Teorema de Oseledets

Lamartine Medeiros
Heric Corrêa

28 de Fevereiro de 2023

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Índice

Teorema de Karlsson-Margulis

Teorema de Karlsson-Margulis

Teorema

Seja (Y, d) *um espaço métrico completo, uniformemente convexo e de curvatura não-positiva. Seja* $U : \mathbb{N} \times \Omega \to G$ *um cociclo de semincontrações mensurável em* Y*. Fixe* $y \in Y$*, denotamos* $y_n(\omega) = U(n, \omega)y$*. Assumimos também que*

$$\int_\Omega d(y, y_1(\omega))d\mu < \infty.$$

Então,

1. *Existe* $A \geq 0$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d(y, y_n(\omega))}{n} = A$*, para quase todo* $\omega \in \Omega$*;*
2. *Se* $A > 0$*, então* $\mu-$*q.t.p* $\omega \in \Omega$ *existe uma geodésica* $\gamma(\cdot, \omega)$ *tal que* $\gamma(0, \omega) = y$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d(\gamma(nA, \omega), y_n(\omega))}{n} = 0$

Enuciado do Teorema de Oseledets

Enuciado do Teorema de Oseledets

Fixamos o Seguinte:

- (Ω, μ) é um espaço de medida;
- $T : \Omega \to \Omega$ é uma transformação ergódica;
- $GL_k(\mathbb{R}) = \{M \in M_{k\times k}(\mathbb{R}) : det(M) \neq 0\}$;
- $||M|| = \sup_{||v||=1} ||Mv||$, onde $v \in \mathbb{R}^k$.

Fixamos o Seguinte:

- (Ω, μ) é um espaço de medida;
- $T : \Omega \to \Omega$ é uma transformação ergódica;
- $GL_k(\mathbb{R}) = \{M \in M_{k \times k}(\mathbb{R}) : det(M) \neq 0\}$;
- $||M|| = \sup_{||v||=1} ||Mv||$, onde $v \in \mathbb{R}^k$.

Observação

Quando M é simétrica, a sua norma coincide com o maior autovalor de M.

Enuciado do Teorema de Oseledets

Teorema

Seja $M : \mathbb{N} \times \Omega \to GL_k(\mathbb{R})$ *um cociclo à esquerda tal que*

$$\int_\Omega \log \max\{||M(1,\omega)||, ||M(1,\omega)^{-1}||\} d\mu < \infty.$$

Então existem os valores $\lambda_1 > \ldots > \lambda_l$*, chamados de expoentes de Lyapunov, tais que para quase todo* $\omega \in \Omega$ *existe uma bandeira de subespaços:*

$$\mathbb{R}^k = V_1(\omega) \supset \ldots \supset V_l(\omega) \supset V_{l+1}(\omega) = \{0\}$$

tais que para todo $v \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$

$$v \in V_i \setminus V_{i-1} \Leftrightarrow \lambda_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{||M(n,\omega)v||}{||v||}, \text{ para todo } i.$$

O espaço $Pos_k(\mathbb{R})$

O espaço $Pos_k(\mathbb{R})$

Definimos os espaços

$Sym_k = \{X \in M_{k\times k}(\mathbb{R}) | X = X^*\}$ e

$Pos_k = \{P \in Sym_k |$ todos os autovalores de P são positivos$\}$.

O espaço $Pos_k(\mathbb{R})$

Definimos os espaços

$Sym_k = \{X \in M_{k\times k}(\mathbb{R}) | X = X^*\}$ e

$Pos_k = \{P \in Sym_k |$ todos os autovalores de P são positivos$\}$.

Em Pos_k, definimos a métrica Riemanniana

$$\langle X, Y\rangle_p = \mathrm{tr}(P^{-1}XP^{-1}Y), \forall X, Y \in Sym_k.$$

O espaço $Pos_k(\mathbb{R})$

Definimos os espaços

$Sym_k = \{X \in M_{k\times k}(\mathbb{R}) | X = X^*\}$ e

$Pos_k = \{P \in Sym_k |$ todos os autovalores de P são positivos$\}$.

Em Pos_k, definimos a métrica Riemanniana

$$\langle X, Y\rangle_p = \mathrm{tr}(P^{-1}XP^{-1}Y), \forall X, Y \in Sym_k.$$

Sejam $P, Q \in Pos_k$. Definimos $d(P,Q) = \left(\sum_{i=1}^{k}(\log a_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, onde $a_1, \ldots, a_k$ são raízes do polinômio $det(tP - Q)$.

Nessa métrica, Pos_k é completo, simplesmente conexo e tem as curvaturas seccionais não-positivas. Logo, Pos_k é Busemann NPC e uniformemente convexo.

Nessa métrica, Pos_k é completo, simplesmente conexo e tem as curvaturas seccionais não-positivas. Logo, Pos_k é Busemann NPC e uniformemente convexo.

Dada $P \in Pos_k$, podemos diagonalizar $P = RDR^*$, onde R é uma matriz ortogonal. Definimos $P^t = RD^tR^*$. Neste caso, as geodésicas são as curvas

$$\gamma(t) = Q^{\frac{1}{2}} P^{2t} Q^{\frac{1}{2}}, \text{ onde } Q \in Pos_k.$$

Cociclo associado

Seja M um cociclo à esquerda como no Teorema de Oseledets.

Definimos a função $U : \mathbb{N} \times \Omega \to Iso(Pos_k)$ associado ao cociclo à esquerda M por $U(n, \omega)(P) = [M(n, \omega)^*]P$, onde $[M]P = MPM^*$.

Cociclo associado

Seja M um cociclo à esquerda como no Teorema de Oseledets.

Definimos a função $U : \mathbb{N} \times \Omega \to Iso(Pos_k)$ associado ao cociclo à esquerda M por $U(n, \omega)(P) = [M(n, \omega)^*]P$, onde $[M]P = MPM^*$.

Lema

A condição de integrabilidade para M implica a condição de momento para U do Teorema de K-M.

Prova do Lema

Seja $I \in Pos_k$ e definimos $a_1(\omega), \dots, a_k(\omega)$ como sendo os autovalores de $U(1, \omega)I$.

Prova do Lema

Seja $I \in Pos_k$ e definimos $a_1(\omega), \ldots, a_k(\omega)$ como sendo os autovalores de $U(1,\omega)I$. Então,

$$d(I, U(1,\omega)I) = \left(\sum_{i=1}^{k} (\log a_i(\omega))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Prova do Lema

Seja $I \in Pos_k$ e definimos $a_1(\omega), \ldots, a_k(\omega)$ como sendo os autovalores de $U(1,\omega)I$. Então,

$$d(I, U(1,\omega)I) = \left(\sum_{i=1}^{k} (\log a_i(\omega))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d(I, U(1,\omega)I) \leq \sqrt{k} \log \max\{||U(1,\omega)I||, ||(U(1,\omega)I)^{-1}||\}$$

Prova do Lema

Seja $I \in Pos_k$ e definimos $a_1(\omega), \ldots, a_k(\omega)$ como sendo os autovalores de $U(1,\omega)I$. Então,

$$d(I, U(1,\omega)I) = \left(\sum_{i=1}^{k} (\log a_i(\omega))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d(I, U(1,\omega)I) \leq \sqrt{k} \log \max\{||U(1,\omega)I||, ||(U(1,\omega)I)^{-1}||\}$$

$$d(I, U(1,\omega)I) \leq 2\sqrt{k} \log \max\{||M(1,\omega)||, ||M(1,\omega)^{-1}||\}$$

Prova do Lema

Seja $I \in Pos_k$ e definimos $a_1(\omega), \ldots, a_k(\omega)$ como sendo os autovalores de $U(1,\omega)I$. Então,

$$d(I, U(1,\omega)I) = \left(\sum_{i=1}^{k} (\log a_i(\omega))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d(I, U(1,\omega)I) \leq \sqrt{k} \log \max\{||U(1,\omega)I||, ||(U(1,\omega)I)^{-1}||\}$$

$$d(I, U(1,\omega)I) \leq 2\sqrt{k} \log \max\{||M(1,\omega)||, ||M(1,\omega)^{-1}||\}$$

Daí,

$$\int_\Omega d(I, U(1,\omega))d\mu \leq 2\sqrt{k} \int_\Omega \log \max\{||M(1,\omega)||, ||M(1,\omega)^{-1}||\} < \infty.$$

Prova do Teorema

Prova do Teorema de Oseledets

Aplicando o Teorema de Karlsson-Margulis ao cociclo de isometrias U no ponto $Q = I \in Pos_k$ temos que:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} d(I, Q_n(\omega)) = 0$ para quase todo $\omega \in \Omega$;
- Para quase todo $\omega \in \Omega$, existe uma geodésica P^{2t} com $P(\omega) \in Pos_k$ tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} d(P^{2n}, Q_n(\omega)) = 0$.

Prova do Teorema de Oseledets

Aplicando o Teorema de Karlsson-Margulis ao cociclo de isometrias U no ponto $Q = I \in Pos_k$ temos que:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} d(I, Q_n(\omega)) = 0$ para quase todo $\omega \in \Omega$;
- Para quase todo $\omega \in \Omega$, existe uma geodésica P^{2t} com $P(\omega) \in Pos_k$ tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} d(P^{2n}, Q_n(\omega)) = 0$.

Sejam $\mu_1 > \ldots > \mu_l > 0$ os autovalores distintos de P e definimos $\lambda_i = \log \mu_i$. Do teorema de K-M, as funções λ_i's são mensuráveis em ω. Mostraremos que essas funções são invariantes por T.

Seja ω tal que existem as matrizes positivas A e B satisfazendo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} d(A^{2n}, Q_n(\omega)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} d(B^{2n}, Q_n(\omega)) = 0.$$

Prova do Teorema de Oseledets

Seja ω tal que existem as matrizes positivas A e B satisfazendo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} d(A^{2n}, Q_n(\omega)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} d(B^{2n}, Q_n(\omega)) = 0.$$

Executando algumas contas é possível mostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} d(A^{2n}, [M(1, w)]B^{2n}) = 0$$

Seja ω tal que existem as matrizes positivas A e B satisfazendo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} d(A^{2n}, Q_n(\omega)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} d(B^{2n}, Q_n(\omega)) = 0.$$

Executando algumas contas é possível mostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} d(A^{2n}, [M(1, w)]B^{2n}) = 0$$

Por um lema mais técnico, sabemos que as matrizes A e B são conjugadas e possuem mesmos autovalores. Logo, $\lambda_i(\omega) = \lambda_i(T\omega)$.

Prova do Teorema de Oseledets

Definimos $V_i = W_i \oplus \ldots \oplus W_l$ e $V_{l+1} = \{0\}$ Dado $v \in \mathbb{R}^k$ com $v \in V_{i_0} \setminus V_{i_0+1}$ podemos escrever $v = v_{i_0} + \sum_{i>i_0} v_i$.

Lema

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log ||M(n,w)v|| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log ||P^n v||$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{||M(n,w)v||}{v} = \lambda_{i_0} + \lim_{n\to\infty} \log \frac{v_{i_0} + \sum_{i>i_0} \left(\frac{\mu_i}{\mu_{i_0}}\right)^n v_i}{||v||}.$$