), basta compará-la com (4e). Vemos, então que $C_4 = 3$ e $C_8 = 2$, com $C_n = 0$ se $n \neq 4$ e $n \neq 8$.
Com os coeficientes obtidos temos que a solução desejada é dada por

$$u(x,t) = 3e^{-65t} \operatorname{sen} 4x + 2e^{-257t} \operatorname{sen} 8x.$$