Seminário 1

Alexander Cantoral Vilchez

12 de Agosto de 2021

Conteúdo

Introdução

Os fluxos geodésicos aparecem naturalmente quando temos uma métrica Riemanniana em uma variedade completa. Estes fluxos carregam uma dinâmica que é dada pelas geodésicas da variedade e suas propriedades, como veremos ao longo dos seminários, estão intimamente ligadas à geometria da variedade. Por exemplo, nos anos 60, o matemático russo Anosov percebeu que, sob certas condições, o fluxo geodésico exibia um comportamento caótico, o que logo seria chamado "sistemas Anosov".

Figura: Dmitri Anosov (1936-2014).

Ao passar dos anos, algumas perguntas apareceram de forma natural:

- Geometria da variedade $\Rightarrow$ informação sobre o comportamento do fluxo geodésico?

- Comportamento do fluxo geodésico $\Rightarrow$ informação sobre a geometria da variedade?

Obter respostas sobre a relação que existe entre a dinâmica e a geometria dos fluxos geodésicos desperta o interesse dos pesquisadores em dinâmica.

Nestes seminários, vamos estudar resultados sobre a dinâmica dos fluxos geodésicos em variedades Riemannianas de curvatura não positiva, tomando como referência o survey de G. Knieper:

Hyperbolic Dynamics and Riemannian Geometry, Handbook of Dynamical Systems, Vol 1A.

Geometria do fibrado tangente

Seja M uma variedade Riemanniana e denote por $\pi : TM \to M$ a projeção canónica.

Definição:

Seja $\theta = (x, v) \in TM$. O subespaço vertical $V(\theta)$ é o subespaço de $T_\theta TM$ cujos elementos são vetores tangentes às curvas

$$\begin{aligned} \sigma : \ (-\varepsilon, \varepsilon) \to & \quad TM \\ t \quad & \to (x, v + tw) \end{aligned}$$

em $t = 0$, onde $w \in T_x M$. Em outras palavras,

$$V(\theta) := \ker(d_\theta \pi) = \{\xi \in T_\theta TM : d_\theta \pi(\xi) = 0\}.$$

Para definir o subespaço horizontal vamos usar a métrica de M.

Seja $\theta \in TM$ e $\xi \in T_\theta TM$. Dizemos que uma curva $z : (-\varepsilon, \varepsilon) \to TM$ é adaptada a θ e ξ se ela satisfaz as condições iniciais:

$$z(0) = \theta, \quad z'(0) = \xi.$$

Definição:

Definimos a aplicação

$$K_\theta : T_\theta TM \to T_x M$$

da seguinte forma. Seja $\xi \in T_\theta TM$ e $z : (-\varepsilon, \varepsilon) \to TM$ uma curva adaptada a θ e ξ. Podemos escrever $z(t) = (\alpha(t), Z(t))$, onde Z é um campo vetorial ao longo de α. Definimos:

$$K_\theta(\xi) := \nabla_{\alpha'} Z(0).$$

K_θ está bem definida e é linear. O subespaço horizontal em θ se define como

$$H(\theta) := \ker(K_\theta) = \{\xi \in T_\theta TM : K_\theta(\xi) = 0\}.$$

Também podemos definir $H(\theta)$ usando levantamentos horizontais.

Seja $\theta = (x, v) \in TM$. O levantamento horizontal

$$L_\theta : T_x M \to T_\theta TM$$

se define da seguinte forma. Sejam $v' \in T_x M$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva adaptada a x e v'. Sejam $Z(t)$ o transporte paralelo de v ao longo de α e $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to TM$ a curva $\sigma(t) = (\alpha(t), Z(t))$. Definimos

$$L_\theta(v') := \sigma'(0) \in T_\theta TM.$$

L_θ está bem definida e é linear.

Lema:

1. $\ker(K_\theta) = \operatorname{im}(L_\theta)$.
2. $d_\theta \pi \circ L_\theta = Id_{T_x M}$.
3. As aplicações $d_\theta \pi|_{H(\theta)} : H(\theta) \to T_x M$ e $K_\theta|_{V(\theta)} : V(\theta) \to T_x M$ são isomorfismos lineares.

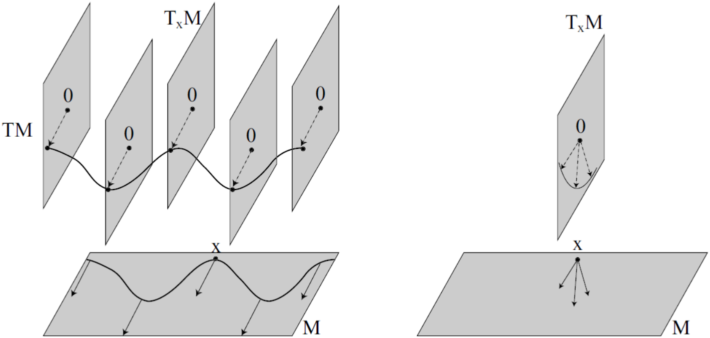

Figura: Curvas de vetores gerando direções horizontais e verticais em $M = \mathbb{R}^2$.

Como o único vetor $\xi \in H(\theta) \cap V(\theta)$ é o vetor zero e

$$\dim H(\theta) + \dim V(\theta) = \dim T_\theta TM,$$

pelo lema anterior concluímos que

$$T_\theta TM = H(\theta) \oplus V(\theta)$$

e que a aplicação

$$\begin{array}{rrcl} j_\theta : & T_\theta TM & \to & T_xM \times T_xM \\ & \xi & \to & (d_\theta \pi(\xi), K_\theta(\xi)) \end{array}$$

é um isomorfismo linear.

Portanto, podemos escrever $\xi = (\xi_h, \xi_v)$, onde

$$\xi_h = d_\theta \pi(\xi) \quad \text{e} \quad \xi_v = K_\theta(\xi).$$

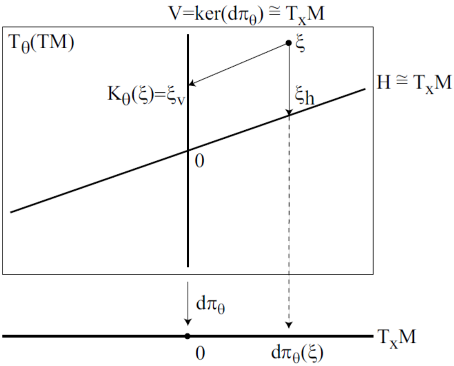

Figura: Subespaços vertical e horizontal de $T_\theta TM$.

Usando a decomposição $T_\theta TM = H(\theta) \oplus V(\theta)$, podemos definir uma métrica Riemanniana em TM que faz $H(\theta)$ e $V(\theta)$ ortogonais.

Esta métrica é chamada a métrica de Sasaki e é dada por

$$\begin{aligned}\langle \xi, \eta \rangle_\theta :&= \langle d_\theta\pi(\xi), d_\theta\pi(\eta) \rangle_{\pi(\theta)} + \langle K_\theta(\xi), K_\theta(\eta) \rangle_{\pi(\theta)} \\ &= \langle \xi_h, \eta_h \rangle_{\pi(\theta)} + \langle \xi_v, \eta_v \rangle_{\pi(\theta)},\end{aligned}$$

para todo $\xi, \eta \in T_\theta TM$.

Esta métrica nos facilitará o estudo do campo geodésico e do fluxo geodésico.

O fluxo geodésico

Definição:

Uma curva diferenciável $\gamma : [a, b] \to M$ é uma geodésica de M se

$$\frac{D\gamma'}{dt} \equiv 0.$$

Em coordenadas locais, $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ é uma geodésica se e somente se

$$\sum_k \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \partial_k = 0.$$

Proposição:

Seja M uma variedade Riemanniana. Para cada $x \in M$, $v \in T_x M$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, existem um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 e uma única geodésica $\gamma : I \to M$ tal que $\gamma(t_0) = x$ e $\gamma'(t_0) = v$.

Seja M uma variedade Riemanniana completa e seja $\gamma_{(x,v)}(t)$ a única geodésica com as condições iniciais:

$$\begin{cases} \gamma_{(x,v)}(0) = x, \\ \gamma'_{(x,v)}(0) = v. \end{cases}$$

Definição:

O fluxo geodésico em TM é uma família de difeomorfismos

$$\begin{array}{rccc} \phi^t : & TM & \to & TM \\ & (x,v) & \to & (\gamma_{(x,v)}(t), \gamma'_{(x,v)}(t)) \end{array}$$

onde $t \in \mathbb{R}$.

O problema de trabalhar somente com geodésicas em M é que elas se podem cruzar, por isso é melhor trazer as geodésicas para o fibrado tangente.

Definição:

O campo vetorial geodésico $G : TM \to TTM$ se define como

$$G(\theta) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi^t(\theta) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\gamma_\theta(t), \gamma'_\theta(t)).$$

Isto é, G é o campo vetorial com trajetórias da forma $t \to (\gamma(t), \gamma'(t))$ onde γ é uma geodésica em M.

Em coordenadas locais,

$$\frac{dx_k}{dt} = y_k,$$
$$\frac{dy_k}{dt} = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k y_i y_j,$$

para $k = 1, \ldots, n$.

O campo vetorial geodésico tem uma expressão simples em termos da identificação j_θ. De fato, como $\gamma'_\theta(t)$ é o transporte paralelo de v, então $G(\theta) = L_\theta(v)$. Portanto,

$$G(\theta) = L_\theta(v) = (d_\theta \pi(L_\theta(v)), K_\theta(L_\theta(v))) = (v, 0).$$

Denotemos por SM o fibrado tangente unitário, isto é,

$$SM = \{(x, v) \in TM : \|v\| = 1\}.$$

Como as geodésicas viajam a velocidade constante, para $(x, v) \in SM$ temos que

$$\|\gamma'_{(x,v)}(t)\| = \|v\| = 1,$$

então $\phi^t(x, v) \in SM$. Portanto SM é invariante por ϕ^t. Algumas vezes é conveniente trabalhar com a restrição do fluxo a SM, já que ele captura toda a informação importante do fluxo.

Campos de Jacobi

Sejam $\gamma : [a, b] \to M$ uma geodésica e $\varepsilon > 0$. Uma variação de γ por geodésicas é uma função suave

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$$

tal que:

(i) $F(0, t) = \gamma(t)$,

(ii) $t \to F(s, t)$ é uma geodésica para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Defina

$$J(t) = \frac{dF}{ds}(0, t).$$

Pelo lema de simetria,

$$\frac{D^2 J}{dt^2}(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0.$$

Definição:

Um campo vetorial ao longo de uma geodésica γ é chamado campo de Jacobi se satisfaz

$$J'' + R(\gamma', J)\gamma' = 0.$$

Pela teoria de existência e unicidade de soluções de uma EDO:

Proposição:

Seja $\gamma : [a, b] \to M$ uma geodésica e $p = \gamma(t_0)$. Para qualquer par de vetores $V, W \in T_pM$, existe um único campo de Jacobi J ao longo de γ tal que $J(t_0) = V$ e $J'(t_0) = W$.

Consequência: Os campos de Jacobi ao longo de uma geodésica γ formam um espaço vetorial de dimensão $2n$. Será denotado por $J(\gamma)$.

Seja $\xi \in T_\theta TM$ e $z : (-\varepsilon, \varepsilon) \to TM$ uma curva adaptada a θ e ξ, com $z(s) = (\alpha(s), Z(s))$. Então a função

$$F(s,t) = \pi \circ \phi^t(z(s))$$

é uma variação da geodésica $\pi \circ \phi^t(\theta) = \gamma_\theta$ e portanto

$$J_\xi(t) := \frac{dF}{ds}(0,t) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \pi \circ \phi^t(z(s)) = d_{\phi^t(\theta)}\pi \circ d_\theta \phi^t(\xi)$$

é um campo de Jacobi ao longo de γ_θ que satisfaz

$$\begin{aligned} J_\xi(0) &= d_\theta \pi(\xi), \\ J'_\xi(0) &= \left.\frac{D}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \pi \circ \phi^t(z(s)) \\ &= \left.\frac{D}{ds}\right|_{s=0} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi \circ \phi^t(z(s)) \\ &= \left.\frac{D}{ds}\right|_{s=0} Z(s) = K_\theta(\xi). \end{aligned}$$

Pela existência e unicidade dos campos de Jacobi, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} i_\theta : & T_\theta TM & \to & J(\gamma_\theta) \\ & \xi & \to & J_\xi \end{array}$$

é um isomorfismo linear.

O seguinte resultado descreve a diferencial do fluxo geodésico

$$d_\theta \phi^t : T_\theta TM \to T_{\phi^t(\theta)} TM$$

em termos dos campos de Jacobi e a decomposição de TTM em fibrados horizontal e vertical. Mais precisamente, mostra que o comportamento da diferencial do fluxo geodésico está determinado pelo comportamento dos campos de Jacobi.

Proposição:

$$d_\theta \phi^t(\xi) = (J_\xi(t), J'_\xi(t)).$$

Demonstração: Sabemos que $J_\xi(t) = d_{\phi^t(\theta)}\pi(d_\theta\phi^t(\xi))$. Logo:

$$\begin{aligned} J'_\xi(t) = \frac{D}{dt}\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \pi \circ \phi^t(z(s)) &= \left.\frac{D}{ds}\right|_{s=0} \frac{d}{dt}\pi \circ \phi^t(z(s)) \\ &= \left.\frac{D}{ds}\right|_{s=0} \phi^t(z(s)) \\ &= K_{\phi^t(\theta)}(d_\theta\phi^t(\xi)). \end{aligned}$$

Pela identificação j_θ,

$$d_\theta\phi^t(\xi) = (d_{\phi^t(\theta)}\pi(d_\theta\phi^t(\xi)), K_{\phi^t(\theta)}(d_\theta\phi^t(\xi))) = (J_\xi(t), J'_\xi(t)).$$

$\square$

Forma simplética

Definição:

Seja M uma variedade. Uma 2-forma ω é chamada simplética se:

i. ω é fechada, isto é, $d\omega = 0$.
ii. ω é não degenerada, isto é, se $\omega_p(X, Y) = 0$ para todo $Y \in T_pM$ então $X = 0$.

O par (M, ω) é chamado de uma variedade simplética.

Usando a decomposição $T_\theta TM = H(\theta) \oplus V(\theta)$, podemos dar-lhe a TM uma estrutura de variedade simplética com a 2-foma simplética

$$\begin{aligned}\omega_\theta(\xi, \eta) := & \langle K_\theta(\xi), d_\theta\pi(\eta)\rangle_{\pi(\theta)} - \langle K_\theta(\eta), d_\theta\pi(\xi)\rangle_{\pi(\theta)} \\ = & \langle \xi_v, \eta_h\rangle_{\pi(\theta)} - \langle \eta_v, \xi_h\rangle_{\pi(\theta)} .\end{aligned}$$

para todo $\xi, \eta \in T_\theta TM$.

Proposição:

A forma simplética ω_θ é invariante pelo fluxo geodésico para todo $\theta \in TM$.

Demonstração. Sejam $\xi, \eta \in T_\theta TM$. Temos

$$\omega_\theta(d_\theta\phi^t(\xi), d_\theta\phi^t(\eta)) = \left\langle J'_\xi(t), J_\eta(t)\right\rangle - \left\langle J'_\eta(t), J_\xi(t)\right\rangle .$$

Considere a função $f(t) = \left\langle J'_\xi(t), J_\eta(t)\right\rangle - \left\langle J'_\eta(t), J_\xi(t)\right\rangle$. Derivando

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \left\langle J''_\xi(t), J_\eta(t)\right\rangle + \left\langle J'_\xi(t), J'_\eta(t)\right\rangle - \left\langle J''_\eta(t), J_\xi(t)\right\rangle - \left\langle J'_\eta(t), J'_\xi(t)\right\rangle \\
&= \left\langle J''_\xi(t), J_\eta(t)\right\rangle - \left\langle J''_\eta(t), J_\xi(t)\right\rangle \\
&= -\left\langle R(\gamma'_\theta, J_\xi(t))\gamma'_\theta(t), J_\eta(t)\right\rangle + \left\langle R(\gamma'_\theta, J_\eta(t))\gamma'_\theta(t), J_\xi(t)\right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim, f é uma função constante e $\omega_\theta(d_\theta\phi^t(\xi), d_\theta\phi^t(\eta)) = \omega_\theta(\xi, \eta)$. $\square$

Outra forma de provar que o fluxo preserva a forma simplética é usando os campos Hamiltonianos.

Definição:

Seja (M, ω) uma variedade simplética e $H : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. O campo vetorial X_H determinado pela condição

$$\omega(X_H, Y) = dH(Y)$$

é chamado o campo vetorial Hamiltoniano associado a H.

Seja $z : (-\varepsilon, \varepsilon) \to TM$ uma curva adaptada a θ e ξ, onde $z(t) = (\alpha(t), Z(t))$.

$$\begin{aligned} d_\theta H(\xi) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} H(z(t)) = \frac{1}{2} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle Z(t), Z(t)\rangle = \langle \nabla_{\alpha'} Z(0), Z(0)\rangle \\ &= \langle K_\theta(\xi), v\rangle = \omega_\theta(G(\theta), \xi). \end{aligned}$$

Portanto, campo geodésico é o campo Hamiltoniano associado a

$$H(x, v) = \frac{1}{2} \langle v, v\rangle_x .$$

A partir de agora, estudaremos principalmente o fluxo geodésico restrito a SM.

O espaço tangente $T_\theta SM$ está dado por

$$\begin{aligned} T_\theta SM &= T_x M \times \{w \in T_x M : w \perp v\} \\ &= \left\{(x, y) : x, y \in T_{\pi(\theta)} M,\ \ y \perp v\right\}, \end{aligned}$$

já que para cada curva suave $z : (-\varepsilon, \varepsilon) \to SM$, $z(t) = (\alpha(t), Z(t))$, adaptada a θ e ξ tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle Z(t), Z(t)\rangle \\ &= \left\langle \frac{DZ}{dt}(0), v \right\rangle \\ &= \langle K_\theta(\xi), v\rangle \,. \end{aligned}$$

A parte interessante da dinâmica ocorre transversalmente às linhas de fluxo. Denote por

$$E^{\phi}(\theta) = \text{Span}\,\{G(\theta)\} = \{(\lambda v, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

o espaço tangente 1-dimensional ao fluxo geodésico em $\theta \in SM$. Seja

$$N(\theta) := E^{\phi}(\theta)^{\perp}$$

o complemento ortogonal de $E^{\phi}(\theta)$ em $T_\theta SM$, com a métrica de Sasaki.

$$\begin{aligned}\xi \in N(\theta) &\Leftrightarrow \xi \in T_\theta SM \text{ e } \langle d_\theta \pi(\xi), v\rangle_x = 0\\ &\Leftrightarrow \langle K_\theta(\xi), v\rangle_x = 0 \text{ e } \langle d_\theta \pi(\xi), v\rangle_x = 0\end{aligned}$$

Podemos identificar $N(\theta) = \{(x, y) : x \perp v, y \perp v\}$. O próximo lema mostra que existe um fibrado invariante transversal ao fluxo.

Lema:

$N(\theta)$ é invariante pelo fluxo geodésico. Além disso, a forma simplética restrita a $N(\theta)$ é não-degenerada.

Próximo passo: Estudar a diferencial do fluxo restrito a $N(\theta)$.
Suponha que $\dim M = n+1$, então $\dim N(\theta) = 2n$ e considere um frame paralelo ortonormal $E_1(t), E_2(t), \ldots, E_n(t)$ ortogonal a $\phi^t(\theta)$ e para cada $t \in \mathbb{R}$:

$$\rho_t : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to N(\phi^t(\theta)), \quad \rho_t(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x^i E_i(t), \sum_{i=1}^{n} y^i E_i(t) \right).$$

A curvatura $R(t) : \phi^t(\theta)^\perp \to \phi^t(\theta)^\perp$ admite representação matricial

$$R(t)_{ij} = \left\langle R(\phi^t(\theta), E_i(t))\phi^t(\theta), E_j(t) \right\rangle.$$

A equação de Jacobi se transforma numa EDO de segunda ordem em $\mathbb{R}^n$:

$$J''(t) + R(t)J(t) = 0.$$

Consequência: Se $J(t) = (J^1(t), \ldots, J^n(t))$ é uma solução da equação de Jacobi, então

$$(J(t), J'(t)) = \rho_t^{-1} \circ d_\theta \phi^t \circ \rho_0(J(0), J'(0)).$$

Bibliografia

1. G.P. Paternain, *Geodesic Flows*, Birkhäuser, Boston (1999).
2. K. Burns & M. Gidea, *Differential Geometry and Topology: With a view to dynamical systems*, Chapman & Hall/CRC (2005).
3. M. P. Do Carmo, *Riemmannian Geometry*, Birkhäuser (1993).
4. D. McDuff & D. Salamon, *Introduction to Sympletic Topology*, Oxford Mathematical Monographs (1998).