Questão 1: (3.0 pontos)

(a) (1.0 ponto) Verifique se a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$ é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

Solução:
Note que para todos n temos $1+\sqrt{n} \leq \sqrt{n}+\sqrt{n} = 2\sqrt{n}$. Então

$$\frac{1}{1+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\frac{1}{n^{1/2}}.$$

Como a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ é divergente (série p, ≤ 1), pelo critério da comparação, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ é divergente. Logo, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$ não é absolutamente convergente.
Por outro lado, como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} = 0$$

e

$$\frac{1}{1+\sqrt{n}} > \frac{1}{1+\sqrt{n+1}} \quad (\sqrt{n+1} > \sqrt{n})$$

a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$ é convergente pelo critério de Leibnitz.
Conclusão: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$ é condicionalmente convergente.

(b) (1.5 ponto) Encontre a série de Taylor da função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases},$$

em torno do ponto $x=0$, e o seu respectivo raio de convergencia.

Solução:
Sabe-se que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todos $x \in \mathbb{R}$. Portanto

$$e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

que implica

$$\frac{e^x-1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

Raio de convergência (enferio da razão):

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{x^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = 0 < 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto $R = +\infty$.

(c) (0.5 ponto) Utilizando a série do item (b) calcule $f^{(50)}(0)$ (isto é, a derivada de ordem 50 da função $f(x)$ no ponto $x = 0$).

Solução:
Série de Taylor $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ (em torno $x = 0$). Comparando com o item (b), obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n.$$

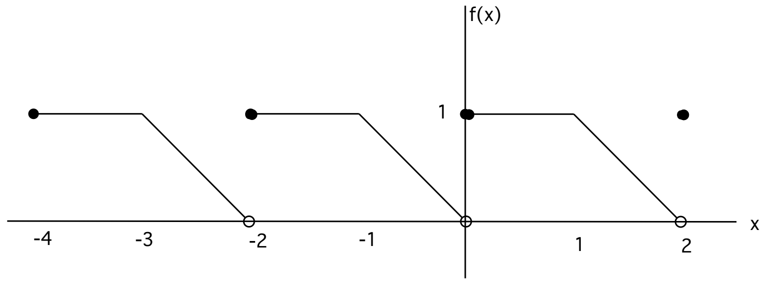
Portanto $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{(n+1)!}$ e assim $f^{(50)}(0) = \frac{50!}{51!} = \frac{1}{51}$.

Questão 2: (1.5 ponto)
Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1, \\ 2 - x & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

e suponha que f está definida fora do intervalo $0 \le x < 2$ de modo a satisfazer $f(x+2) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) (0.5 ponto) Esboce o gráfico de $f(x)$ no intervalo $[-4, 2]$.



(b) (1.0 ponto) Encontre a série de Fourier de $f(x)$.

Solução:
(a) A série é dado por

$$SF[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x/L)\big),$$

onde $L = 1$,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{3}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)\,dx = \frac{\cos(n\pi)}{(n\pi)^2} - \frac{1}{(n\pi)^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ par}, \\ -\frac{2}{(n\pi)^2} & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} f(x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx = \int_{-1}^{0} (-x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx + \int_{0}^{1} 1 \cdot \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx = \frac{1}{n\pi}$$

Questão 3: (2.5 pontos)
Utilizando a Transformada de Laplace, resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) + 2\,y'(t) + y(t) = u_3(t)\,e^{t-2}, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Solução:
Aplicando a transformada de Laplace e usando o fato que $y(0) = y'(0) = 0$ temos

$$\mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{u_3(t)\,e^{t-2}\}.$$

$$s^2\mathcal{L}\{y\} + 2s\mathcal{L}\{y\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{u_3(t)\,e^{t-2}\}.$$

Calculando $\mathcal{L}\{u_3(t)\,e^{t-2}\}$: Observando que

$$u_3(t)\,e^{t-2} = u_3(t)\,e^{t-2}\,e^{-1}\,e = u_3(t)\,e^{t-3}\,e.$$

Logo

$$\mathcal{L}\{u_3(t)\,e^{t-2}\} = \mathcal{L}\{u_3(t)\,e^{t-3}\,e\} = e\,\mathcal{L}\{u_3(t)\,e^{t-3}\} = e\,e^{-3s}\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{e^{-3s+1}}{s-1}$$

Assim concluimos que

$$(s^2+2s+1)\mathcal{L}\{y\} = \frac{e^{-3s+1}}{s-1}$$

e

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{e^{-3s+1}}{(s^2+2s+1)(s-1)} = \frac{e^{-3s+1}}{(s+1)^2(s-1)}$$

Usando frações parcias para escrever o termo $\dfrac{1}{(s+1)^2(s-1)}$:

$$\frac{1}{(s+1)^2(s-1)} = \frac{a}{(s-1)} + \frac{b}{(s+1)} + \frac{c}{(s+1)^2} = \frac{a(s+1)^2 + b(s-1)(s+1) + c(s-1)}{(s+1)^2(s-1)}.$$

Isso implica

$$a-b-c=1, \quad a+b=0, \quad 2a+c=0$$

e portanto $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{4}$ e $c = -\frac{1}{2}$. Logo

$$\mathcal{L}\{y\} = e^{-3s+1}\left(\frac{1}{4(s-1)} - \frac{1}{4(s+1)} - \frac{1}{2(s+1)^2}\right)$$

e

$$y = \frac{e}{4}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s-1}\right\} - \frac{e}{4}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s+1}\right\} - \frac{e}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{(s+1)^2}\right\}.$$

Finalmente, observo que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s-1}\right\} = u_3(t)e^{t-3} \quad \text{pois } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s+1}\right\} = u_3(t)e^{-(t-3)} \quad \text{pois } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{(s+1)^2}\right\} = u_3(t)(t-3)e^{-(t-3)} \quad \text{pois } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = t\,e^{-t}.$$

Assim, concluimos que

$$y(t) = e\,u_3(t)\left(\frac{e^{t-3}}{4} - \frac{e^{-t+3}}{4} - \frac{(t-3)}{2}e^{-t+3}\right).$$

Questão 4: (3.0 pontos)

Considere o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF):

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 2 \\ u_t(x,0) = 5 + \cos(4\pi x), & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

(a) (2.0 pontos) Utilizando o Método de Separação de Variáveis, obtenha as equações diferencias ordinárias nas variáveis x e t e as resolva, detalhando todas as etapas.

Solução:

Seja $u(x,t) = F(x)\,G(y)$. Substituindo na equação obtém-se

$$\frac{G''(t)}{4G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda$$

e portanto

$$\begin{cases} F''(x) - \lambda F(x) = 0 \\ G''(t) - 4\lambda G(t) = 0. \end{cases}$$

Como $u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0$, obtém-se $F'(0) = F'(2) = 0$.

A primeira EDO

$$\begin{cases} F''(x) - \lambda F(x) = 0 \\ F'(0) = F'(2) = 0 \end{cases}$$

tem o polinomio caracteristico $r^2 - \lambda = 0$ com raízes $r = \pm\sqrt{\lambda}$.

1o caso: $\lambda = 0$:

Temos raízes $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e assim $F(x) = C_1 + C_2\,x$. Como $0 = F'(0) = C_2$ temos $C_2 = 0$. Portanto para o autovalor $\lambda = 0$ temos $F(x) = C_1$ (constante).

2o caso: $\lambda > 0$:

Temos raízes $r_1 = \sqrt{\lambda}$ e $r_2 = \sqrt{\lambda}$ e assim $F(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ e

$$F'(x) = C_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}x} - C_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Como $0 = F'(0) = (C_1 - C_2)\sqrt{\lambda}$ temos $C_1 = C_2$. Como $0 = F'(2) = C_1\sqrt{\lambda}(e^{2\sqrt{\lambda}} - e^{-2\sqrt{\lambda}})$ e como e^x é uma função injectiva temos $e^{2\sqrt{\lambda}} = e^{-2\sqrt{\lambda}}$ se e somente se $2\sqrt{\lambda} = -2\sqrt{\lambda}$, o

que não é possivel pois $\lambda > 0$. Logo $e^{2\sqrt{\lambda}} - e^{-2\sqrt{\lambda}} \neq 0$ e assim $C_1 = 0$. Portanto $C_2 = 0$ e $F(x) = 0$. Mas essa solução não interessa. Portanto $\lambda > 0$ não é um auto-valor.
3o caso: $\lambda = -\sigma^2 < 0$, $\sigma > 0$:
Temos raízes $r_1 = i\sigma$ e $r_2 = -i\sigma$ e assim $F(x) = A_1 \cos(\sigma x) + A_2 \operatorname{sen}(\sigma x)$ e

$$F'(x) = -\sigma A_1 \operatorname{sen}(\sigma x) + \sigma A_2 \cos(\sigma x).$$

Como $0 = F'(0) = \sigma A_2$ temos $A_2 = 0$ pois $\sigma > 0$. Como $0 = F'(2) = -\sigma A_1 \operatorname{sen}(2\sigma)$ pode-se tomar $A_1 \neq 0$, desde que $\operatorname{sen}(2\sigma) = 0$ se $2\sigma = n\pi$. Assim $\sigma = \frac{n\pi}{2}$ e portanto $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{4}$ para $n \geq 1$. Portanto para os auto-valores $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{4}$, $n \geq 1$ obtém-se

$$F_n(x) = A_n \cos \frac{n\pi x}{2}, \quad n \geq 1.$$

Consideramos a segunda EDO

$$G''(t) - 4\lambda G(t) = 0$$

para os casos $\lambda = 0$ e $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{4}$, $n \geq 1$:
$\lambda = 0$:

$$G''(t) = 0 \text{ e assim } G(t) = D_1 + D_2\, t.$$

$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{4}$:

$$G_n''(t) + n^2\pi^2 G_n(t) = 0 \text{ e assim } G_n(t) = \alpha_n \cos(n\pi t) + \beta_n \operatorname{sen}(n\pi t)$$

(b) (0.5 ponto) Encontre a solução em série que verifica a equação e as condições de fronteira.

Solução:
Para o auto-valor $\lambda = 0$ temos

$$u_0(x,t) = C_1(D_1 + D_2\, t) = c_0 + d_0\, t.$$

Para $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{4}$, $n \geq 1$, temos

$$u_n(x,t) = F_n(x) G_n(t) = (c_n \cos(n\pi t) + d_n \operatorname{sen}(n\pi t)) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Portanto

$$u(x,t) = c_0 + d_0\, t + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos(n\pi t) + d_n \operatorname{sen}(n\pi t)) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

(c) (0.5 ponto) Analisando as condições iniciais do (PVIF) obtenha a solução do problema dado.

Solução:
Determinação dos constantes c_0, d_0, c_n, d_n: Como

$$u(x,0) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{2} = 0,$$

temos $c_0 = c_n = 0$, $n \geq 1$. Como

$$u_t(x,t) = d_0 + \sum_{n=0}^{\infty} n\pi d_n \cos(n\pi t) \cos \frac{n\pi x}{2}$$

e assim

$$u_t(x,0) = d_0 + \sum_{n=0}^{\infty} n\pi d_n \cos \frac{n\pi x}{2} = 5 + \cos 4\pi x$$

temos $d_0 = 5$ e $8\pi d_8 = 1$ e portanto $d_8 = \frac{1}{8\pi}$ e $d_n = 0$ se $n \neq 8$. Portanto a solução procurada é

$$u(x,t) = 5t + \frac{1}{8\pi} \operatorname{sen}(8\pi t) \cos(4\pi x).$$