Questão 1: (2.5 pontos)

Considere a seguinte equação diferencial ordinária:

$$(1-x)^2 y'' - 2y = 0. \tag{1}$$

a) (1 ponto) Seja $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma solução de (1) definida numa vizinhança do ponto $x = 0$. Encontre a relação de recorrência satisfeita pelos coeficientes a_n.

b) (1.5 ponto) Resolva o problema de valor inicial associado à equação (1) com condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = -2$.

Solução:

a) O ponto $x = 0$ é regular e a solução converge no intervalo $-1 < x < 1$. Considerando $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ temos as seguintes expressões para suas derivadas

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n \quad \text{e} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2)x^n.$$

Substituindo y, y' e y'' em (1), temos:

$$(1-2x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2)x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2)x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2)x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2)x^{n+2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2)x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n-1)nx^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2}(n+1)(n+2) - 2a_{n+1}(n+1)n + a_n(n-1)n - 2a_n]x^n = 0.$$

Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2}(n+1)(n+2) - 2a_{n+1}(n+1)n + (n^2-n-2)a_n]x^n = 0.$$

Colocando o fator $(n+1)$ em evidência obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)[a_{n+2}(n+2) - 2a_{n+1}n + (n-2)a_n]x^n = 0.$$

Portanto, podemos concluir que

$$a_{n+2}(n+2) - 2a_{n+1}n + (n-2)a_n = 0, \text{ para todo } n = 0, 1, 2 \ldots$$

o que nos dá a relação de recorrência

$$a_{n+2} = \frac{2a_{n+1}n - (n-2)a_n}{(n+2)}, \ n = 0, 1, 2, ...$$

b) Usando que $y(0) = 1$ temos que $a_0 = 1$ e da condição $y'(0) = -2$ segue que $a_1 = -2$. Combinando estes dados com a relação de recorrência obtemos

$$a_2 = \frac{2a_1.0 - (-2)a_0}{2} = 1 \tag{2}$$
$$a_3 = \frac{2a_2.1 - (-1)a_1}{3} = 0 \tag{3}$$
$$a_4 = \frac{4a_3 - 0.a_2}{4} = 0 \tag{4}$$
$$a_5 = \frac{6a_4 - a_3}{5} = 0. \tag{5}$$

Portanto, podemos concluir que

$$a_n = 0, \quad \text{para todo} \quad n \geq 3.$$

Finalmente, a solução do problema de valor inicial proposto é dada por

$$y(x) = 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2,$$

que está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja $g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(t) = \begin{cases} \cos(2t), & \text{se} \quad 0 \leq t < 2\pi, \\ \cos(2t) + \operatorname{sen}(t), & \text{se} \quad t \geq 2\pi. \end{cases}$

Resolva o seguinte Problema de Valor Inicial: $\begin{cases} y'' + 4y = g(t), \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 0. \end{cases}$

Solução:

Denotamos por $Y(s)$ e $G(s)$ as transformadas de Laplace de y e g, respectivamente. Aplicando a propriedade 2-d) do formulário e usando as condições iniciais do problema de valor inicial obtemos

$$\begin{aligned} s^2Y(s) + 4Y(s) = G(s) &= \mathcal{L}[(1 - u_{2\pi}(t))\cos(2t)](s) + \mathcal{L}[u_{2\pi}(2t)\cos(t)](s) + \mathcal{L}[u_{2\pi}(t)\operatorname{sen}(t)](s) \\ &= \mathcal{L}[\cos(2t)](s) + \mathcal{L}[u_{2\pi}(t)\operatorname{sen}(t - 2\pi)](s) \\ &= \mathcal{L}[\cos(2t)](s) + e^{-2\pi s}\mathcal{L}[\operatorname{sen}(t)](s), \end{aligned} \tag{6}$$

onde na última igualdade foi usada a propriedade 2-b) do formulário.

Usando que $\dfrac{1}{s^2+4} = \dfrac{1}{2}\mathcal{L}[\operatorname{sen}(2t)](s)$ e a propriedade de convolução segue de (6) que

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2+4}\mathcal{L}[\cos(2t)](s) + e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+4}\mathcal{L}[\operatorname{sen}(t)](s) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[\operatorname{sen}(2t)](s)\mathcal{L}[\cos(2t)](s) + e^{-2\pi s}\frac{1}{2}\mathcal{L}[\operatorname{sen}(2t)](s)\mathcal{L}[\operatorname{sen}(t)](s) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[h_1(t)](s) + e^{-2\pi s}\frac{1}{2}\mathcal{L}[h_2(t)](s), \end{aligned} \tag{7}$$

onde

$$h_1(t) = \int_0^t \cos(2t - 2\tau)\operatorname{sen}(2\tau)d\tau \quad \text{e} \quad h_2(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(t-\tau)\operatorname{sen}(2\tau)d\tau.$$

O cálculo das integrais nos dá

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t [\operatorname{sen}(2t) + \operatorname{sen}(2t - 4\tau)]\, d\tau \\ &= \frac{1}{2}\left[t\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{4}\cos(2t - 4\tau)\Big|_0^t \right] \\ &= \frac{t\operatorname{sen}(2t)}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t [\cos(t - 3\tau) - \cos(t + \tau)]\, d\tau \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\operatorname{sen}(t - 3\tau)\Big|_0^t - \operatorname{sen}(t + \tau)\Big|_0^t \right] \\ &= -\frac{\operatorname{sen}(2t)}{3} + \frac{2\operatorname{sen}(t)}{3}. \end{aligned}$$

Finalmente, combinando (7) com as expressões obtidas para h_1 e h_2 com a propriedade 2 b) do formulário obtemos que

$$y(t) = \frac{t\operatorname{sen}(2t)}{4} + \frac{1}{3}u_{2\pi}(t)\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{6}u_{2\pi}(t)\operatorname{sen}(2t).$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere o problema de condução do calor em uma barra de comprimento 1, modelado por

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - 1, & 0 < x < 1,\ t > 0, \quad (8a) \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \quad (8b) \\ u(1,t) = \frac{1}{2}, & t \geq 0, \quad (8c) \\ u(x,0) = \frac{x^2}{2} + 2\operatorname{sen}(3\pi x)\cos(3\pi x), & 0 \leq x \leq 1. \quad (8d) \end{cases}$$

a) (1 ponto) Encontre a solução estacionária $v(x)$ para o problema (8a)-(8b)-(8c).

b) (1 ponto) Seja $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$. Descreva o problema de valores de contorno e de valor inicial que é satisfeito por w.

c) (0.5 ponto) Determine o valor de $u(\frac{1}{2}, t)$ para todo $t > 0$.

Solução:

a) A solução estacionária $u(x,t) = v(x)$ não depende da variável temporal t, logo deverá satisfazer a equação diferencial ordinária

$$v''(x) - 1 = 0 \Longleftrightarrow v''(x) = 1,$$

que tem por solução geral a expressão $v(x) = \frac{x^2}{2} + ax + b$, onde a e b são constantes reais arbitrárias. Usando as condições de contorno $v(0) = 0$ e $v(1) = 1/2$ concluímos que $a = b = 0$. Assim, a solução estacionária é dada pela expressão:

$$v(x) = \frac{x^2}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

b) Calculando as derivadas parciais de w com respeito às variáveis t e x temos que

$$w_t(x,t) = u_t(x,t) - v_t(x) = u_t(x,t), \tag{9}$$

$$w_{xx}(x,t) = u_{xx}(x,t) - v_{xx}(x) = u_{xx}(x,t) - 1. \tag{10}$$

Logo, combinando (8a), (9)e (10) concluímos que

$$w_t(x,t) = w_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0. \tag{11}$$

Por outro lado, das condições (8b) e (8c) seguem as seguintes condições de contorno para w:

$$w(0,t) = u(0,t) - v(0) = 0, \tag{12}$$
$$w(1,t) = u(1,t) - v(1) = 0, \tag{13}$$

para todo $t \geq 0$. Finalmente, usando (8d) obtemos

$$w(x,0) = u(x,0) - v(x) = 2\,\mathrm{sen}(3\pi x)\cos(3\pi x) = \mathrm{sen}(6\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{14}$$

Ressumindo, w satisfaz o seguinte problema de valores de contorno e de valor inicial:

$$\begin{cases} w_t(x,t) = w_{xx}(x,t), & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ w(0,t) = w(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ w(x,0) = \mathrm{sen}(6\pi x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{15}$$

c) A solução do problema (15) é dada pela expressão

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t}\,\mathrm{sen}(n\pi x), \quad \text{onde} \quad b_n = 2\int_0^1 \mathrm{sen}(6\pi x)\,\mathrm{sen}(n\pi x)dx.$$

De acordo com as relações de ortogonalidade temos que $b_6 = 1$ e $b_n = 0$ para todo $n \neq 6$. Portanto,

$$w(x,t) = e^{-36\pi^2 t}\,\mathrm{sen}(6\pi x); \quad \text{portanto,} \quad u(x,t) = \frac{x^2}{2} + e^{-36\pi^2 t}\,\mathrm{sen}(6\pi x).$$

Finalmente, $u(\frac{1}{2},t) = \frac{1}{8} + e^{-36\pi^2 t}\,\mathrm{sen}(3\pi) = \frac{1}{8}$ para todo $t \geq 0$.

Questão 4: (2.5 pontos)

Considere o seguinte problema de Dirichlet no quadrado $[0,1] \times [0,1]$ com condições de Neumann:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,1) \times (0,1), & \text{(16a)} \\ u_y(x,0) = u_y(x,1) = 0, & x \in (0,1), & \text{(16b)} \\ u_x(0,y) = 0, & y \in (0,1), & \text{(16c)} \\ u_x(1,y) = f(y), & y \in (0,1), & \text{(16d)} \end{cases}$$

onde f é uma função infinitamente diferenciável no intervalo $(0,1)$.

a) (1.5 ponto) Determine todas as soluções não triviais de (16a)-(16b)-(16c) na forma de $u(x,y) = X(x)Y(y)$.

b) (1 ponto) Para que o problema (16a)-(16b)-(16c)-(16d) tenha solução é necessário que a integral

$$I = \int_0^1 f(y)dy$$

tenha um valor específico. Supondo que existe uma solução $u(x,y)$ do problema, use o formato da solução obtida pelo método de separação de variáveis para descobrir o valor de I.

Solução:

a) Vamos supor que a solução da equação de Laplace seja da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Assim, $X''Y + XY'' = 0$, que é equivalente à equação $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$. Como o primeiro termo dessa equação depende somente de x, enquanto que o segundo depende somente de y, deverá existir uma constante real λ tal que $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$. Assim sendo, as equações diferenciais ordinárias para as funções $X(x)$ e $Y(y)$ são da forma

$$X(x) - \lambda X(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad Y''(y) + \lambda Y(y) = 0.$$

Das condições de contorno temos que $X(x)Y'(0) = 0$, $X(x)Y'(1) = 0$ e $X'(0)Y(y) = 0$ para todo $x, y \in (0,1)$. Como não nos interessam soluções triviais (nulas), temos que

$$X'(0) = Y'(0) = Y'(1) = 0.$$

Obtemos assim

$$\textbf{(I)} \begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, \\ Y'(0) = Y'(1) = 0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \textbf{(II)} \begin{cases} X'' - \lambda X = 0, \\ X'(0) = 0. \end{cases}$$

A solução do problema de Sturm-Liouville **(I)** está no formuário e é dada por $Y_0 = c_0$ para $\lambda = \lambda_0 = 0$ e $Y_n(y) = c_n \cos(n\pi y)$ para $\lambda = \lambda_n = (n\pi)^2$ com $n = 1, 2, \ldots$.

De posse destes auto-valores $\lambda_n = (n\pi)^2$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ podemos usar a equação diferencial **(II)** para obter as soluções correspondentes $X_n(x)$. A equação característica associada à e.d.o. em **(II)** é $s^2 - (n\pi)^2 = 0$, com raízes $s_1 = n\pi$ e $s_2 = -n\pi$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Sob estas condições a solução geral é dada por $X_n(x) = A\cosh(n\pi x) + B\,\text{senh}(n\pi x)$ e consequentemente

$$X_n'(x) = n\pi\left(B\cosh(n\pi x) + A\,\text{senh}(n\pi x)\right).$$

Considerando a condição de contorno, temos $0 = X'(0) = Bn\pi$ e consequentemente $B = 0$. Portanto, a solução toma a forma

$$X_n(y) = A_n \cosh(n\pi x).$$

Assegura-se assim que as soluções não triviais da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$ são

$$u_0(x,y) = c_0 \qquad \text{e} \qquad u_n(x,y) = c_n \cosh(n\pi x)\cos(n\pi y), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

b) Usando as soluções u_n do item a), a linearidade da equação a derivadas parciais e a homogeneidade das condições de contorno, podemos assegurar que funções do tipo

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cosh(n\pi x)\cos(n\pi y),$$

são soluções de (16a)-(16b)-(16c). Impondo que $f(y) = u_x(1,y)$, obtemos

$$f(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\pi c_n \text{senh}(n\pi)\cos(n\pi y).$$

Portanto, usando as condições dadas para f obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(y)dy &= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\pi c_n \text{senh}(n\pi)\cos(n\pi y)\right) dy. \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n\pi c_n \text{senh}(n\pi) \int_0^1 \cos(n\pi y)dy \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n\pi c_n \text{senh}(n\pi)\frac{1}{n}\left(\text{sen}(n\pi) - \text{sen}(0)\right) dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

1. Tabela básica de transformadas de Laplace

$f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$	$\mathcal{L}[f](s)$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$\mathrm{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$

2. Propriedades básicas da Transformada de Laplace

a) $\mathcal{L}[e^{ct} f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-c)$.

b) $\mathcal{L}[u_c(t) f(t-c)](s) = e^{-cs}\mathcal{L}[f(t)](s)$.

c) $\mathcal{L}[\delta(t-c)](s) = e^{-cs}$.

d) $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n \mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$.

3. Soluções de Problemas de Valores de Contorno (PVC)

As soluções não-triviais do PVC: $\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \\ Y'(0) = Y'(L) = 0 \end{cases}$ são dadas por

a) $\lambda_0 = 0, \quad \text{e} \quad Y_0 = c_0,$

b) $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \text{e} \quad Y_n(y) = c_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} y\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$