Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Departamento de Métodos Matemáticos

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral IV — Prova Final
Unidades: Escola Politécnica e Escola de Química — **Turmas**: Engenharias 2º Sem/2011
Código: MAC 248 — **Data**: 01/12/2011

Questão 1. (2,5 pontos).

Encontre a solução em série de potências, em torno de $x_0 = 0$, da equação diferencial de segunda ordem

$$y'' + xy' + 2y = 0,$$

com condições iniciais $y(0) = 4$ e $y'(0) = -1$.

Solução. Seja $y = \sum\limits_{n=0} a_n x^n$ a solução procurada. Temos que as suas derivadas de primeira e segunda ordens são dadas por

$$y' = \sum_{n=1} n a_n x^{n-1} \quad \text{e} \quad y'' = \sum_{n=2} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Substituindo na equação diferencial obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0} 2a_n x^n &= 0 \\
\sum_{n=0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0} n a_n x^n + \sum_{n=0} 2a_n x^n &= 0 \\
\sum_{n=0} x^n[(n+2)(n+1)a_{n+2} + n a_n + 2a_n] &= 0
\end{aligned}$$

Disto se tira as seguintes relações de recorrências

$$\begin{aligned}
a_2 &= -a_0 \\
a_{n+2} &= \frac{-a_n}{n+1}, n \geq 0
\end{aligned}$$

por conseguinte, temos:
$n = 0 \to a_2 = -a_0, n = 1 \to a_3 = \frac{-a_1}{2}, n = 3 \to a_5 = \frac{-a_3}{4} = \frac{a_1}{2.4}, n = 4 \to a_6 = \frac{-a_4}{5} = \frac{-a_0}{3.5}, n = 5 \to a_7 = \frac{-a_5}{6} = \frac{-a_1}{2.4.6}, n = 6 \to a_8 = \frac{-a_6}{7} = \frac{a_0}{3.5.7}$

Termos pares : $a_{2n} = a_0 \frac{(-1)^{n+1}}{3.5.7...(2n-1)}$

Termos impares: $a_{2n+1} = a_1 \frac{(-1)^n}{2.4.6...(2n)}$

logo

$y(x) = a_0[1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{3.5} + \frac{1}{3.5.7} + ... + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{3.5.7...(2n-1)}...] + a_1[x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2.4} - \frac{1}{2.4.6} + ... \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2.4.6...(2n)} - ...]$

$y(0) = 4 \to a_0 = -4$
$y'(0) = -1 \to a_1 = -1$
$y(x) = 4 - x - 4x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{4x^4}{3} - \frac{x^5}{2.4} + ..$

Questão 2. (2,5 pontos).

Use a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = 2\delta(t-1) + 7\delta(t-3), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Solução. Tomando $Y = \mathcal{L}\{y\}$ e aplicando a transformada de Laplace nos dois membros da equação dada, encontramos

$$s^2Y - 1 + 4sY + 5Y = 2e^{-s} + 7e^{-3s},$$

obtendo

$$Y = \frac{1}{s^2+4s+5} + 2\frac{e^{-s}}{s^2+4s+5} + 7\frac{e^{-3s}}{s^2+4s+5}.$$

Como

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\} = e^{-2t}\operatorname{sen} t,$$

concluímos que

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = e^{-2t}\operatorname{sen} t + 2u_1(t)e^{-2(t-1)}\operatorname{sen}(t-1) + 7u_3(t)e^{-2(t-3)}\operatorname{sen}(t-3).$$

Questão 3. (2,5 pontos). Dado $k \in \mathbb{N}$ considere a função periódica f, definida por

$$f(x) = 1 - x^{2k},\ x \in [-1,1],\ \text{tal que}\, f(x+2) = f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

e sua série de Fourier associada $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\pi x) + b_n\operatorname{sen}(n\pi x)\Big).$

a) (1,5 ponto) Prove que $|a_n| \leq 8\left(\dfrac{k}{\pi}\right)^2\dfrac{1}{n^2}$ para todo $n \geq 1$.

b) (1,0 ponto) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(|a_n| + |b_n|\Big) < \infty$

Solução. **(a)** Usando a fórmula para os coeficientes de Fourier de f e observando que f é uma função par temos que

$$a_n = 2\int_0^1 (1 - x^{2k})\cos(n\pi x)dx, \quad n \geq 1.$$

Integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= 2\frac{1-x^{2k}}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)\Big|_0^1 + \frac{4k}{n\pi}\int_0^1 x^{2k-1}\operatorname{sen}(n\pi x)dx \\ &= \frac{4k}{n\pi}\int_0^1 x^{2k-1}\operatorname{sen}(n\pi x)dx. \end{aligned} \tag{1}$$

Integrando mais uma vez por partes obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4k}{n\pi}\int_0^1 x^{2k-1}\operatorname{sen}(n\pi x)dx \\ &= \frac{4k}{n\pi}\left[-x^{2k-1}\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1 + \frac{2k-1}{n\pi}\int_0^1 x^{2k-2}\cos(n\pi x)dx\right] \\ &= \frac{4k}{n\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2k-1}{n\pi}\int_0^1 x^{2k-2}\cos(n\pi x)dx\right]. \end{aligned} \tag{2}$$

Da última igualdade segue que

$$
\begin{aligned}
|a_n| &\leq \frac{4k}{n\pi}\left[\frac{1}{n\pi} + \frac{2k-1}{n\pi}\int_0^1 \underbrace{|x^{2k-2}\cos(n\pi x)|}_{\leq 1}\,dx\right] \\
&\leq \frac{4k}{n\pi}\left[\frac{1}{n\pi} + \frac{2k-1}{n\pi}\int_0^1 dx\right] \\
&= 8\left(\frac{k}{\pi}\right)^2\frac{1}{n^2}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

(b) Como f é par podemos concluir que $b_n = 0$ para todo $n \geq 1$. Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \leq 8\left(\frac{k}{\pi}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty.$$

Questão 4. (2,5 pontos). Determine a solução do problema de contorno

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\
u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\
u(x,0) = 1 + 2x - x^2, & 0 < x < 1.
\end{cases}
$$

Solução. A solução $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$ é a soma de uma solução estacionária $w(x)$ e uma solução transiente $v(x,t)$. Como $w(x)$ não depende da variável t, ela satisfaz a equação $0 = 2w_{xx}(x) + 4$ logo tem a forma $w(x) = -x^2 + Bx + C$. Com condições iniciais $w(0) = 0 = w(1)$ obtemos $B = 1$ e $C = 0$.

A solução transiente $v(x,t)$ satisfaz a equação

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= 2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < 1,\ t > 0, \\
v(0,t) &= v(1,t) = 0, \qquad t > 0
\end{aligned}
$$

tendo como condição inicial $v(x,0) = 1 + x$. Por separação das variáveis temos que $v(x,t) = X(x)T(t)$ e substituindo na equação temos $\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{2X''(x)}{X(x)}$. Como os dois lados da igualdade dependem de variaveis diferentes, os dois lados tem de ser constantes. Obtemos assim o sistema

$$
\begin{cases}
X''(x) - \frac{\lambda}{2}X(x) = 0 \\
T'(t) - \lambda T(t) = 0.
\end{cases}
$$

Com as condições de contorno dadas $v(0,t) = 0 = v(1,t)$ os casos $\lambda \geq 0$ corespondem a soluções triviais. O caso $\lambda = -\omega^2 < 0$ corresponde ao autovalor $\lambda = -2(n\pi)^2$ e a autofunção $X_n(x) =$ sen $(n\pi x)$. Assim a solução da segunda equação é $T_n(t) = e^{-2(n\pi)^2 t}$ e a solução $v(x,t)$ é então dada por

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-2n^2\pi^2 t}\text{sen}(n\pi x),$$

onde b_n é o coefficiente de Fourier de uma extensão impar da função $1 + x$ para $0 < x < 1$. Isto é

$$b_n = 2\int_0^1 (1+x)\text{sen}(n\pi x)dx = \frac{2}{n\pi}\left(1 - 2\cos(n\pi)\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1 - 2(-1)^n\right).$$

Finalmente,

$$u(x,t) = x - x^2 + v(x,t) = x - x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(1 - 2(-1)^n\right) e^{-2n^2\pi^2 t} \mathrm{sen}(n\pi x).$$