



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS FINANCEIRAS

Ricardo Cunha Pedroso

2015



ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS FINANCEIRAS

Ricardo Cunha Pedroso

Projeto Final de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Métodos Estatísticos do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Bacharel em Estatística.

Orientador: Ralph dos Santos Silva

Rio de Janeiro, 5 de outubro de 2015.

ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS FINANCEIRAS

Ricardo Cunha Pedroso

Orientador: Ralph dos Santos Silva

Projeto Final de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Métodos Estatísticos do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Bacharel em Estatística.

Prof. Ralph dos Santos Silva

IM-UFRJ

Prof. Marina Silva Paez

IM-UFRJ

Prof. Carlos Antonio Abanto-Valle

IM-UFRJ

Rio de Janeiro, 5 de outubro de 2015.

Pedroso, Ricardo Cunha

Análise de Séries Temporais Financeiras / Ricardo Cunha Pedroso
- Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2015.

vi, 26f.: il.; 31cm.

Orientador: Ralph dos Santos Silva

Projeto Final - UFRJ/IM / Graduação em Estatística, 2015.

Referências Bibliográficas: f.25-26.

1. Séries Financeiras. 2. Modelos GARCH. I. Silva, Ralph dos Santos. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática. III. Análise de Séries Temporais Financeiras.

RESUMO

ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS FINANCEIRAS

Ricardo Cunha Pedroso

Orientador: Ralph dos Santos Silva

Neste trabalho foram modelados retornos financeiros de ativos do mercado brasileiro utilizando-se os modelos GARCH com erros aleatórios normais, t -Student, suas versões assimétricas e também a normal inversa gaussiana. As quantidades desconhecidas do modelo foram estimadas pelo método de máxima verossimilhança, com auxílio do programa R e alguns de seus pacotes. Nas análises, foi determinado o melhor ajuste pelo critério de informação de Akaike e prosseguiu-se com a verificação das hipóteses do modelo com melhor ajuste.

Palavras-chave: Retornos Financeiros; Modelos GARCH.

AGRADECIMENTOS

AO MEU ORIENTADOR RALPH DOS SANTOS
SILVA; E

A TODOS OS PROFESSORES DO
DME/IM/UFRJ.

SUMÁRIO

Lista de Tabelas	iii
Lista de Figuras	iv
Capítulo 1: Introdução	1
Capítulo 2: Referencial Teórico	2
2.1 Série Temporal	2
2.2 Função de Autocovariância e Função de Autocorrelação	2
2.3 Estacionariedade	2
2.4 Heteroscedasticidade	3
2.5 Retornos Financeiros	3
2.6 Distribuição Normal	3
2.7 Distribuição t -Student	3
2.8 Distribuição Normal Inversa Gaussiana	4
2.9 Testes de normalidade	4
2.9.1 Teste de Shapiro-Wilk	4
2.9.2 Teste de Jarque-Bera	4
2.10 Distribuições Assimétricas	5
2.11 Modelos ARMA	5
2.12 Modelos ARCH e GARCH	6
2.13 Estimação por Máxima Verossimilhança	7
2.14 Critérios de seleção de modelos	7
2.14.1 Critério de Informação de Akaike - AIC	7
2.14.2 Critério de Informação Bayesiano - BIC	8
Capítulo 3: Análise Exploratória dos Dados	9
3.1 Séries Financeiras	9
3.2 Análise das séries de preços e log-retornos (r_t) dos ativos	10

3.3	Análise de dependência dos log-retornos	10
Capítulo 4:	Modelagem e resultados	18
Capítulo 5:	Considerações Finais	24
	Referências Bibliográficas	25

LISTA DE TABELAS

3.1	Estatísticas básicas dos log-retornos	14
4.1	Critérios de seleção AIC e BIC - BBAS3	19
4.2	Critérios de seleção AIC e BIC - BBDC4	19
4.3	Critérios de seleção AIC e BIC - GGBR4	20
4.4	Critérios de seleção AIC e BIC - PETR4	20
4.5	Critérios de seleção AIC e BIC - USIM5	21
4.6	Critérios de seleção AIC e BIC - VALE5	21
4.7	Parâmetros estimados do modelo GARCH(1,1) para as séries de log-retornos	21
4.8	Testes de Ljung-Box para o modelo GARCH(1,1) dos log-retornos do ativo BBAS3	22
4.9	Testes de Ljung-Box para o modelo GARCH(1,1) dos log-retornos do ativo BBDC4	22
4.10	Testes de Ljung-Box para o modelo GARCH(1,1) dos log-retornos do ativo GGBR4	22
4.11	Testes de Ljung-Box para o modelo GARCH(1,1) dos log-retornos do ativo PETR4	22
4.12	Testes de Ljung-Box para o modelo GARCH(1,1) dos log-retornos do ativo USIM5	23
4.13	Testes de Ljung-Box para o modelo GARCH(1,1) dos log-retornos do ativo VALE5	23

LISTA DE FIGURAS

3.1	Séries de preços dos ativos	11
3.2	Séries dos log-retornos dos ativos	12
3.3	Histogramas dos log-retornos	13
3.4	Funções ACF dos log-retornos	15
3.5	Funções ACF dos quadrados dos log-retornos	16
3.6	Funções ACF dos módulos dos log-retornos	17

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste estudo é modelar a variância condicional (volatilidade) de séries de retornos financeiros que apresentam a variância condicional evoluindo no tempo. O retorno de um ativo é um resumo completo e de escala livre da oportunidade de investimento.

Foram utilizadas séries de preços de seis ativos de alta liquidez negociados na BM&FBOVESPA (www.bmfbovespa.com.br).

Foi utilizado o modelo GARCH (Bollerslev, 1986), que é uma generalização da classe de modelos ARCH (Engle, 1982).

Capítulo 2

REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Série Temporal

Seja T um conjunto arbitrário. Um Processo Estocástico é uma família $Z = \{Z(t), t \in T\}$, tal que para cada $t \in T$, $Z(t)$ é uma variável aleatória. O conjunto T é normalmente o conjunto dos números inteiros ou dos números reais.

Série Temporal é uma realização ou trajetória de um processo estocástico.

2.2 Função de Autocovariância e Função de Autocorrelação

A função de autocovariância (ACVF) de defasagem k de uma série temporal $\{X_t\}$ é definida por

$$\gamma_k = E[(X_t - E[X_t])(X_{t+k} - E[X_{t+k}])].$$

A função de autocorrelação (ACF) de defasagem k é definida por

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0},$$

sendo γ_0 a variância do processo gerador da série temporal e $\rho_0 = 1$.

2.3 Estacionariedade

Uma série temporal $\{X_t\}$ é dita estritamente estacionária se as distribuições de X_t permanecem as mesmas para todo t . Logo, temos média e variância constantes ao longo do tempo.

Uma série é dita estacionária de segunda ordem se além da média e variância serem constantes, a função de autocovariância entre dois instantes de tempo é uma função da distância entre eles, isto é, depende apenas da defasagem no tempo.

2.4 Heteroscedasticidade

Uma série temporal possui heteroscedasticidade quando sua variância condicional varia ao longo do tempo.

2.5 Retornos Financeiros

Para avaliação de riscos de um ativo financeiro, frequentemente é utilizada a série de variações (diárias, semanais, mensais, etc) dos preços desse ativo. Seja P_t o preço de um ativo no instante t . A variação de preços entre os instantes P_t e P_{t-1} é dada por $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$ e a variação relativa de P_t , também chamada de log-retorno de P_t , é definida como $r_t = \Delta \log P_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}}$.

2.6 Distribuição Normal

Uma variável aleatória tem distribuição Normal se sua função de densidade de probabilidade é dada por

$$f(x | \mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2 \right\}, x \in \mathbb{R}$$

com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$. Quando $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$ a distribuição é denominada Normal Padrão.

2.7 Distribuição t -Student

Dada uma amostra aleatória simples de tamanho n de uma população normal com média μ e desvio padrão σ , seja \bar{x} a média amostral e s o desvio padrão amostral. A quantidade

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

possui distribuição t -Student com $n - 1$ graus de liberdade.

A função de densidade de probabilidade da distribuição t -Student é dada por

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(n\pi)^{1/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, x \in \mathbb{R}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

2.8 Distribuição Normal Inversa Gaussiana

A função de densidade da distribuição Normal Inversa Gaussiana é definida por

$$f(x | \alpha, \beta, \mu, \delta) = \frac{\alpha}{\pi} \exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \beta\mu\right) \frac{K_1\left(\alpha\delta\sqrt{1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}} \exp(\beta x)$$

onde $x \in R$, $\alpha > 0$, $\delta > 0$, $\mu \in R$, $0 < |\beta| < \alpha$ e $K_1(\cdot)$ é a função de Bessel modificada do terceiro tipo, com índice 1 (Abramowitz & Stegun, 1972). A distribuição Normal de média μ e variância σ^2 é obtida pelo caso limite quando $\beta = 0$, $\alpha \rightarrow \infty$ e $\delta/\alpha = \sigma^2$.

2.9 Testes de normalidade

2.9.1 Teste de Shapiro-Wilk

O teste de Shapiro-Wilk (Shapiro & Wilk, 1965) calcula uma estatística W que testa se uma amostra aleatória de tamanho n provém de uma distribuição normal. Valores pequenos de W são evidência de desvio de normalidade. A estatística W é calculada de acordo com a seguinte equação:

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

onde $x_{(i)}$ são os valores amostrais ordenados e a_i são constantes geradas das médias, variâncias e covariâncias das estatísticas de ordem de uma amostra aleatória de tamanho n de uma distribuição normal.

2.9.2 Teste de Jarque-Bera

Proposto por Jarque & Bera (1980), testa se uma amostra aleatória x_1, x_2, \dots, x_n provém de uma distribuição normal com base na diferença entre os coeficientes de assimetria e curtose da amostra. A estatística de teste é

$$JB = n \left(\frac{\alpha_3^2}{6} + \frac{(\alpha_4 - 3)^2}{24} \right),$$

onde

$$\alpha_3 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{ns^3},$$

$$\alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{ns^4},$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

Se a amostra provém de uma distribuição Normal, a estatística JB possui distribuição Qui-quadrado com dois graus de liberdade ($JB \sim \chi_2^2$)

2.10 Distribuições Assimétricas

Um método geral para transformar uma distribuição simétrica em assimétrica foi proposto por Fernandez & Steel (1998).

Considera-se uma função de densidade de probabilidade univariada $f(\cdot)$ unimodal e simétrica em torno de 0. Mais formalmente, assume-se que $f(s) = f(|s|)$ e $f(|s|)$ é decrescente em $|s|$. Então, temos a seguinte classe de distribuições assimétricas, indexadas por um escalar $\gamma \in (0, \infty)$:

$$f(x | \gamma) = \frac{2}{\gamma + \frac{1}{\gamma}} \left\{ f\left(\frac{x}{\gamma}\right) I_{[0, \infty)}(x) + f(\gamma x) I_{(-\infty, 0)}(x) \right\}. \quad (2.1)$$

A ideia básica da equação 2.1 é a introdução de fatores de escala inversos nos eixos positivo e negativo. $f(x | \gamma)$ mantém sua moda em 0 mas perde simetria quando $\gamma \neq 1$.

Usando (2.1), a versão assimétrica da distribuição Normal fica definida por

$$f(x | \mu, \sigma^2, \gamma) = \frac{2}{\gamma + \frac{1}{\gamma}} \left\{ (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{x}{\gamma} - \mu\right)^2\right\} I_{[0, \infty)}(x) \right. \\ \left. + (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (\gamma x - \mu)^2\right\} I_{(-\infty, 0)}(x) \right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.11 Modelos ARMA

Os modelos ARMA (modelos autoregressivos e de médias móveis) formam uma classe de modelos muito uteis e parcimoniosos para descrever dados de séries temporais. O modelo ARMA(p, q) é dado por

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + \epsilon_t + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \beta_q \epsilon_{t-q}$$

onde ϵ_t é um processo puramente aleatório com média zero e variância σ_ϵ^2 .

2.12 Modelos ARCH e GARCH

A classe de modelos ARCH (modelos autoregressivos com heteroscedasticidade condicional) é uma classe de modelos não-lineares apropriados para séries financeiras que apresentam a variância condicional evoluindo no tempo. Esses modelos assumem que a variância da série num determinado instante de tempo t depende dos quadrados dos erros passados $\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots$, através de uma autoregressão.

Um modelo ARCH(p) é definido por

$$X_t = \sqrt{h_t} \epsilon_t$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{t-p}^2$$

onde ϵ_t é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) com média zero e variância um, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i > 0$. Na prática, é comum assumirmos $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ ou $\epsilon_t \sim t_\nu$.

Os modelos GARCH são uma generalização dos modelos ARCH ("generalized ARCH"). Um modelo GARCH(r, s) é definido por

$$X_t = \sqrt{h_t} \epsilon_t$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j h_{t-j}$$

onde ϵ_t é iid (0,1), $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $\sum_{i=1}^q (\alpha_i + \beta_i) < 1$, $q = \max(r, s)$. Assim como no caso dos modelos ARCH, usualmente supomos que os ϵ_t seguem uma distribuição normal padrão ou uma distribuição t -Student.

Esses modelos assumem que a variância condicional se comporta como um processo ARMA, isto é, depende também dos seus valores passados. Sua vantagem sobre os modelos ARCH é a parcimônia, isto é, um modelo GARCH pode ser usado para descrever a volatilidade com menos parâmetros do que os modelos ARCH.

Um modelo bastante usado na prática é o GARCH(1,1), para o qual a volatilidade é expressa por

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}.$$

2.13 Estimação por Máxima Verossimilhança

Estimação por Máxima Verossimilhança é um método de estimação amplamente difundido, que tende a dar estimativas mais eficientes que outros métodos. Os parâmetros dos modelos ARMA e GARCH de séries temporais são usualmente estimados por máxima verossimilhança.

Seja $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^t$ e $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_n)^t$ um vetor de parâmetros, e seja $f(Y | \Theta)$ a densidade de Y , que depende de Θ .

A função $L(\Theta) = f(Y | \Theta)$ vista como uma função de teta com Y fixo nos valores observados é chamada de função de verossimilhança. O estimador de máxima verossimilhança (EMV) é o valor de Θ que maximiza essa função, ou seja, é o valor de Θ onde a verossimilhança dos dados é maior.

Muitas vezes é mais fácil matematicamente maximizar $\log L(\Theta)$, que é equivalente a maximizar $L(\Theta)$ dado que a função \log é crescente. Se os dados são independentes, então a função de verossimilhança é o produto das densidades marginais, e produtos são normalmente difíceis de se derivar. Tirando o seu logaritmo, transforma-se o produto numa soma, mais fácil de se derivar.

2.14 Critérios de seleção de modelos

Em muitas aplicações, vários modelos podem ser julgados adequados em termos do comportamento dos resíduos. Uma forma de “discriminar” entre estes modelos competidores é utilizar os chamados critérios de informação, que levam em conta não apenas a qualidade do ajuste mas também penalizam a inclusão de parâmetros extras. Assim, um modelo com mais parâmetros pode ter um ajuste melhor mas não necessariamente será preferível em termos de critério de informação.

A regra básica consiste em selecionar o modelo cujo critério de informação calculado seja mínimo.

2.14.1 Critério de Informação de Akaike - AIC

Um critério muito utilizado em séries temporais é o chamado critério de informação de Akaike, denotado por AIC. A definição mais comumente utilizada é

$$AIC = -2 \log [L(\hat{\theta})] + 2m$$

onde m é o número de parâmetros e $L(\hat{\theta})$ é a função de máxima verossimilhança.

Para dados normalmente distribuídos e estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros, temos que

$$AIC = n \log (\hat{\sigma}_\epsilon^2) + 2m$$

onde $\hat{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\epsilon}_t^2$.

2.14.2 Critério de Informação Bayesiano - BIC

O critério de informação Bayesiano, denotado por BIC é uma modificação do AIC, e é dado por

$$BIC = -2 \log [L(\hat{\theta})] + m \log n.$$

Notar que este critério penaliza bem mais a inclusão de parâmetros do que o AIC e tende, portanto, a selecionar modelos mais parcimoniosos.

Estas medidas não têm nenhum significado quando analisadas individualmente, isto é, considerando-se um único modelo. Assim, tanto o AIC quanto o BIC podem assumir valores quaisquer, inclusive valores negativos, já que eles dependem da forma da função de verossimilhança.

Ao se usar esses critérios para comparar modelos, a estimação precisa ser feita no mesmo período amostral, de modo que os modelos sejam comparáveis.

Capítulo 3

ANÁLISE EXPLORATÓRIA DOS DADOS

As séries temporais analisadas são os valores de fechamento diário, entre 2/1/2009 e 4/11/2014 (1.447 dias), de seis ativos financeiros de grande liquidez da BM&FBOVESPA:

- i BBAS3 - Banco do Brasil (Ação ordinária)
- ii BBDC4 - Bradesco (Ação preferencial)
- iii GGBR4 - Gerdau (Ação preferencial)
- iv PETR4 - Petrobras (Ação preferencial)
- v USIM5 - Usiminas (Ação preferencial classe A)
- vi VALE5 - Vale (Ação preferencial classe A)

3.1 Séries Financeiras

Séries de retornos financeiros apresentam em geral várias características comuns, entre as quais destacamos:

- a) São estacionárias.
- b) Apresentam média amostral próxima de zero.
- c) Apresentam distribuição (não condicional) aproximadamente simétrica, não normal, com excesso de curtose positivo.
- d) Apresentam ambas as caudas pesadas.
- e) Apresentam agrupamentos de volatilidade (heteroscedasticidade condicional).

- f) Apresentam alguma forma de não-linearidade (reagem de maneira diferente a choques grandes ou pequenos, ou a choques positivos ou negativos).
- g) São em geral não autocorrelacionados (quando há autocorrelação, é significativa apenas para as pequenas defasagens de tempo).
- h) Os quadrados dos retornos são autocorrelacionados para várias defasagens de tempo. São todas positivas e decaem lentamente.
- i) Apresentam memória longa na média e na volatilidade (decaimento lento da ACF amostral).

Algumas dessas características ficaram conhecidas como fatos estilizados, e serão observadas nas análises a seguir.

3.2 Análise das séries de preços e log-retornos (r_t) dos ativos

As séries dos preços de fechamento diário e dos log-retornos dos seis ativos em análise estão expostas nas figuras 3.1 e 3.2, respectivamente. Notar que todas as séries de log-retornos estão centradas em zero, e tanto a média quanto a variância parecem constantes ao longo do tempo e podemos, portanto, assumir estacionaridade de segunda ordem.

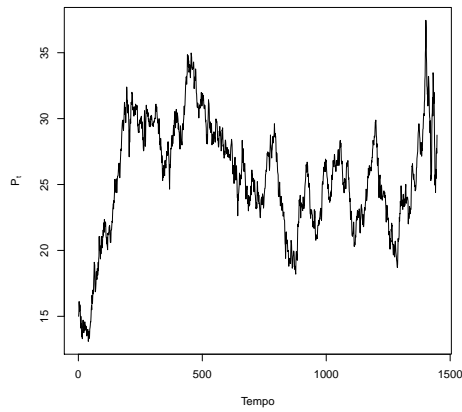
Na figura 3.3 encontram-se os histogramas dos log-retornos com a densidade normal estimada, onde se pode observar a presença de valores afastados da parte central das distribuições (caudas longas).

Na tabela 3.1 encontram-se as estatísticas básicas dos log-retornos e o valor da estatística de teste e p-valor do teste de normalidade proposto por Jarque & Bera (1980).

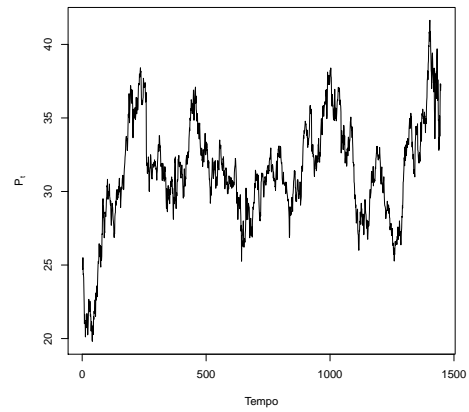
Os valores zerados dos p-valores do teste de normalidade, e os valores encontrados para o excesso de curtose e para assimetria nos permitem rejeitar a hipótese de que os log-retornos seguem uma distribuição Normal, o que muitas vezes é assumido em modelagem de retornos financeiros.

3.3 Análise de dependência dos log-retornos

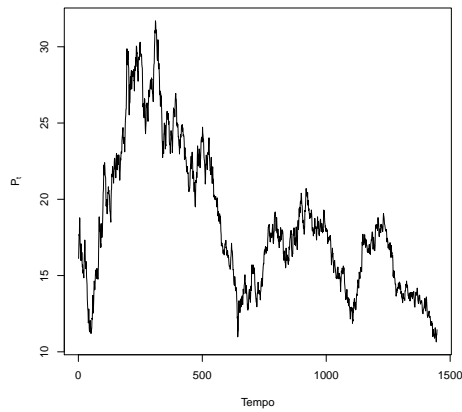
Calculamos as funções ACF dos log-retornos, do quadrado dos log-retornos e do módulo dos log-retornos, que podem ser vistas nas figuras 3.4, 3.5 e 3.6, respectivamente. Dessas figuras, pode-se observar que as estimativas das autocorrelações não são significativas para os log-retornos, mas



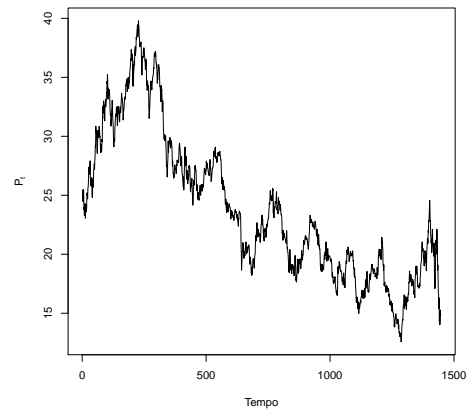
(a) BBAS3



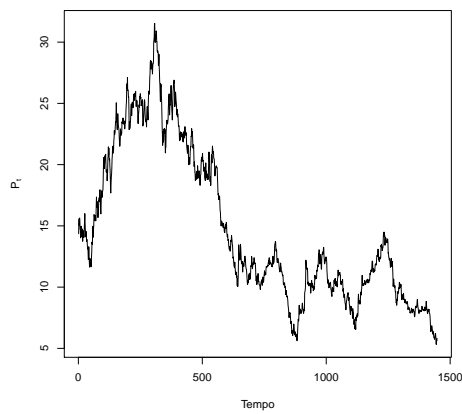
(b) BBDC4



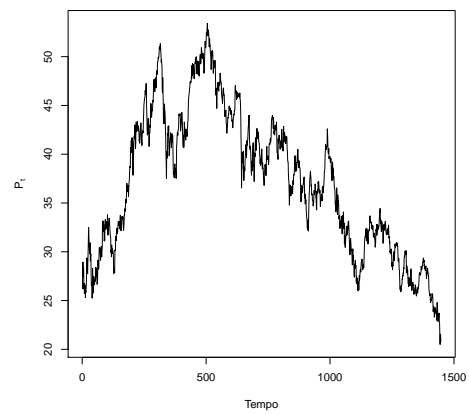
(c) GGBR4



(d) PETR4

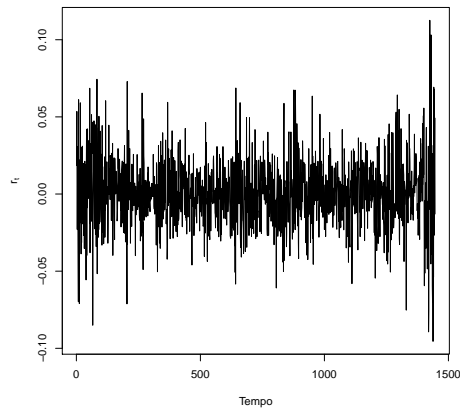


(e) USIM5

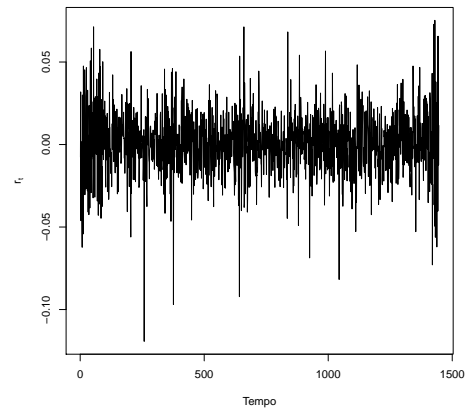


(f) VALE5

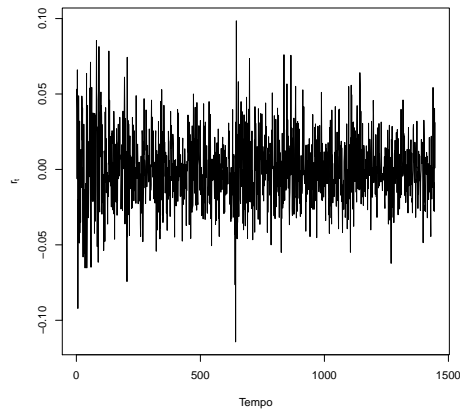
Figura 3.1: Comparação das séries de preços dos ativos.



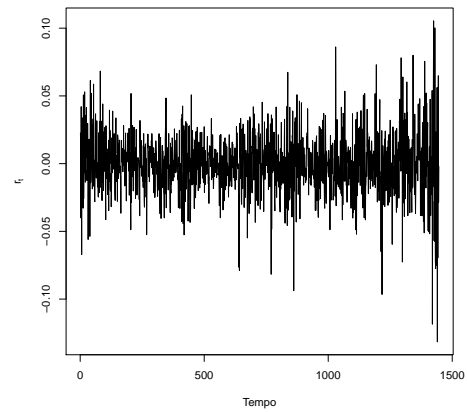
(a) BBAS3



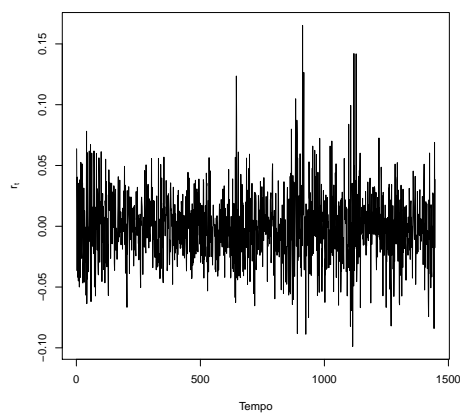
(b) BBDC4



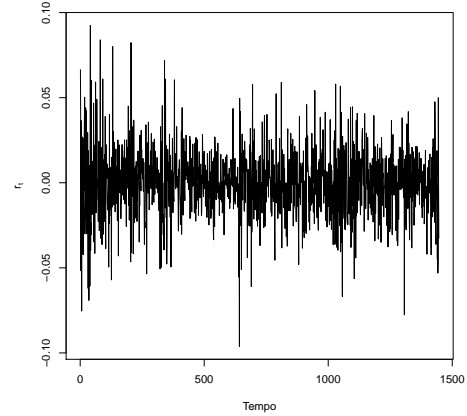
(c) GGBR4



(d) PETR4

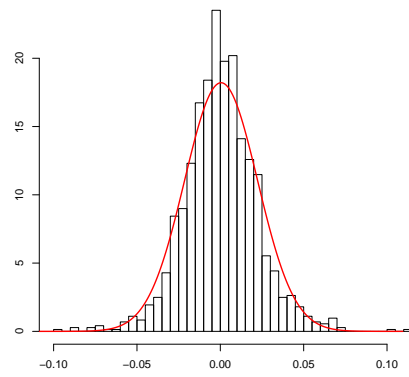


(e) USIM5

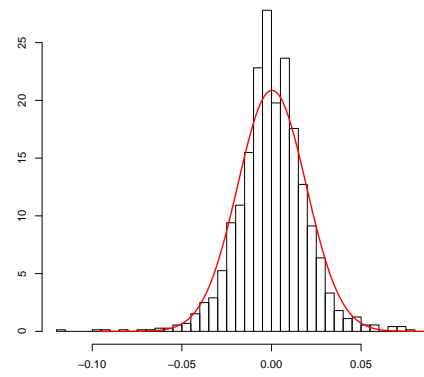


(f) VALE5

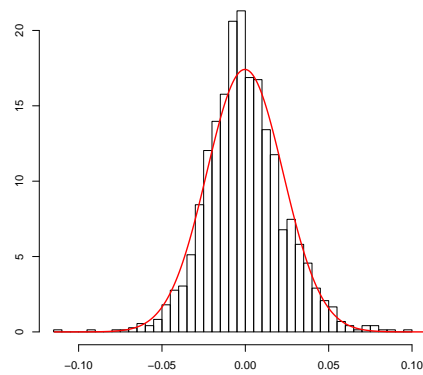
Figura 3.2: Comparação das séries dos log-retornos dos ativos.



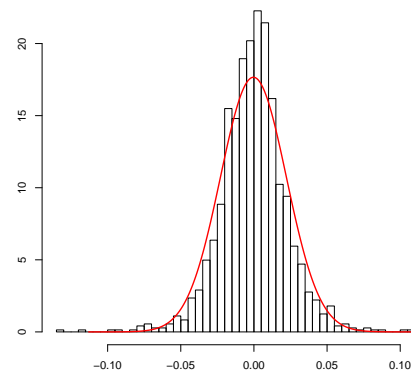
(a) BBAS3



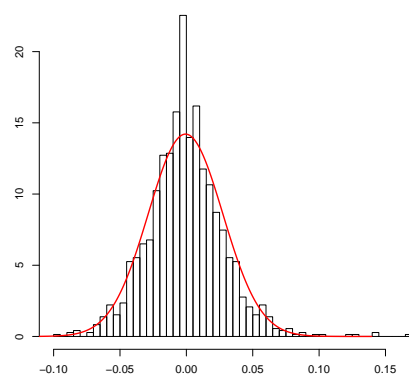
(b) BBDC4



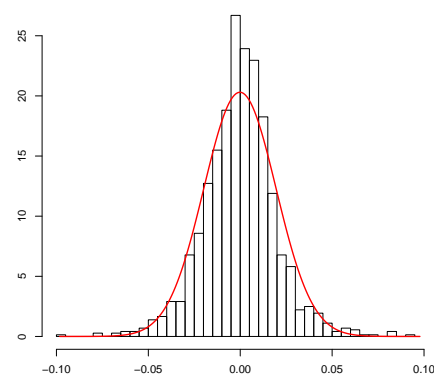
(c) GGBR4



(d) PETR4



(e) USIM5



(f) VALE5

Figura 3.3: Histogramas dos log-retornos com a densidade normal estimada.

Tabela 3.1: Estatísticas básicas dos log-retornos dos ativos.

Ativo	Média	D.P.	Mediana	Assimetria	Exc. Curtose	Estat. JB	p-valor JB
BBAS3	0,00045	0,02191	0,00000	0,12042	1,82745	206,2	<2,2e-16
BBDAC	0,00028	0,01911	0,00000	-0,24564	2,86009	510,2	<2,2e-16
GGBR4	-0,00024	0,02291	-0,00127	0,18297	1,15971	89,9	<2,2e-16
PETR4	-0,00035	0,02259	0,00029	-0,17872	2,85965	503,2	<2,2e-16
USIM5	-0,00062	0,02808	-0,00161	0,48521	2,37873	399,9	<2,2e-16
VALE5	0,00016	0,01965	0,00000	0,05972	2,06343	260,0	<2,2e-16

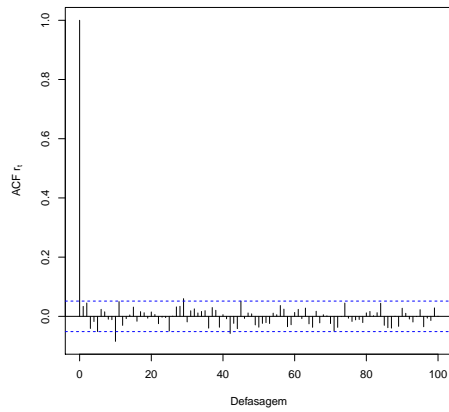
são significativas para os seus quadrados e seus módulos (e decaem lentamente), o que indica a existência de dependência temporal no segundo momento da distribuição dos log-retornos.

Uma forma de verificar se a série de log-retornos apresenta heteroscedasticidade condicional, conforme indicado pela análise ACF, é o teste de Ljung-Box para r_t . A estatística desse teste é dada por

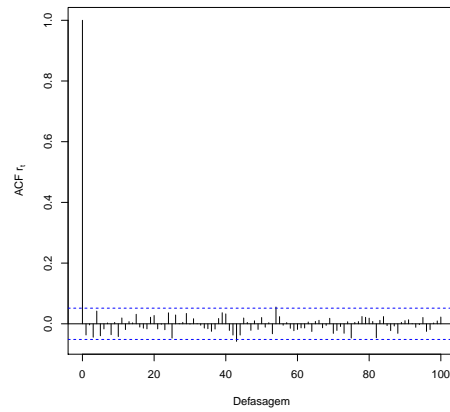
$$Q = n \sum_{k=1}^h r_k^2,$$

onde n é o número de observações e h é a defasagem máxima considerada. Se os log-retornos não são correlacionados, a estatística $Q \sim \chi_h^2$.

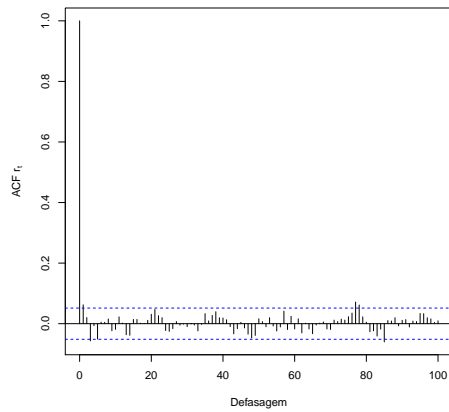
A aplicação desse teste para as séries de log-retornos e log-retornos ao quadrado dos ativos em estudo indicou que não há correlação entre os log-retornos mas há correlação temporal entre os quadrados dos log-retornos.



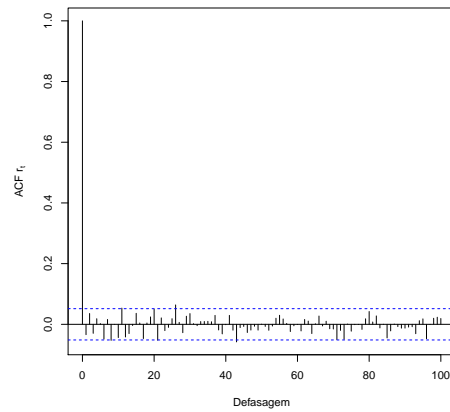
(a) BBAS3



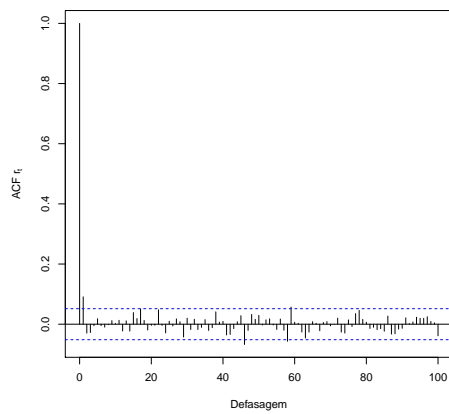
(b) BBDC4



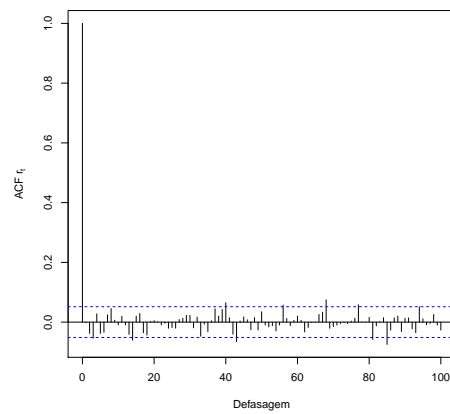
(c) GGBR4



(d) PETR4

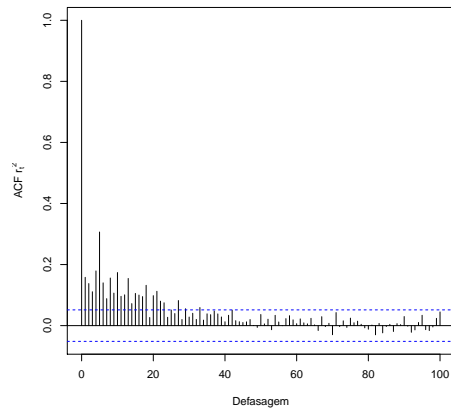


(e) USIM5

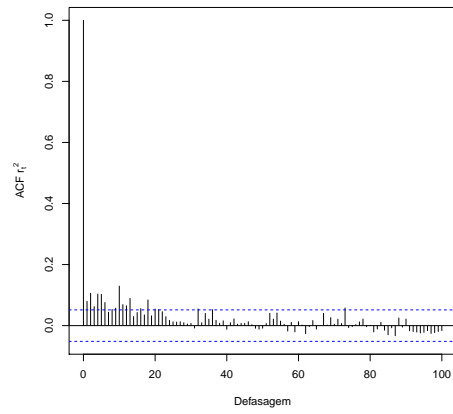


(f) VALE5

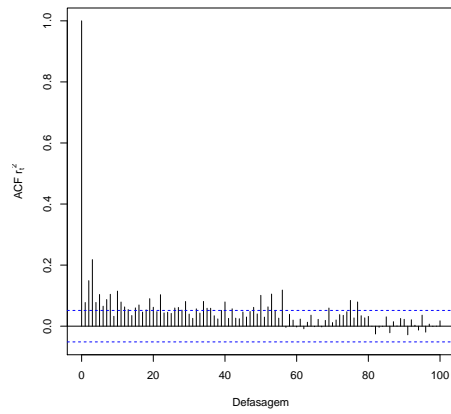
Figura 3.4: Funções ACF dos log-retornos.



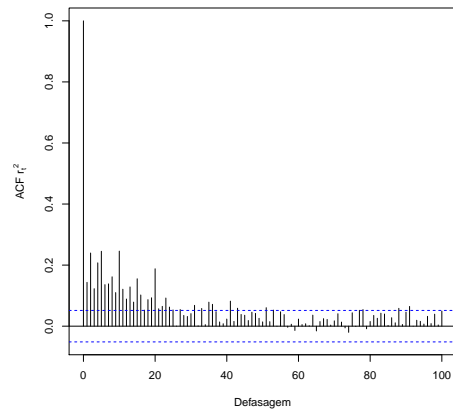
(a) BBAS3



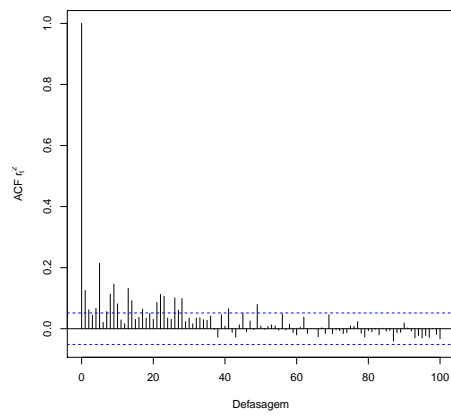
(b) BBDC4



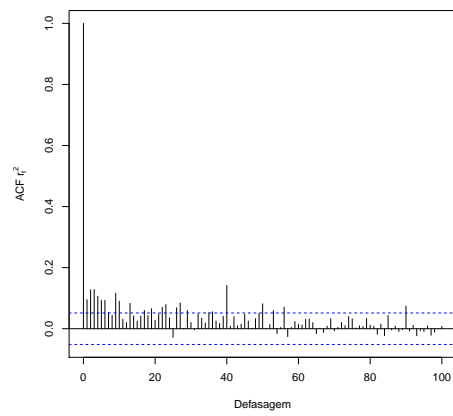
(c) GGBR4



(d) PETR4

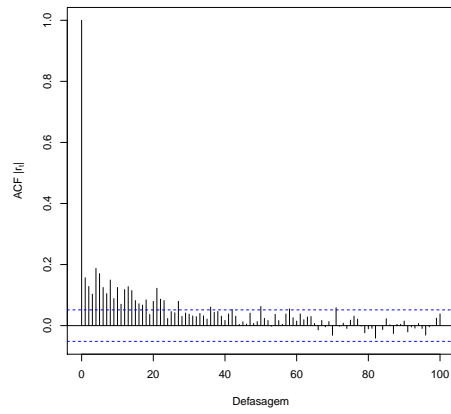


(e) USIM5

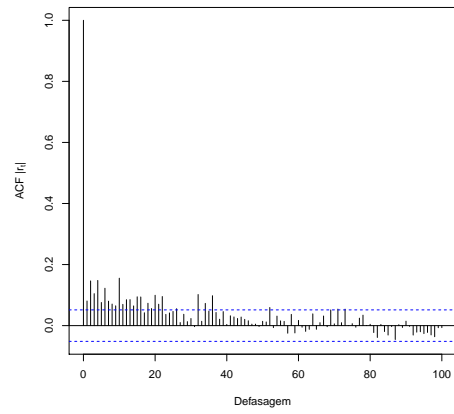


(f) VALE5

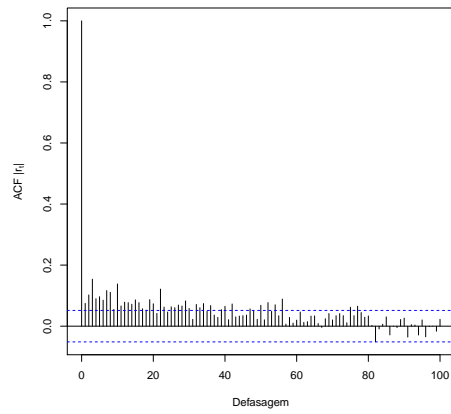
Figura 3.5: Funções ACF dos quadrados dos log-retornos.



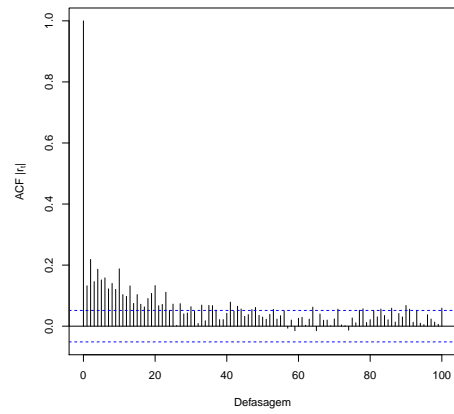
(a) BBAS3



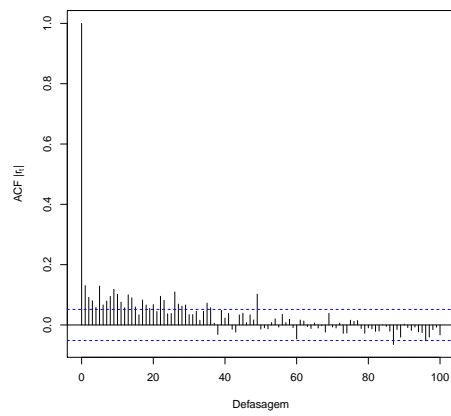
(b) BBDC4



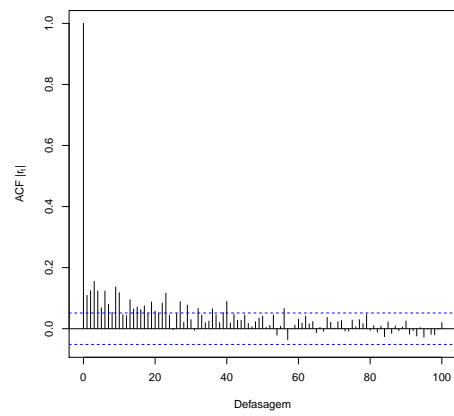
(c) GGBR4



(d) PETR4



(e) USIM5



(f) VALE5

Figura 3.6: Funções ACF dos módulos dos log-retornos.

Capítulo 4

MODELAGEM E RESULTADOS

Considerando as conclusões do capítulo 3 de que os log-retornos são não correlacionados serialmente mas os quadrados dos log-retornos são dependentes, foi testada a adequação dos modelos GARCH para as séries dos log-retornos em estudo.

Foram avaliados os modelos supondo os erros com distribuição Normal, Normal assimétrica, t -Student, t -Student assimétrica e Normal Inversa Gaussiana, com as variações $(1, 0), (2, 0), (1, 1), (2, 1)$ para os parâmetros (p, q) . Para escolha do modelo mais adequado, foram comparados os valores dos critérios AIC e BIC dos modelos GARCH (p, q) , conforme exposto nas tabelas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6, onde estão marcados os menores valores de cada critério. Nessas tabelas, as distribuições do erro “Normal S” e “ t -Student S” são as versões assimétricas da distribuição Normal e “ t -Student”, respectivamente. Não há valores de AIC e BIC dos modelos GARCH com erros Normal Inversa Gaussiana para o ativo BBDC4 porque não houve convergência no cálculo das estimativas dos parâmetros desses modelos para esse ativo.

Optou-se pelo modelo GARCH(1,1) com erros t -Student, onde estão concentrados os menores valores (melhores ajustes) de AIC e BIC das séries em estudo.

Na tabela 4.7 encontram-se os parâmetros estimados dos modelos para os log-retornos de cada ativo.

Se um modelo GARCH é ajustado a uma série r_t não correlacionada, então os resíduos padronizados são dados por

$$\epsilon_t = \frac{r_t}{\sqrt{h_t}}$$

e formam uma sequência i.i.d. com distribuição normal padrão. Assim, a adequação do modelo pode ser verificada aplicando-se o teste de independência de Ljung-Box a esses resíduos e aos seus quadrados. Os p -valores desses testes, expostos nas tabelas 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12 e 4.13, indicam que os modelos estão bem ajustados aos log-retornos diários dos ativos analisados, a exceção dos ativos BBAS3, e USIM5 que tiveram rejeitada a hipótese de dependência dos resíduos padronizados quando testada a defasagem de dez dias no teste de Ljung-Box.

Tabela 4.1: Critérios de seleção AIC e BIC
- BBAS3.

Distrib. Erro	p	q	AIC	BIC
Normal	1	0	-4,83229	-4,82134
Normal	2	0	-4,85320	-4,83861
Normal	1	1	-4,92008	-4,90548
Normal	2	1	-4,91885	-4,90060
Normal S	1	0	-4,83182	-4,81722
Normal S	2	0	-4,85322	-4,83497
Normal S	1	1	-4,91878	-4,90054
Normal S	2	1	-4,91755	-4,89566
t-Student	1	0	-4,87543	-4,86083
t-Student	2	0	-4,88778	-4,86954
t-Student	1	1	-4,93338	-4,91513
t-Student	2	1	-4,93212	-4,91022
t-Student S	1	0	-4,87520	-4,85695
t-Student S	2	0	-4,88744	-4,86555
t-Student S	1	1	-4,93226	-4,91037
t-Student S	2	1	-4,93100	-4,90546
NIG	1	1	-4,93258	-4,91069
NIG	2	1	-4,93132	-4,90578

Tabela 4.2: Critérios de seleção AIC e BIC
- BBDC4.

Distrib. Erro	p	q	AIC	BIC
Normal	1	0	-5,08550	-5,07455
Normal	2	0	-5,11069	-5,09609
Normal	1	1	-5,13905	-5,12446
Normal	2	1	-5,14034	-5,12209
Normal S	1	0	-5,08634	-5,07175
Normal S	2	0	-5,11278	-5,09454
Normal S	1	1	-5,14419	-5,12595
Normal S	2	1	-5,14555	-5,12366
t-Student	1	0	-5,15820	-5,14360
t-Student	2	0	-5,17559	-5,15734
t-Student	1	1	-5,20012	-5,18188
t-Student	2	1	-5,20025	-5,17836
t-Student S	1	0	-5,15683	-5,13859
t-Student S	2	0	-5,17428	-5,15238
t-Student S	1	1	-5,19928	-5,17738
t-Student S	2	1	-5,19946	-5,17392

Tabela 4.3: Critérios de seleção AIC e BIC
- GGBR4.

Distrib. Erro	p	q	AIC	BIC
Normal	1	0	-4,71734	-4,70640
Normal	2	0	-4,73816	-4,72357
Normal	1	1	-4,78251	-4,76791
Normal	2	1	-4,78121	-4,76296
Normal S	1	0	-4,72073	-4,70614
Normal S	2	0	-4,74455	-4,72630
Normal S	1	1	-4,78484	-4,76659
Normal S	2	1	-4,78415	-4,76225
t-Student	1	0	-4,74267	-4,72807
t-Student	2	0	-4,75152	-4,73327
t-Student	1	1	-4,79004	-4,77179
t-Student	2	1	-4,78827	-4,76638
t-Student S	1	0	-4,74707	-4,72882
t-Student S	2	0	-4,75667	-4,73478
t-Student S	1	1	-4,79340	-4,77150
t-Student S	2	1	-4,79219	-4,76664
NIG	1	1	-4,79294	-4,77105
NIG	2	1	-4,79174	-4,76620

Tabela 4.4: Critérios de seleção AIC e BIC
- PETR4.

Distrib. Erro	p	q	AIC	BIC
Normal	1	0	-4,77624	-4,76529
Normal	2	0	-4,82427	-4,80968
Normal	1	1	-4,87849	-4,86389
Normal	2	1	-4,87780	-4,85956
Normal S	1	0	-4,77496	-4,76036
Normal S	2	0	-4,82294	-4,80469
Normal S	1	1	-4,87760	-4,85935
Normal S	2	1	-4,87700	-4,85510
t-Student	1	0	-4,83991	-4,82531
t-Student	2	0	-4,87276	-4,85452
t-Student	1	1	-4,91350	-4,89525
t-Student	2	1	-4,91324	-4,89134
t-Student S	1	0	-4,83859	-4,82034
t-Student S	2	0	-4,87138	-4,84948
t-Student S	1	1	-4,91256	-4,89067
t-Student S	2	1	-4,91230	-4,88676
NIG	1	1	-4,91174	-4,88985
NIG	2	1	-4,91140	-4,88586

Tabela 4.5: Critérios de seleção AIC e BIC
- USIM5.

Distrib. Erro	p	q	AIC	BIC
Normal	1	0	-4,33060	-4,31965
Normal	2	0	-4,33459	-4,32000
Normal	1	1	-4,40286	-4,38827
Normal	2	1	-4,40116	-4,38291
Normal S	1	0	-4,33614	-4,32155
Normal S	2	0	-4,34020	-4,32196
Normal S	1	1	-4,40421	-4,38597
Normal S	2	1	-4,40249	-4,38059
t-Student	1	0	-4,37569	-4,36110
t-Student	2	0	-4,38182	-4,36357
t-Student	1	1	-4,41579	-4,39754
t-Student	2	1	-4,41386	-4,39197
t-Student S	1	0	-4,37543	-4,35719
t-Student S	2	0	-4,38153	-4,35964
t-Student S	1	1	-4,41562	-4,39373
t-Student S	2	1	-4,41368	-4,38814
NIG	1	1	-4,41672	-4,39482
NIG	2	1	-4,41480	-4,38926

Tabela 4.6: Critérios de seleção AIC e BIC
- VALE5.

Distrib. Erro	p	q	AIC	BIC
Normal	1	0	-5,03237	-5,02143
Normal	2	0	-5,05206	-5,03746
Normal	1	1	-5,10271	-5,08811
Normal	2	1	-5,10009	-5,08184
Normal S	1	0	-5,03099	-5,01639
Normal S	2	0	-5,05067	-5,03243
Normal S	1	1	-5,10161	-5,08337
Normal S	2	1	-5,09899	-5,07710
t-Student	1	0	-5,10088	-5,08628
t-Student	2	0	-5,10835	-5,09011
t-Student	1	1	-5,14500	-5,12675
t-Student	2	1	-5,14191	-5,12002
t-Student S	1	0	-5,09996	-5,08171
t-Student S	2	0	-5,10727	-5,08537
t-Student S	1	1	-5,14432	-5,12242
t-Student S	2	1	-5,14127	-5,11572
NIG	1	1	-5,14510	-5,12320
NIG	2	1	-5,14218	-5,11663

Tabela 4.7: Parâmetros estimados do modelo GARCH(1,1)
para as séries de log-retornos.

Ativo	α_0	α_1	β_1
BBAS3	0,000017	0,09068	0,8751
BBDC4	0,000014	0,05975	0,9005
GGBR4	0,000010	0,04552	0,9350
PETR4	0,000011	0,08125	0,8940
USIM5	0,000023	0,06794	0,9028
VALE5	0,000011	0,06620	0,9067

Tabela 4.8: Testes de Ljung-Box para o modelo GARCH(1,1) dos log-retornos do ativo BBAS3.

Série	Defasagem d	$Q(d)$	p -valor
ϵ_t	Q(10)	19,451	0,034897
ϵ_t	Q(15)	24,324	0,059792
ϵ_t	Q(20)	26,799	0,14101
ϵ_t^2	Q(10)	9,510	0,48451
ϵ_t^2	Q(15)	15,471	0,41803
ϵ_t^2	Q(20)	19,258	0,50511

Tabela 4.9: Testes de Ljung-Box para o modelo GARCH(1,1) dos log-retornos do ativo BBDC4.

Série	Defasagem d	$Q(d)$	p -valor
ϵ_t	Q(10)	5,599	0,84778
ϵ_t	Q(15)	7,155	0,95322
ϵ_t	Q(20)	11,122	0,94299
ϵ_t^2	Q(10)	5,642	0,84437
ϵ_t^2	Q(15)	7,179	0,95249
ϵ_t^2	Q(20)	7,926	0,99235

Tabela 4.10: Testes de Ljung-Box para o modelo GARCH(1,1) dos log-retornos do ativo GGBR4.

Série	Defasagem d	$Q(d)$	p -valor
ϵ_t	10	15,640	0,11042
ϵ_t	15	19,033	0,21224
ϵ_t	20	20,550	0,42404
ϵ_t^2	10	10,002	0,44028
ϵ_t^2	15	11,914	0,68553
ϵ_t^2	20	16,298	0,69797

Tabela 4.11: Testes de Ljung-Box para o modelo GARCH(1,1) dos log-retornos do ativo PETR4.

Série	Defasagem d	$Q(d)$	p -valor
ϵ_t	10	4,807	0,90367
ϵ_t	15	15,091	0,44492
ϵ_t	20	18,225	0,57257
ϵ_t^2	10	7,522	0,67543
ϵ_t^2	15	12,834	0,61516
ϵ_t^2	20	17,051	0,64966

Tabela 4.12: Testes de Ljung-Box para o modelo GARCH(1,1) dos log-retornos do ativo USIM5.

Série	Defasagem d	$Q(d)$	p -valor
ϵ_t	10	19,623	0,03303
ϵ_t	15	22,697	0,09079
ϵ_t	20	29,384	0,08048
ϵ_t^2	10	12,487	0,25378
ϵ_t^2	15	19,177	0,20583
ϵ_t^2	20	20,530	0,42522

Tabela 4.13: Testes de Ljung-Box para o modelo GARCH(1,1) dos log-retornos do ativo VALE5.

Série	Defasagem d	$Q(d)$	p -valor
ϵ_t	10	11,367	0,32963
ϵ_t	15	21,693	0,11612
ϵ_t	20	25,726	0,17504
ϵ_t^2	10	7,850	0,64345
ϵ_t^2	15	12,854	0,61361
ϵ_t^2	20	14,115	0,82462

Capítulo 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho aplicamos os modelos da família GARCH com possíveis erros assimétricos e caudas pesadas a seis séries de retornos do mercado financeiro brasileiro. Nossos resultados indicam, como esperado, que em geral o melhor modelo é dado pelo GARCH(1,1) com erros t-Student. Tais melhores ajustes foram baseados nos critérios de informação de Akaike e Bayesiano. Fizemos as análises dos resíduos e verificamos a adequação das hipóteses do modelo.

Para trabalhos futuros, podemos considerar os modelos GARCH multivariados que nos permitiriam modelar as seis séries conjuntamente e possivelmente capturar alguma dependência entre elas. Outra opção seria uma análise mais profunda das séries de log-retornos dos ativos BBAS3 e USIM5 para tentar identificar as causas da rejeição da hipótese de independência para os resíduos padronizados quando testada a defasagem de dez dias.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (1972). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables* (10th ed.). Washington: Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1997). Normal inverse gaussian distributions and stochastic volatility models. *Scandinavian Journal of Statistics*, 24, 1-13.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- Ehlers, R. (2009). *Análise de séries temporais*. Retrieved from <http://www.icmc.usp.br/ehlers/stemp/stemp.pdf>
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50, 987-1007.
- Fernández, C., & Steel, M. (1998). On Bayesian modelling of fat tails and skewness. *Journal of the American Statistical Association*, 93, 359-371.
- Jarque, C., & Bera, A. (1980). Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics Letters*, 6, 255-259.
- Morettin, P. A., & Toloí, C. M. (2006). *Análise de séries temporais* (2nd ed.). São Paulo: Egard Blucher.
- Rubem, A., & Mendes, B. (2007). *Riscos extremos em finanças* (1st ed.). Rio de Janeiro: IBGE.
- Ruppert, D. (2004). *Statistics and finance: An introduction* (1st ed.). New York: Springer

Science+Business Media.

Shapiro, S., & Wilk, M. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples).

Biometrika, 52, 591-611.