Espaços métricas hiperholicos au gromov

Eric Cabezas // Fabian Loaiza

Minicurso: Fronteras de Martin y grupos hiperbólicos

28 de fevereiro de 2023

Seja (X, d) um espaço métrico

Definição(Produto de Gromov)

$$(y, z)_x = \frac{1}{2}(d(y, x) + d(z, x) - d(z, y))$$

$$0 \leq (y, z)_x \leq \min\{d(y, x), d(z, x)\}$$

Proposição

Sejam x, y, z trés pontos de um espaço métrico, existe um tripé T e uma isometria $f : \{x, y, z\} \to T$ da imagem das três extremidades do tripé. Adicionalmente $(y, z)_x$ é a longitude do arco de T cuja extremidade é a imagem de x.

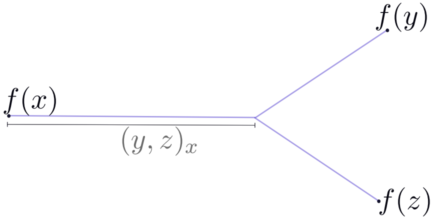


Figura: Tripé associado

Definição

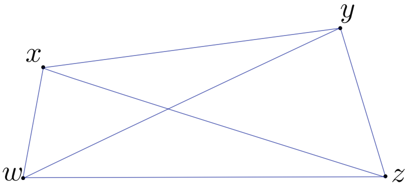
Seja δ um número não negativo. Dizemos que um espaço métrico X é δ-hiperbólico se

$$(x,z)_w \geq \min_{y \in X}\{(x,y)_w, (y,z)_w\} - \delta$$

para todo $w, x, y, z \in X$.

Reformulação:

$|x-z| + |y-w| \leq \max\{|x-y| + |z-w|, |x-w| + |z-y|\} + 2\delta.$



Em $\mathbb{R}^2$, o produto de Gromov para pontos vértices de um triângulo isósceles é da forma:

$$(x, y)_w = \frac{1}{2}(2a - b) = a - \frac{b}{2}.$$

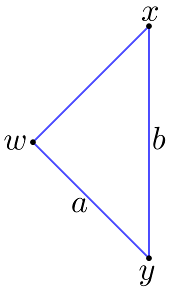


Figura: Triângulo isósceles em $\mathbb{R}^2$.

O espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ não é hiperbólico.

Tome quatro pontos $w, x, y, z \in \mathbb{R}^2$ como sendo os vértices de um quadrilátero como na Figura.

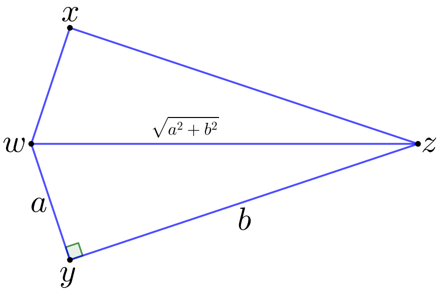


Figura: Quadrilátero em $\mathbb{R}^2$.

$$(x,z)_w = (y,z)_w = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2+b^2} - b) > \frac{a}{2}.$$

Quando $a \to \infty$, temos $(x,z)_w \to \infty$, $(y,z)_w \to \infty$ e $(x,y)_w \to 0$.

Árvores métricos.

Definição

Um **grafo** é uma tripla (V, E, l) onde V é um conjunto não vazio, $E \subseteq V \times V \setminus \{(x, x) : x \in V\}$ e $l : E \to (0, \infty)$ tais que E e l são invariantes pelo mapa $(x, y) \mapsto (y, x)$.

Um grafo é **conexo** se para quaisquer $x, y \in V$, existe uma sequencia $x = v_0, v_1, ..., v_n = y$ tal que $(v_i, v_{i+1}) \in E$ para $i = 0, ..., n-1$. Se o grafo é conexo, definimos a **métrica caminho** em V por

$$d_{E,l}(x, y) := \inf \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} l(v_i, v_{i+1}) \right\}.$$

Um **ciclo** em um grafo é uma sequencia finita $v_0, ..., v_n \in V$, $n \geq 2$, tal que $(v_0, v_1), (v_1, v_2), ..., (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_0) \in E$.

Definição

Uma **árvore** $T = (V, E, l)$ é um grafo conexo sem ciclos.

A **realização geométrica** de um grafo é o espaço métrico

$$X := \left(V \cup \bigcup_{(v,w)\in E} [0, l(v,w)] \right) / \sim$$

onde $\sim$ representa as identificações:

$$\begin{aligned} v &\sim ((v,w),0) \\ ((v,w),t) &\sim ((w,v), l(v,w)-t) \quad \forall (v,w) \in E\ \forall t \in [0, l(v,w)]. \end{aligned}$$

E a métrica d em X dada por

$$\begin{aligned} d \quad & (((v_0,v_1),t),((w_0,w_1),s)) := \\ & \min_{i,j\{0,1\}} \{|t - il(v_0,v_1)| + d(v_i,w_j) + |s - jl(w_0,w_1)|\}. \end{aligned}$$

Observação: Um grafo conexo é um espaço métrico e a realização geométrica de um grafo é um espaço métrico geodésico.

Definição

Uma **árvore métrica** é a realização geométrica de uma árvore.

Exemplo: (O grafo de Cayley de um grupo). Seja G um grupo e $E_0 \subseteq G$ um conjunto gerador finito com $E_0 = E_0^{-1}$. O **grafo de Cayley** de G com respeito ao conjunto E_0 é o grafo (G, E), onde

$$(a, b) \in E \Leftrightarrow a^{-1}b \in E_0.$$

Se $l_0 : E_0 \to (0, \infty)$ satisfaz $l_0(a^{-1}) = l_0(a)$, o grafo (ponderado) de Cayley de G com respeito a (E_0, l_0) é o grafo (G, E, l), onde

$$l(a, b) := l_0(a^{-1}b).$$

A métrica $d_{E,l}$ de um grafo de Cayley é chamada **métrica de Cayley**.

Se $\mathbb{F}_2(\mathbb{Z})$ denota o grupo livre de dois elementos a, b. Considere o conjunto $E_0 = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$. A realização geométrica do grafo de Cayley de $\mathbb{F}_2(\mathbb{Z})$ com respeito a E_0 é uma árvore métrica.

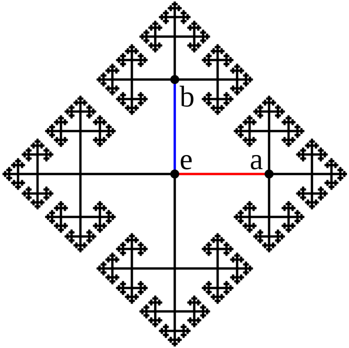


Figura: Realização geométrica do grafo de Cayley de $\mathbb{F}_2(\mathbb{Z})$.

Considere o conjunto $V = \{C, p, q, r\}$ e fixe $l_p, l_q, l_r > 0$. Sejam

$$E := \{(C, x), (x, C) : x = p, q, r\} \text{ e } l(C, x) := l(x, C) = l_x.$$

A realização geométrica do grafo (V, E, l) é uma árvore métrica. Denotado por $\Delta(p, q, r)$ e chamado de **árvore triangular** ou **tripé**.

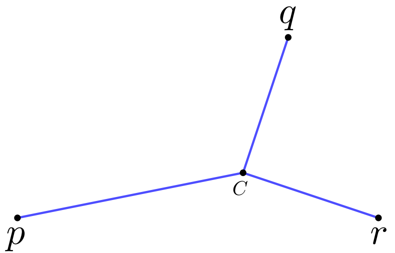


Figura: Triângulo geodésico em uma $\mathbb{R}$-árvore.

Definição

Um espaço métrico X é uma $\mathbb{R}$-**árvore** se para quaisquer $x, y, z \in X$ existe um tripé $\Delta(p, q, r)$ e uma imersão isométrica $i : \Delta \to X$ que associada p, q, r com x, y, z respectivamente.

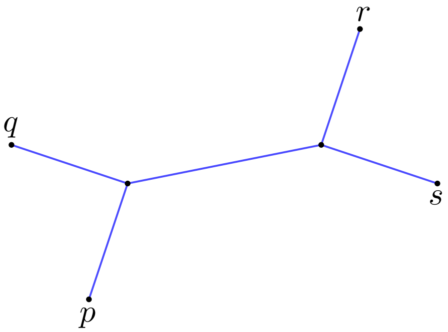


Figura: Quadrilátero em uma $\mathbb{R}$-árvore.

Proposição: Cada árvore métrico é uma $\mathbb{R}$-árvore.

Seja $\Delta = \Delta(p,q,r)$ um triângulo geodésico em um espaço métrico X. Um triângulo $\overline{\Delta} = \Delta(\overline{p},\overline{q},\overline{r})$ em $\mathbb{H}^2$ é chamado um **triângulo de comparação** para Δ se

$$d(\overline{p},\overline{q}) = d(p,q), \quad d(\overline{q},\overline{r}) = d(q,r) \ \text{ e } \ d(\overline{p},\overline{r}) = d(p,r).$$

Qualquer triângulo admite um triângulo de comparação, único sub isometria. Para qualquer ponto $x \in [p,q]$, definimos um **ponto de comparação** $\overline{x} \in [\overline{p},\overline{q}]$ como sendo o único ponto em $\overline{\Delta}$ tal que

$$d(\overline{x},\overline{p}) = d(x,p) \ \text{ e } \ d(\overline{x},\overline{q}) = d(x,q).$$

Um triângulo geodésico Δ satisfaz a **desigualdade CAT**(-1) se para quaisquer $x,y \in \Delta$,

$$d(x,y) \leq d(\overline{x},\overline{y}).$$

Definição

Um **espaço CAT(-1)** é um espaço métrico geodésico tal que todo triângulo geodésico satisfaz a desigualdade CAT(-1).

Exemplos:

- Uma variedade Riemanniana com curvatura seccional limitada superiormente por -1 é um espaço CAT(-1).
- Um espaço algebraico hiperbólico é um espaço CAT(-1).
- Uma $\mathbb{R}$-árvore é CAT(-1).

Proposição: Um espaço CAT(-1) é Gromov hiperbólico. De fato, se X é um espaço CAT(-1) então para quaisquer quatro pontos $x, y, z, w \in X$, temos

$$e^{-(x,z)_w} \leq e^{-(x,y)_w} + e^{-(y,z)_w}.$$

Portanto, a desigualdade da definição de δ-hiperbólico vale para a constante $\delta = \log 2$.

$\mathbb{R}$-árvore $\Rightarrow$ CAT(-1) $\Rightarrow$ Fortemente hiperbólico $\Rightarrow$ Hiperbólico.

Aproximação por árvores

Teorema:

Seja X um espaço δ-hiperbólico e k um inteiro positivo. Dado um conjunto finito F com $|F| \leq 2^k + 2$, fixe um ponto base $w \in F$. Existem uma árvore métrica T e uma aplicação $\phi : F \to T$ tal que

- $d(\phi(x), \phi(w)) = d(x, w) \ \forall x \in X$.
- $d(x, y) - 2k\delta \leq d(\phi(x), \phi(y)) \leq d(x, y) \ \forall x, y \in X$.

Arvores δ-finos

Dado um número real $\delta \geq 0$, dizemos que o triângulo Δ é δ-*fino* se

$$|u - v| \leq \delta \text{ para todo } u, v \in \Delta \text{ com } f_\Delta(u) = f_\Delta(v).$$

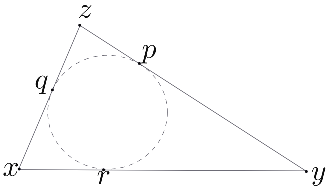
Uma condição equivalente: $|u - v| \leq |f_\Delta(u) - f_\Delta(v)| + \delta$ para todo $u, v \in \Delta$.

Lema

Seja $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$ um triangulo geodésico em um espaço métrico X, onde d denota a distancia em X.

- $(y, z)_x \leq d(x, [y, z])$,
- Se adicionalmente Δ é δ-fino, então $d(x, [y, z]) \leq (y, z)_x + \delta$.

Prova:



Seja p, q, r tal que $f(p) = f(q) = f(r) = c$,

$$|q - x| = |r - x| = (y, z)_x$$

Dado $w \in [y, z]$ tal que $|w - x| = d(x, [y, z])$, além disso seja $w' \in [x, y] \cup [x, z]$ tal que $f(w) = f(w')$, sem perda de geralidade $w' \in [z, x]$

$$(y, z)_x \leq |w' - x| = |z - x| - |z - w| \leq |x - w| = d(x, [y, z])$$

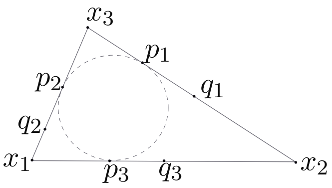
$$d(x, [y, z]) \leq d(x, q) + d(q, p) \leq (y, z)_x + \delta$$

Definição

Chamamos triplo inscrito de Δ ao imagem inversa por f_Δ do centro do tripé, e o tamanho de Δ el diâmetro do triplo inscrito. Chamamos tamanho mínimo ou malha de Δ o mínimo de diâmetros da configuração $\{u, v, w\}$ com $u \in [y, z]$, $v \in [z, x]$, $w \in [x, y]$.

Proposição

Seja $\Delta = [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_1]$ um triangulo geodésico de malha δ e tamanho δ'. Então $\delta \leq \delta' \leq 4\delta$.



Prova: Defina p_1, p_2, p_3 pontos do triplo inscrito de Δ e $\delta =$diam$\{q_1, q_2, q_3\}$.
Seja (i, j, k) uma permutação de $(1, 2, 3)$. Considere

$$a_i = |x_j - x_k| \;\; b_{i,k} = |p_i - x_k| \;\; c_{i,k} = |q_i - x_k|$$

Adicionalmente:

$$b_{i,k} = b_{j,k} = \frac{1}{2}(a_i + a_j - a_k)$$

$$b_{i,j} + b_{i,k} = c_{i,j} + c_{i,k} = a_i$$

por definição. Pela desigualdade triangular $|c_{i,k} - c_{j,k}| \leq \delta$, pois $|q_i - q_j| \leq \delta$. Aplicando sucessivamente

$$2b_{i,k} = a_i + a_j - a_k = c_{i,j} + c_{i,k} + b_{j,i} + b_{j,k} - c_{k,i} - c_{k,j}$$

$$c_{i,j} + c_{i,k} + b_{k,i} - b_{i,k} - c_{k,i} - c_{k,j} = 0$$

$$|c_{i,k} - b_{i,k} - c_{k,i} + b_{k,i}| = |c_{i,j} - c_{k,j}| \leq \delta$$

Supondo que (i, j, k) é uma permutação circular de $(1, 2, 3)$, defina

$$d_i = c_{i,j} - b_{i,j} = -(c_{i,k} - b_{i,k})$$

Por uma parte $|d_i| = |p_i - q_i|$, pelas desigualdades anteriores se obtém mediante permutações circulares:

$$|-d_i - d_k| \leq \delta, \ |-d_j - d_i| \leq \delta, \ |-d_k - d_j| \leq \delta$$

$$|d_i| = \frac{1}{2}|d_i + d_j + d_i + d_k - d_j - d_k| \leq \frac{3}{2}\delta$$

Finalmente,

$$|p_j - p_k| \leq |p_j - q_j| + |q_j - q_k| + |q_k - p_k| \leq 4\delta$$

Equivalências

Proposição

Seja X um espaço métrico geodésico. Considere as seguintes propriedades para X, δ é um número real positivo

- (P_1, δ) O espaço X é δ-hiperbólico,
- (P_2, δ) Todos os triângulos geodésicos de X são δ-finos,
- (P_3, δ) o espaço X satisfaz a condição de Rips de constante δ
- (P_4, δ) Todo triangulo geodésico de X tem um tamanho menor a δ,
- (P_5, δ) Todo triangulo geodésico de X tem uma malha de tamanho menor a δ.

Então salvo pequena mudanças de constantes todos os itens anteriores são equivalentes.

Equivalências

Mas precisamente, para todo $i, j \in \{1, ..., 5\}$, existe uma constante c_{ij} com $1 \leq c_{i,j} \leq 4$ tal que a seguinte afirmação é verdadeira:

Sejam $\delta, \delta' \geq 0$ com $\delta' = c_{ij}\delta$; se X verifica (P_i, δ) X também verifica (P_j, δ').

condição de Rips

para todo triangulo geodésico $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$ de X e para todo $u \in [x, y]$, temos $d(u, [y, z] \cup [z, x]) \leq \delta$,

corolário

O disco de Poincaré D^2 é um espaço hiperbólico.

Prova: Seja δ o diâmetro do disco dentro de D^2 de área π. A formula de Gauss-Bonnet mostra que a área de todo triangulo geodésico Δ de D^2 é maiorado por π. Assim, o diâmetro do círculo inscrito de tal triângulo é limitado por δ, por tanto Δ é δ-fino.

Bibliografia

- Hyperbolic groups, E. Ghys, P. de la Harpe, Progress in mathematics,1990
- Geometry and dynamics in Gromov hyperbolic metric spaces, T. Das, D. Simmons, M. Urbanski, 2016