



UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO

PRECIFICAÇÃO DE CONTRATO DE EXCESSO DE DANOS COM BASE EM MODELOS DE DISTRIBUIÇÃO AGREGADA

ALEXSANDRA TEIXEIRA DA SILVA BITZIOUS

E

THIAGO CASTELLO BRANCO PORTAL

Orientador: Prof. Fernando Ferraz do Nascimento, DSc

Rio de Janeiro

Jan/2020

Esta página foi deixada em branco intencionalmente

AGRADECIMENTOS

Ao nosso orientador Fernando Ferraz do Nascimento, por viajar milhares quilômetros para presencialmente compartilhar conosco, seus alunos da 3ª Turma do curso de especialização em atuária do NADE, um pouco de seu conhecimento e experiência, colaborando para nosso desenvolvimento técnico e profissional. Suas aulas e apoio foram fundamentais para o desenvolvimento de nosso projeto.

Aos nossos queridos companheiros Rodrigo e Samantha que nos deram todo o suporte emocional e afetivo nos momentos de dificuldade, cuidando dos pequenos, nos incentivando a sermos resilientes e seguirmos adiante e, também é claro, pela enorme compreensão e paciência com nossas ausências aos sábados de classe e a todos os momentos de estudo necessários. A vocês queridos, nosso muitíssimo obrigado, vocês foram fundamentais para tornar realidade a conclusão do curso.

Ao nossos pequenos Mateus e Lucas, os quais sempre perguntavam o que havia de tão legal nas aulas para que passássemos os sábados em classe.

E a Deus.

RESUMO DA MONOGRAFIA

O presente trabalho tem o propósito de apresentar um estudo de caso, utilizando o método de precificação de excesso de danos de distribuição agregada. Este método é muito utilizado no mercado segurador para precificar todos os tipos de contrato de excesso de danos, porque possibilita gerar taxas com maior grau de confiabilidade, mesmo que o histórico de sinistros não seja em quantidade desejável. De forma simplificada o método busca utilizar a experiência observada na carteira para obtenção de parâmetros para projeção de seu comportamento futuro dando origem a diversos cenários de simulação que serão utilizados para apuração do prêmio de risco.

A carteira que será precificada apresenta uma base de sinistros fictícios construída com um histórico de severidade e frequência similar a um contrato de transporte de mercadorias.

Precificação de Contratos de Excessos de Danos com Base em Modelos de Distribuição Agregados

Alexsandra Teixeira da Silva Bitzious

e

Thiago Castello Branco Portal

Janeiro/2020

Orientador: Prof. Fernando Ferraz do Nascimento, DSc

Curso: Pós-graduação – Especialização em Atuária

Palavras-chave: precificação, distribuições de probabilidade, severidade, frequência.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO	9
1.1. O que é Resseguro	9
1.2. Funções do Resseguro.....	9
1.3. Tipos de Resseguro	10
1.3.1. Resseguro Facultativo	10
1.3.2. Resseguro Automático	11
1.4. Resseguro Proporcional	11
1.4.1. Quota Parte	11
1.4.2. Excedente de Responsabilidade	12
1.5. Resseguro Não Proporcional	13
1.5.1. Cobertura por Risco	14
1.5.2. Cobertura por Evento ou Catástrofe	15
1.5.3. Cobertura por Perda Agregada (Stop Loss)	16
1.6. Precificação Não Proporcional.....	16
1.6.1. Exposição.....	17
1.6.2. Burning Cost	19
1.6.3. Modelo Agregado	20
1.7. Reintegração	21
1.8. Limite Anual Agregado	22
1.9. Prêmio Retido (GNPI).....	22
CAPÍTULO 2: OBJETIVO	23
CAPÍTULO 3: METODOLOGIA	24
3.1. Distribuições de Frequência de sinistros [N]	24
3.1.1. Poisson (λ)	24
3.1.2. Binomial Negativa (p, k).....	24
3.2. Distribuições de Severidade de sinistros [X].....	25
3.2.1. LogNormal (μ, σ)	25
3.2.2. Gama (α, β).....	25
3.2.3. Inversa Gaussiana (a, b).....	25
3.2.4. Pareto (α, k)	25
3.3. Distribuições do Sinistro Agregado [S_{COL}]	25
3.4. Métodos de Seleção de Modelos.....	26
3.4.1. Critério de Informação de Akaike (AIC).....	26

<i>3.4.2. Kolmogorov-Smirnov</i>	27
<i>3.4.3. Qui-Quadrado (Pearson)</i>	27
CAPÍTULO 4: DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS	29
4.1. Levantamento dos Dados: Sinistros Individuais e GNPI Histórico	29
4.2. Índice de Inflação.....	31
4.3. Cálculo do Burning Cost	31
4.4. Análise da Distribuição de Frequência	32
4.5. Análise da Distribuição de Severidade	34
4.6. Distribuição do Sinistro Agregado (S^{COL}).....	37
4.7. Prêmio Estatístico e Taxa Pura de Risco	45
4.8. GNPI Projetado de 2019.....	47
4.9. <i>Distribuição Agregada vs Burning Cost</i>	47
4.10. Outros Fatores Analisados no Processo de Precificação	48
4.11. Prêmio Comercial.....	50
CAPÍTULO 5: CONSIDERAÇÕES FINAIS	52
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	54

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

1.1. O que é Resseguro

Harrison (p.3, 2004) diz que o resseguro é a transferência do risco de seguro de uma seguradora para outra, por meio de um contrato em que uma das partes (o ressegurador) concorda, em troca de um prêmio de resseguro, em indenizar a seguradora cedente (cedente) de parte ou da totalidade das consequências financeiras de certa exposição a prejuízo cobertas por uma ou mais de uma apólice de seguro da cedente relacionado ao risco. O resseguro costuma ser referido como o “*seguro das seguradoras*”.

A título de curiosidade, quando a cessão do risco é realizada entre resseguradores o processo é chamado de retrocessão e o ressegurador que recebe o risco é chamado de retrocessionário.

1.2. Funções do Resseguro

Todas as resseguradoras realizam um importante trabalho de orientação e assessoramento às cedentes, já que possuem um grande conhecimento de todos os ramos e experiência do comportamento dos diferentes riscos. Os grandes complexos industriais, as enormes cargas de navios, as frotas de aviões, as obras faraônicas de hidrelétricas, as perigosas operações de petróleo *offshore*, as pesquisas espaciais incríveis e uma série de outros riscos não existiriam ou não teriam a grandeza que têm hoje se o seguro não tivesse facilitado, fornecendo os grandes investimentos, e se não tivesse o amparo do resseguro permitindo a assunção de maior volume de risco pelas seguradoras (*Gropello, 1997*).

Gropello (p.36, 1997) afirma que, se uma seguradora tivesse que subscrever apenas os riscos até o limite máximo de sua capacidade, poderia aceitar somente riscos de valor limitado. O poder de dispor da força econômica de suas resseguradoras se transforma em aumento de capacidade de aceitação.

O resseguro dá um importante auxílio ao mercado de seguros, pois permite que

as seguradoras fechem negócios praticamente sem limitação de valores. Elas podem aceitar riscos com valores que superem em muito sua capacidade econômica, pois o que ultrapassar a sua capacidade de retenção ela poderá repassar em resseguro.

Bellerose (2003) destaca que a função de uma companhia de seguros é proteger o segurado contra potenciais perdas. A resseguradora fornece uma proteção semelhante à companhia de seguros.

As funções mais importantes do resseguro são: fornecer capacidade de absorção / retenção de risco, proporcionar estabilidade da carteira e fortalecimento da solidez financeira da seguradora.

Abaixo apresentamos uma tabela com os principais tipos de resseguro praticados pelo mercado brasileiro bem como seus objetivos sob ponto de vista das seguradoras cedentes:

Figura 1 - Tipos de Resseguro e Funções do Resseguro

	Emprestar Capacidade	Dar Estabilidade	Proteger Contra Catástrofe	Reforçar o Patrimônio Líquido	Passar Técnica de Subscrição	Facilitar a Saída de um Mercado
Facultativo	X				X	
Automático quota-parte				X		X
Automático excedente de respons.	X			X		
Automático excesso de danos	X	X	X			

Fonte: CASS R. M. et. al. (2002, PAG.58)

1.3. Tipos de Resseguro

1.3.1. Resseguro Facultativo

O Resseguro facultativo é aquele em que a seguradora seleciona riscos específicos que ela deseja ceder ao ressegurador, onde este último efetuará sua precificação com base em dados adicionais do risco e não com base em um percentual dos prêmios recolhidos pelo segurador.

1.3.2. Resseguro Automático

No Resseguro automático a seguradora cede a cobertura de uma parte de sua carteira, não estabelecendo riscos específicos. Não há interferência do ressegurador na precificação da apólice segurada, sendo o pagamento do resseguro feito por repasse de percentual dos prêmios recolhidos pela seguradora.

O Resseguro automático se divide em

- Proporcional (Quota Parte e Excedente de Responsabilidade): permite alavancar a operação devido ao compartilhamento dos riscos da carteira (foco no risco)
- Não proporcional (Excedente de Danos por Risco, Evento e Stop Loss): em geral associados à cobertura de grandes sinistros para proteção da carteira (foco no sinistro)

1.4. Resseguro Proporcional

Há dois tipos de resseguro proporcional: o de quota parte e o de excedente de responsabilidade. *Harrison (2004)* diz que, a característica comum de ambos os tipos de resseguro proporcional é que a seguradora cedente e o ressegurador partilham proporcionalmente as importâncias seguradas, os prêmios de seguro e os sinistros.

No resseguro de quota parte, a percentagem do risco, prêmios e sinistros que são transferidos para a resseguradora é a mesma para todos os riscos incluídos no contrato de resseguro. No resseguro de excedente de responsabilidade, a percentagem transferida varia dependendo do tamanho do risco ressegurado.

1.4.1. Quota Parte

O quota-parte é aquele em que a resseguradora participa com uma porção fixa de todos os riscos assumidos pela cedente nos ramos ou modalidades amparadas pelo contrato. A cedente, por sua vez, retém uma parte de cada risco.

As participações da cedente e da resseguradora são estabelecidas com base em um percentual de cada risco contratado pela cedente. Esse percentual é acordado desde o início do contrato e fornece a base para a distribuição dos prêmios e sinistros ao longo da vigência do contrato. A Figura 2 é um exemplo deste plano de resseguro, onde 80% (percentual de cessão) é aplicado a todos os riscos, indistintamente.

Figura 2 - Resseguro proporcional de 80%

Resseguro Proporcional de 80%

		Seguradora Cedente 20%	Ressegurador 80%
\$ 1.000.000,00	Limite	\$ 200.000,00	\$ 800.000,00
\$ 200.000,00	Prêmio	\$ 40.000,00	\$ 160.000,00
\$ 120.000,00	Sinistro	\$ 24.000,00	\$ 96.000,00
	Sinistralidade	60%	60%

\$ 1.000.000,00	20%	80%
Limite de cobertura da apólice da cedente	Retenção Líquida da Seguradora Cedente	Ressegurados
\$ -		

Fonte: Cass R. M. e outros. (2002, pag.3)

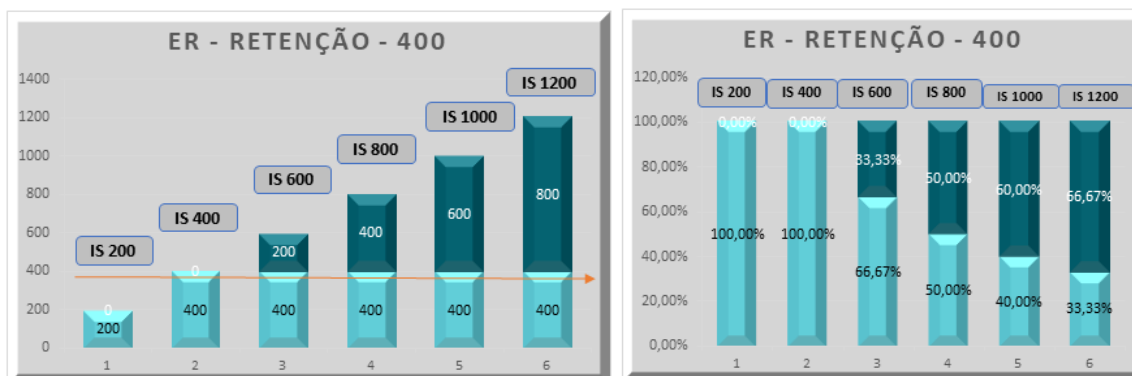
1.4.2. Excedente de Responsabilidade

O contrato de excedente de responsabilidade como uma forma de resseguro proporcional, é mais usado do que o contrato de quota-parte. Nos dois tipos de resseguro, a percentagem de responsabilidade que a seguradora cedente partilha com o ressegurador em cada risco é a mesma que é aplicada à partilha do prêmio e dos sinistros relativos ao respectivo risco. Mas, enquanto no contrato de quota-parte a mesma percentagem de participação é aplicada em todos os riscos, no de excedente de responsabilidade ela varia conforme o tamanho do risco (Cass R. M. e outros, 2002).

Cedendo os riscos que superam o seu limite de retenção, a seguradora reduz sua participação nos possíveis sinistros de valor elevado, que poderia colocar em risco o seu patrimônio. Além disso, ela homogeneiza sua carteira e,

consequentemente, reduz a variação relativa que poderia ter de sinistralidade.

Figura 3 - Contrato de Resseguro de Excedente de Responsabilidade



*IS = Importância Segurada

1.5. Resseguro Não Proporcional

O resseguro de excessos de danos, corresponde a um Resseguro não proporcional e se baseia na ideia de que a divisão de responsabilidades entre a cedente e o ressegurador é estabelecida sobre os sinistros, e não sobre o risco, como ocorre no resseguro proporcional. Assim, a resseguradora se compromete a indenizar a cedente quando o valor do sinistro ultrapassar um montante definido previamente (prioridade) e até um limite máximo (Limite de Cobertura).

Segundo *Carter (El Reaseguro – 1979)*, o princípio fundamental do resseguro de excesso de danos contratado para cobrir um risco ou um evento é o mesmo do proporcional. Eles se diferenciam porque, em vez de aceitar a responsabilidade segundo um percentual pré-fixado de todos os sinistros ocorridos em cada risco cedido individualmente pela seguradora, a resseguradora se compromete a indenizar a cedente, se a carteira ressegurada sofrer perdas que superem um valor fixado previamente e sujeita a um limite máximo.

A companhia cedente contrata proteção unicamente para os sinistros de valor elevado e que possam colocar em risco sua capacidade financeira. Em consequência desta perda, a companhia irá definir um limite da quantia do qual ela poderá recuperar da resseguradora.

O excedente de danos poderá proteger a cedente contra um sinistro de valor elevado, referente a uma única apólice, o qual chamamos de excesso de danos por risco. Poderá proteger também, contra um acúmulo de apólices, onde em um único evento ela poderá perder duas ou mais apólices, como é o caso de um incêndio em um centro comercial. Neste último caso, a seguradora irá somar todo o seu prejuízo e perderá apenas uma prioridade, enquanto a resseguradora pagará o excedente até o limite de responsabilidade contratado, o qual chamamos de excesso de danos por evento.

Os contratos de resseguro automático proporcional potencialmente sujeitam a seguradora cedente a sinistros de grande porte, porque ela sempre participa com sua proporção em todo e qualquer sinistro. Se ocorrerem sinistros de grande valor, a cedente pagará sua parte proporcional desses sinistros. Nos contratos de excesso de danos, a seguradora determina o tamanho do sinistro que pode pagar sozinha. Deste modo, ela fixa seu limite de retenção para restringir sua responsabilidade, nos sinistros cobertos pelo contrato, a esse limite (CASS R. M. et. al., 2002).

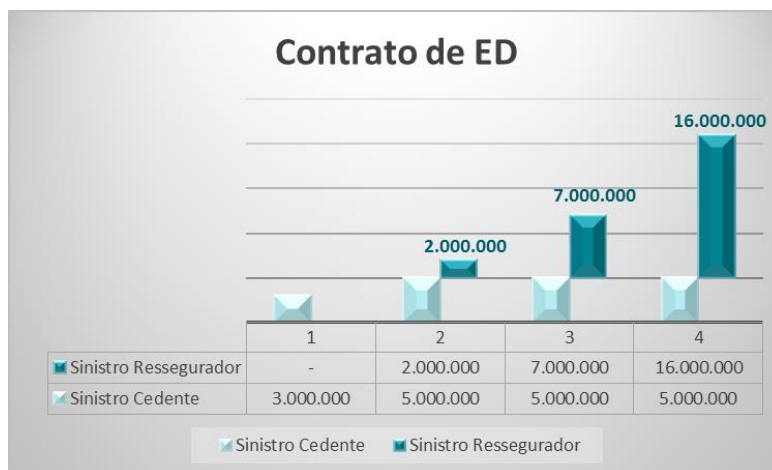
A forma de resseguro mais eficiente para estabilizar a sinistralidade é a de excesso de danos, seja ela por apólice, por ocorrência ou por catástrofe. Quando estruturados adequadamente, os contratos de excesso de danos podem ser melhores para estabilizar a sinistralidade do que os proporcionais.

1.5.1. Cobertura por Risco

O primeiro tipo de cobertura de excesso de danos é a por risco. O resseguro de excesso de danos por risco cobre seguros de bens materiais e se aplica separadamente a cada sinistro de cada risco. Nos EUA, este tipo de cobertura é frequentemente referido como *Property per risk excess of loss*, que quer dizer resseguro de excesso de danos, por risco, de seguros de bens materiais. Normalmente, é a seguradora cedente quem determina o que constitui um risco distinto (Harrison, 2004).

Figura 4 - Contrato de Resseguro – Cobertura por Risco

Sinistros	Cedente		Ressegurador		
	Prioridade	1ª Faixa	2ª Faixa	3ª Faixa	
	5.000.000	5.000.000	10.000.000	15.000.000	
1	3.000.000	3 MM			
2	7.000.000	5 MM	2 MM		
3	12.000.000	5 MM	5 MM	2 MM	
4	21.000.000	5 MM	5 MM	10 MM	1 MM



Os contratos de resseguro de excesso de danos por risco normalmente incluem limites por ocorrência. Um limite por ocorrência restringe o valor total das recuperações de resseguro relativas a sinistros causados por uma única ocorrência.

1.5.2. Cobertura por Evento ou Catástrofe

O segundo tipo de cobertura de excesso de danos é a de catástrofe. O resseguro de excesso de danos de catástrofe protege a seguradora cedente contra uma acumulação de sinistros que resultem de um evento catastrófico. Este tratado pode ser negociado para proteger a seguradora cedente e os seus resseguradores, mas é mais frequentemente negociado para proteger a retenção líquida da seguradora cedente depois de receber todas as outras recuperações de resseguro. Tornado, furações, e terremotos são exemplos de eventos catastróficos. Esses eventos, especialmente os furacões de grande magnitude, podem causar prejuízos que alcançam bilhões de dólares (Harrison, 2004).

Em contratos que possuem coberturas proporcionais (quota parte e excedentes de responsabilidade) e não proporcionais, o contrato de excesso de danos, por risco ou por evento, só será acionado após a recuperação dos contratos proporcionais ocorrer. Desta forma, a responsabilidade dos sinistros líquidos de resseguro proporcional que estiverem sob a retenção da cedente será recuperado, caso este valor seja superior à prioridade contratada.

1.5.3. Cobertura por Perda Agregada (Stop Loss)

Em vez de se referir a um sinistro pago pelo ressegurador em consequência de um único risco ou vários riscos agregados em um evento, o *stop loss* se caracteriza pelo coeficiente de sinistralidade da seguradora. Normalmente, o resseguro protege a seguradora contra elevados índices de sinistralidade em um ano de experiência. Neste caso, a responsabilidade do ressegurador será a sinistralidade que exceder um percentual definido no contrato como prioridade, até um percentual definido como limite.

O contrato entre as partes irá definir a forma de calcular o coeficiente de sinistralidade, já que poderá ser o resultado dos sinistros incorridos (pagos + pendente) sobre o prêmio ganho ou sobre o total de prêmio emitido no período contratado.

Neste tipo de cobertura, as responsabilidades são expressas em percentuais. Desta forma, para se obter os valores monetários é necessário multiplicar o percentual de limite ou prioridade ao valor total de prêmio retido pela cedente, o qual chamamos de G.N.P.I. (*Gross Net Premium Income*).

1.6. Precificação Não Proporcional

Se for possível precificar uma carteira de forma precisa, a seguradora não necessitaria ceder os seus riscos a um ressegurador. Desta forma, no contrato de excesso de danos a seguradora está preocupada com o alto nível de incerteza sobre os elevados sinistros que poderão ocorrer e levar o seu resultado a uma perda totalmente inesperada.

Se a experiência histórica for suficientemente estável para fornecer dados para fazer uma estimativa precisa da perda esperada, o ressegurado estaria disposto a reter esse risco. Como tal, as ferramentas de preço "básicas" geralmente são apenas um ponto de partida para determinar um prêmio adequado. O atuário prova seu valor, sabendo quando as premissas nessas ferramentas não são atendidas e como suplementar os resultados com ajustes e julgamentos adicionais.

As principais ferramentas disponíveis para a precificação por tratados de risco são a experiência e a classificação de exposição.

1.6.1. Exposição

Um método de precificação de contratos de excesso de danos é a classificação de exposição. A vantagem dessa metodologia sobre a de experiência é que o perfil de risco atual é modelado e não apurado apenas em períodos históricos. O modelo de exposição é bastante simples, mas os sinistros modelados na curva de exposição geralmente são com base em sinistros de mercado e por isso nem sempre será aderente para todas as carteiras analisadas.

Segundo *Clark (2014)*, o método concentra-se em uma curva de exposição (P). Isso representa a quantidade de perda limitada em uma determinada porcentagem (p) do valor segurado (IV) em relação ao valor total da perda. Isso pode ser representado matematicamente como:

$$P(p) = \frac{\int_0^{p \cdot IV} x \cdot f(x) dx + \int_{p \cdot IV}^{\infty} p \cdot IV \cdot f(x) dx}{\int_0^{\infty} x \cdot f(x) dx} = \frac{\int_0^{p \cdot IV} [1 - F(x)] dx}{E[X]}$$

Ressaltamos que o Valor segurado (IV) também pode ser entendido como Importância Segurada ou o Valor do bem segurado.

Onde $f(x)$ = Distribuição de sinistros individuais

Figura 5 - Curva de Exposição

Valor Segurado (IV)	Perda (Sinistro)	Porcentagem (p)	Porcentagem (p) - Arred
3.223.720,27	184.743,55	5,73%	6,00%
1.746.359,47	171.252,97	9,81%	10,00%
906.160,19	302.866,49	33,42%	33,00%
1.631.256,89	138.534,67	8,49%	8,00%
1.631.256,89	138.534,67	8,49%	8,00%
2.941.266,94	542.631,41	18,45%	18,00%
1.489.914,34	341.978,90	22,95%	23,00%
1.489.914,34	341.978,90	22,95%	23,00%
932.668,54	539.156,35	57,81%	58,00%
2.223.089,44	197.657,61	8,89%	9,00%
2.218.873,58	479.485,33	21,61%	22,00%
2.218.873,58	262.274,41	11,82%	12,00%
2.514.723,39	102.474,96	4,07%	4,00%
667.590,81	126.753,31	18,99%	19,00%
1.034.956,86	617.309,73	59,65%	60,00%
1.034.956,86	617.309,73	59,65%	60,00%
3.607.663,63	379.360,45	10,52%	11,00%
1.323.502,73	309.198,71	23,36%	23,00%
1.323.502,73	313.094,03	23,66%	24,00%
1.482.059,63	276.606,79	18,66%	19,00%
1.844.264,29	131.940,24	7,15%	7,00%
1.844.264,29	131.940,24	7,15%	7,00%
1.844.264,29	208.084,43	11,28%	11,00%
1.685.916,04	130.961,32	7,77%	8,00%
1.275.432,13	1.119.307,26	87,76%	88,00%
1.275.432,13	1.119.307,26	87,76%	88,00%

Contagem		78	
p	Qtde	% Incremental	% Acumulado
0%	0	0,0%	0,0%
1%	0	0,0%	0,0%
2%	0	0,0%	0,0%
3%	0	0,0%	0,0%
4%	1	1,3%	1,3%
5%	3	3,8%	5,1%
6%	2	2,6%	7,7%
7%	2	2,6%	10,3%
8%	5	6,4%	16,7%
9%	2	2,6%	19,2%
10%	2	2,6%	21,8%
11%	3	3,8%	25,6%
12%	3	3,8%	29,5%
13%	0	0,0%	29,5%
14%	2	2,6%	32,1%
15%	0	0,0%	32,1%
16%	2	2,6%	34,6%
17%	0	0,0%	34,6%
18%	1	1,3%	35,9%
19%	2	2,6%	38,5%
20%	1	1,3%	39,7%
21%	1	1,3%	41,0%
22%	1	1,3%	42,3%
23%	7	9,0%	51,3%
24%	1	1,3%	52,6%
25%	0	0,0%	52,6%

Para um bem de um determinado valor segurado, calculamos a retenção e o limite como porcentagens desse valor segurado. A parte da perda esperada sobre o risco que cai sobre a cobertura de resseguro é então dada por:

$$P\left(\frac{\text{Retenção} + \text{Limite}}{\text{Valor Segurado}}\right) - P\left(\frac{\text{Retenção}}{\text{Valor Segurado}}\right)$$

Como exemplo, suponha que o contrato proposto se destina a cobrir uma faixa de risco de \$ 400.000 em excesso de \$ 100.000. Para um risco único com um valor segurado de \$ 500.000, calcularíamos a diferença entre os fatores de exposição em 20% (de \$ 100.000 / \$ 500.000) e 100% (de \$ 400.000 + \$ 100.000 / \$ 500.000). Na tabela abaixo, isso resulta em um fator de exposição de 44% (= 93% - 49%).

Figura 6 - Precificação por Burning Cost

<u>Percent of I.V.</u>	<u>Exposure Factor</u>
0%	0%
10%	37%
20%	49%
30%	57%
40%	64%
50%	70%
60%	76%
70%	81%
80%	85%
90%	89%
100%	93%
110%	97%
120%	100%

A curva de exposição fornecida acima é apenas para fins ilustrativos.

Para uma carteira de riscos, esse mesmo cálculo é realizado em uma distribuição de prêmio por diferentes faixas de valores segurados, conhecido como "perfil de limites". O perfil de limites também deve ser questionado para verificar se o tamanho dos intervalos de risco está em uma base por local. Se ele for montado usando valores totais para políticas que abrangem vários locais, ocorrerão distorções.

1.6.2. Burning Cost

O método de precificação com base na experiência é chamado de *Burning Cost*. A ideia básica da classificação deste método é que a experiência histórica, ajustada corretamente é o melhor preditor de expectativas futuras.

Para calcular a perda esperada com base neste método é necessário levantar o GNPI histórico dos últimos anos, e os grandes sinistros destes mesmos anos.

De acordo com *Clark (2014)*, o número de anos invocados na análise final deve ser um equilíbrio entre credibilidade e capacidade de resposta. É sabido que o mercado de seguros no Brasil tem sofrido muitas mudanças nos últimos anos, como: venda de carteiras de uma seguradora para outra, mudanças nas condições seguradas e trocas de subscritores. Desta forma, trabalhar com históricos muito antigos traz para o cálculo um nível de incerteza muito grande.

Períodos de 3 a 5 anos são mais indicados no levantamento de dados históricos.

Esta abordagem empírica é geralmente muito fácil de calcular e deve ser examinada pelo menos como uma verificação de outros métodos. No entanto, alguns pontos de atenção precisam ser observados:

1 - A experiência não leva em consideração todos os resultados possíveis e pode perder a possibilidade de eventos fora do que foi observado.

2 – Se o perfil de risco da carteira estiver mudando, a volatilidade do período futuro, poderá ser muito diferente do período histórico.

3 - Se o desenvolvimento da perda foi realizado usando o método Bornhuetter-Ferguson ou Cape Cod, os períodos históricos podem apresentar uma sequência artificialmente suave de proporções de perda que não refletem a volatilidade futura (Clark 2014).

Figura 7 - Precificação por Burning Cost

Ano de Subscrição	GNPI - Indexado	Sinistro na Faixa - Indexado	Taxa do Burning Cost
2011	1.989,00	62,00	3,12%
2012	2.048,00	115,00	5,62%
2013	2.260,00	24,00	1,06%
2014	2.317,00	301,00	12,99%
2015	2.405,00	153,00	6,36%
Total	11.019,00	655,00	5,94%

EPI 2016:	2.500,00
Prêmio 2016:	$2.500,00 \times 5,94\%$
Prêmio 2016:	148,6

1.6.3. Modelo Agregado

O método de modelo agregado se difere do Burning Cost pelo fato de utilizar distribuições de probabilidade para estimar as perdas esperadas, por isso é tão importante e necessário em uma precificação de excesso de danos, pois consegue estimar valores de sinistros que ainda não foram observados.

Clark (2014) diz que, como regra geral, os modelos agregados produzem resultados que são muito sensíveis às suposições de entrada; sempre que possível, deve ser usada a análise de sensibilidade dos parâmetros ou mesmo

de várias abordagens.

A abordagem de distribuição que iremos apresentar é a de "risco coletivo" e para ela existe uma modelagem explícita de distribuições de frequência e severidade. Tendo em vista que este é o modelo que dará base ao estudo em referência, este será mais detalhado no desenvolvimento deste trabalho.

1.7. Reintegração

A resseguradora negocia Limites e Prioridades de resseguro de excesso de danos com a cedente no início do contrato, os quais serão chamados de limites originais. Estes valores serão considerados para o pagamento de sinistros, onde o limite é a responsabilidade do ressegurador e a prioridade é responsabilidade da cedente. Imagine que ocorra um ou alguns sinistros no início do contrato e que o limite do mesmo seja esgotado. A cedente teria que negociar novamente este acordo para que sua carteira não ficasse sem proteção contra grandes perdas.

A solução para evitar novas negociações antes do fim de vigência deste acordo, é a inclusão de reintegrações. Nesta operação, a seguradora já deixa previamente negociado quantas vezes ela gostaria de ter o seu limite reestabelecido e a que custo, sem a necessidade de negociar novamente o custo do contrato.

A simbologia utilizada no mercado ressegurador para a reintegração é 3@100%, onde o nº 3 neste caso significa o nº de vezes que o limite será reintegrado, além do limite original, e após o @ o percentual representa o custo da reintegração em relação ao prêmio da faixa negociado no início do contrato.

É importante esclarecer que o cálculo do prêmio de risco considera perdas ilimitadas. Logo, o número de reintegrações e custos desta operação irão influenciar no prêmio comercial do contrato. Tendo em vista que, quanto menor o nº de reintegrações, menor será a exposição total do ressegurador e quanto maior o custo de reintegração, maior será o prêmio adicional que o ressegurador irá receber no momento do pagamento do sinistro.

1.8. Limite Anual Agregado

O limite anual agregado é o valor total de sinistro que uma resseguradora poderá pagar em um determinado período acordado. Desta forma, se em uma determinada faixa o limite é de 5 milhões e foram negociadas 3 reintegrações, então o limite anual agregado deste contrato será de quatro vezes (limite original + 3 reintegrações) o valor de 5 milhões, ou seja, 20 milhões.

1.9. Prêmio Retido (GNPI)

O GNPI vem do inglês *gross net premium income* e representa o prêmio líquido que a carteira possui de qualquer outro resseguro vigente em benefício dos mesmos riscos. Ele na verdade é uma medida de exposição da carteira analisada para se definir a taxa de ajustamento que será considerada no final do contrato, e conseqüentemente o prêmio devido do mesmo.

Na precificação do contrato de excesso de danos, é calculado um prêmio comercial para cada faixa negociada. A taxa de ajustamento é definida dividindo este prêmio pelo GNPI estimado. Cabe ressaltar que ao final do contrato a cedente deverá informar qual o GNPI que de fato foi performado pela mesma. Este GNPI multiplicado pela taxa de ajustamento definirá o prêmio devido. Este prêmio devido será comparado ao prêmio cobrado no início das operações. Caso ele seja maior, a cedente deverá pagar a diferença ao ressegurador.

CAPÍTULO 2: OBJETIVO

O objetivo desse projeto é apresentar um exemplo prático de precificação de contratos de resseguro para cobertura de contratos de excessos de danos apurados com base em modelos estatísticos de distribuição agregada.

Definiremos uma distribuição para o cálculo da severidade e uma distribuição para o cálculo da frequência onde utilizaremos alguns métodos (testes) para seleção de modelos adequados. Analisaremos as seguintes distribuições:

- Frequência: Poisson e Binomial Negativa
- Severidade: Gama, Pareto, Lognormal e Inversa Gaussiana

Nosso foco será no cálculo do prêmio estatístico, também chamado prêmio puro de risco, que será calculado com base no histórico da carteira a ser ressegurada. A carteira utilizada buscou refletir o histórico de sinistros de um contrato de transporte de mercadorias.

Ao final do processo também apresentaremos um exemplo do cálculo da precificação da taxa de resseguro que dará origem ao prêmio comercial, isto é, do prêmio estatístico acrescido dos usuais carregamentos e eventuais deduções praticadas pelo mercado a ser cobrado da cedente.

Os contratos de excessos de danos são usualmente precificados por 3 métodos: O modelo de exposição, o Burning Cost e o Modelo Agregado. O modelo de exposição é calculado através do perfil de risco da carteira e a este perfil é aplicada a curva de exposição. As curvas de exposição são construídas com base em sinistros históricos do mercado. Já os 2 (dois) outros métodos utilizam como base para o cálculo a experiência histórica dos grandes sinistros.

Para a precificação com base na experiência, recomenda-se a utilização dos grandes sinistros da carteira analisada considerando ao menos as ocorrências verificadas nos últimos 5 anos de forma a aumentar a confiabilidade do modelo.

Abordaremos em nosso estudo a precificação do modelo agregado, onde trabalharemos na precificação com a utilização do processo de simulação pelo método de Monte Carlo.

CAPÍTULO 3: METODOLOGIA

3.1. Distribuições de Frequência de sinistros [N]

Tendo em vista as características de baixo número de ocorrências e grande variabilidade de dispersão dos contratos de resseguros por excesso de danos, as distribuições de frequência mais adotadas para modelagem do número de sinistros esperados em um contrato deste tipo são as distribuições de Poisson e Binominal Negativa. Normalmente os contratos levam em consideração o período de 1 ano.

3.1.1. Poisson (λ)

A distribuição de Poisson ($X \sim Po(\lambda)$) é comumente utilizada para calcular a probabilidade de eventos “raros” como em tese seriam os eventos de resseguro por excesso de danos e o parâmetro λ pode ser interpretado como a taxa de ocorrência por unidade de medida.

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \text{ onde:}$$

$$E[X] = \lambda \quad \text{e} \quad Var(X) = \lambda$$

3.1.2. Binomial Negativa (p, k)

A distribuição binomial negativa ($X \sim BN(p, k)$) é a soma de k variáveis geométricas. Variáveis geométricas medem o número de fracassos até a ocorrência de um “sucesso”, na adaptação para o mercado de seguros seria a quantidade de “não sinistros” até a ocorrência de sinistro. Podemos interpretar a binominal negativa como a probabilidade de determinada quantidade de “sucessos” (k), com probabilidade individual de sucesso (p), em uma amostra.

$$P(X = x) \begin{cases} \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{(x-k)}, & \text{se } x = k, k+1, \dots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \text{ onde:}$$

$$E[X] = \frac{k}{p} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$$

3.2. Distribuições de Severidade de sinistros [X]

3.2.1. LogNormal (μ , σ)

$$f(x; \mu; \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E[X] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \text{ e } \text{Var}(X) = \exp(2\mu + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1)$$

3.2.2. Gama (α , β)

$$f(x; \alpha; \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{\alpha}{\beta} \text{ e } \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

3.2.3. Inversa Gaussiana (a , b)

$$f(x; a; b) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \exp(ab) x^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(a^2 x^{-1} + b^2 x)\right)$$

$$E[X] = \frac{a}{b} \text{ e } \text{Var}(X) = \frac{a}{b^3}$$

3.2.4. Pareto (α , k)

$$f(x; \alpha; k) = \begin{cases} \alpha k^\alpha x^{-\alpha-1}, & \text{se } x \geq k; \alpha, k > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E[X] = \begin{cases} \infty, & \alpha \leq 1 \\ \frac{k\alpha}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \end{cases} \quad \text{Var}[X] = \begin{cases} \infty, & \alpha \leq 2 \\ \frac{k^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, & \alpha > 2 \end{cases}$$

3.3. Distribuições do Sinistro Agregado [S_{COL}]

$$E[S_{COL}] = E[N] \times E[X]; \text{ e}$$

$$\text{VAR}[S_{COL}] = \text{VAR}[X] \times E[N] + E[X]^2 \times \text{VAR}[N]$$

3.4. Métodos de Seleção de Modelos

O grande objetivo dos métodos de seleção de modelos é identificar as distribuições estatísticas que representem satisfatoriamente os dados observados. Neste estudo, serão considerados 2 testes para a escolha da distribuição que irá modelar a severidade e 2 testes para a escolha da distribuição que irá modelar a frequência, conforme detalhados abaixo.

Severidade: AIC e Kolmogorov-Smirnov

Frequência: AIC e Qui-Quadrado

3.4.1. Critério de Informação de Akaike (AIC)

Um critério de informação que tem sido muito usado em seleção de modelos é o critério de Akaike (AIC) (*Akaike, 1973*).

$$AIC = -2 \sum_{i=1}^N \ln L(\hat{\mu}_i, y_i) + 2 \times (\text{número de parâmetros})$$

Onde y_i é o i -ésimo valor da resposta e $\hat{\mu}_i$ é a estimativa de y_i , quando se ajusta um modelo de p parâmetros por meio da maximização da Função de Log-Verossimilhança (FLV). O termo que se adiciona à FLV, chamado de função de penalidade, tem a finalidade de corrigir um viés proveniente da comparação de modelos de diferentes números de parâmetros. Entre vários modelos candidatos, deve ser escolhido aquele que apresentar o menor valor de AIC.

Akaike (1973) desenvolveu uma estimativa da informação K-L, baseada na Função de Log-Verossimilhança (FLV) em seu ponto máximo, acrescida de uma penalidade associada ao número de parâmetros do modelo. Este desenvolvimento pode ser visto em *Burnham & Anderson (2002)*, os quais só recomendam usar o AIC para selecionar modelos quando o número de observações n , é maior do que pelo menos 40 vezes o número de parâmetros, p .

Entendemos que este modelo é satisfatório na análise de nossos dados, por isso será considerado neste estudo e seus resultados serão apresentados no próximo capítulo.

3.4.2. Kolmogorov-Smirnov

O teste Kolmogorov-Smirnov (K-S) é usado para distribuições contínuas e tem como objetivo observar a máxima diferença absoluta entre a função de distribuição acumulada assumida para os dados e a função de distribuição empírica dos dados. De acordo com *Scaillet (2005)*, este teste é baseado na função de distribuição acumulada empírica, e tem a seguinte forma:

$$D_n = \sup|F(x) - F_n(x)|$$

3.4.3. Qui-Quadrado (Pearson)

Testa-se a hipótese nula afirmando-se que a distribuição de frequências de um certo evento observado em uma amostra é consistente com uma distribuição teórica particular. Os eventos considerados devem ser mutuamente excludentes e devem ter probabilidade total 1. Um caso comum para este teste é quando os eventos cobrem um valor de saída de uma variável categórica. Um simples exemplo é a hipótese de que um dado de 6 lados é "honesto" (isto é, todos os sei possíveis valores - 1, 2, 3, 4, 5 e 6 - são equiprováveis).

O valor da estatística de teste é obtido por:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = N \sum_{i=1}^n \frac{(O_i/N - p_i)^2}{p_i}$$

onde :

χ^2 : Estatística de teste cumulativa de Pearson, que assintoticamente se aproxima da distribuição qui-quadrado;

O_i :Número de observações do tipo i;

N :Número total de observações;

$E_i = N p_i$: A frequência esperada (teórica) do tipo i , avaliada sob a hipótese nula de que a fração do tipo i na população p_i ;

n : O número de classes.

3.6. Taxa de Risco (Perda esperada / GNPI)

De acordo com a teoria do risco coletivo, a soma dos valores dos sinistros (sinistro agregado) é denotada por (*Bowers et al. 1997*):

$$S_{col} = \sum_{i=1}^N X_i$$

Onde, N representa o número (aleatório) de sinistros e X_i a severidade de cada sinistro i . É comum assumir-se que N seja proveniente de uma distribuição Poisson ou Binomial Negativa independente da variável X_i . Grande parte da literatura em risco atuarial estuda a distribuição de S_{col} contudo, raramente estes estudos abordam o problema da influência de grandes sinistros no comportamento de S_{col} .

Para a avaliação de contratos de resseguro, uma tarefa relevante é a análise da distribuição de grandes perdas usando-se dados históricos (*Hogg & Klugman, 1984*). Para os contratos baseados em excesso de danos, estamos interessados em mensurar o número de ocorrências e a severidade de sinistros acima de um determinado limiar, chamado de prioridade.

CAPÍTULO 4: DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS

4.1. Levantamento dos Dados: Sinistros Individuais e GNPI Histórico

O primeiro passo para precificar um contrato de excesso de danos com cobertura de risco nos modelos com base na experiência, é fazer o levantamento dos grandes sinistros da carteira e dos GNPIs históricos.

Ressalta-se que a definição de grandes sinistros dependerá da prioridade solicitada e do histórico apresentado. Caso haja um grande nº de sinistros próximo a prioridade, trabalhar com perdas a partir de 50% da prioridade já será suficiente. Porém, caso isso não seja uma realidade o subscritor deverá trabalhar com valores bem menores.

A taxa de burning cost somente será calculada nas faixas onde houver experiência de sinistro atingindo a mesma, já no modelo agregado, serão simulados valores que ainda não foram observados na carteira, sendo possível a geração de taxas para todas as faixas.

Com o modelo agregado, através de distribuições estatísticas, é possível calcular a probabilidade de perdas esperadas de severidades ainda não conhecidas, fazendo dele uma importante ferramenta na precificação de contratos de resseguro.

Os dados utilizados neste trabalho pertencem à empresa fictícia SegNews que solicitou uma cotação de um contrato de Excesso de Danos com estrutura de 4 faixas, que são:

Tabela 1 - Estrutura do Contrato

ESTRUTURA DO CONTRATO				
Faixa	1ª	2ª	3ª	4ª
Limite	2.500.000	5.000.000	20.000.000	30.000.000
Prioridade	2.500.000	5.000.000	10.000.000	30.000.000

Os sinistros trabalhados serão de valores acima de 300.000. Este valor foi escolhido através de vários testes e foi o que gerou uma massa suficiente e com um nível de confiança necessária para o cálculo. Para se definir este corte de sinistros, algumas análises subjetivas são necessárias, além da experiência do

subscritor sobre a carteira. Ressalta-se que não será aprofundada neste estudo este tipo de análise.

Segue a lista dos sinistros que serão utilizados na modelagem. Estes valores já são líquidos dos planos de resseguro proporcional e de cessões facultativas.

Tabela 2 - Perfil de Sinistro

#	ANO DE SUBSCRIÇÃO	VALOR SINISTRO PAGO	VALOR SINISTRO PENDENTE	TIPO DE SINISTRO	Valor do Sinistro Incorrido (Pago + Reserva)	Índice de Inflação para Sinistros	Valor do Sinistro Incorrido Projetado
1	2014	10.577.090	0	RISCO	10.577.090	1,3365	14.135.777
2	2014	5.536.600	0	RISCO	5.536.600	1,3365	7.399.402
3	2014	4.013.470	0	RISCO	4.013.470	1,3365	5.363.811
4	2014	2.352.703	0	RISCO	2.352.703	1,3365	3.144.276
5	2014	1.211.303	983.618	RISCO	2.194.921	1,3365	2.602.466
6	2014	325.657	0	RISCO	325.657	1,3365	435.226
7	2015	45.443.550	0	RISCO	45.443.550	1,2561	57.080.020
8	2015	2.034.698	0	RISCO	2.034.698	1,2561	2.555.711
9	2015	1.964.474	81.361	RISCO	2.045.835	1,2561	2.548.866
10	2015	1.017.349	0	RISCO	1.017.349	1,2561	1.277.856
11	2015	562.933	0	RISCO	562.933	1,2561	707.080
12	2016	5.856.915	0	RISCO	5.856.915	1,1350	6.647.386
13	2016	3.766.654	0	RISCO	3.766.654	1,1350	4.275.016
14	2016	2.499.378	0	RISCO	2.499.378	1,1350	2.836.703
15	2016	1.512.895	0	RISCO	1.512.895	1,1350	1.717.081
16	2016	470.882	173.403	RISCO	644.285	1,1350	707.837
17	2017	488.920	1.641.882	RISCO	2.130.802	1,0679	2.164.000
18	2017	1.537.488	0	RISCO	1.537.488	1,0679	1.641.882
19	2017	798.160	660.000	RISCO	1.458.160	1,0679	1.512.355
20	2017	1.319.855	0	RISCO	1.319.855	1,0679	1.409.472
21	2017	1.044.860	0	RISCO	1.044.860	1,0679	1.115.806
22	2017	308.279	0	RISCO	308.279	1,0679	329.211
23	2018	5.807.337	0	RISCO	5.807.337	1,0374	6.024.532
24	2018	535.621	2.164.000	RISCO	2.699.621	1,0374	2.719.653
25	2018	1.350.286	0	RISCO	1.350.286	1,0374	1.400.786
26	2018	866.220	168.555	RISCO	1.034.775	1,0374	1.067.172

Tabela 3 - Histórico de GNPI

Ano do Contrato	GNPI Histórico	Índice Final de Inflação	GNPI Projetado
2014	68.890.500	1,3365	92.068.873
2015	76.545.000	1,2561	96.145.440
2016	85.050.000	1,1350	96.528.659
2017	94.500.000	1,0679	100.916.508
2018	105.000.000	1,0374	108.927.000

4.2. Índice de Inflação

A aplicação de índices de correção nos sinistros que serão utilizados na precificação é necessária para que se tenha valores atualizados no momento da precificação. Estes índices deverão ser aplicados apenas nos sinistros ganhos, já que os em reserva, acima identificados como pendentes, já são atualizados pela cedente no momento do envio dos dados. Em nosso cálculo, consideramos que os sinistros ocorreram todos no início de cada ano e utilizamos o IPCA para correção dos valores dos sinistros.

4.3. Cálculo do Burning Cost

Tabela 4 - Detalhamento do Cálculo do Burning Cost

ESTRUTURA DO CONTRATO				
Faixa	1ª	2ª	3ª	4ª
Limite	2.500.000	5.000.000	20.000.000	30.000.000
Prioridade	2.500.000	5.000.000	10.000.000	30.000.000

TOTAL DE SINISTRO NA FAIXA (S)				
Faixa	1ª	2ª	3ª	4ª
2014	8.246.742	7.763.213	4.135.777	-
2015	2.604.577	5.000.000	20.000.000	27.080.020
2016	4.611.719	1.647.386	-	-
2017	-	-	-	-
2018	2.719.653	1.024.532	-	-

GNPI HISTÓRICO (P)				
Faixa	1ª	2ª	3ª	4ª
2014	92.068.873	92.068.873	92.068.873	92.068.873
2015	96.145.440	96.145.440	96.145.440	96.145.440
2016	96.528.659	96.528.659	96.528.659	96.528.659
2017	100.916.508	100.916.508	100.916.508	100.916.508
2018	108.927.000	108.927.000	108.927.000	108.927.000

TAXA DE BURNING COST (S / P)				
Faixa	1ª	2ª	3ª	4ª
2014	8,95714%	8,43196%	4,49205%	0,00000%
2015	2,70900%	5,20045%	20,80182%	28,16568%
2016	4,77756%	1,70663%	0,00000%	0,00000%
2017	0,00000%	0,00000%	0,00000%	0,00000%
2018	2,49677%	0,94057%	0,00000%	0,00000%

Tabela 5 - Resultado do Cálculo do Burning Cost

TAXA DE BURNING COST Média ($\sum S / \sum P$) - TBC				
Faixa	1ª	2ª	3ª	4ª
2019	3,67634%	3,12082%	4,87999%	5,47529%
Total				17,15243%

Tabela 6 - GNPI Esperado 2019

GNPI ESTIMADO - NOVO ANO				
Faixa	1ª	2ª	3ª	4ª
2019	120.000.000	120.000.000	120.000.000	120.000.000

Tabela 7 - Prêmio de Risco do Burning Cost por Faixa do Contrato

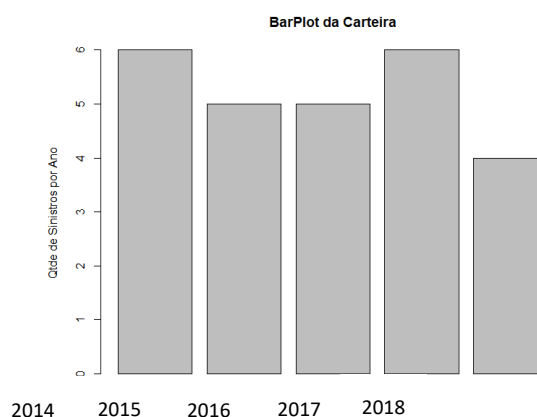
PRÊMIO DE RISCO - NOVO ANO (TBC x GNPI)				
Faixa	1ª	2ª	3ª	4ª
2019	4.411.610	3.744.978	5.855.989	6.570.342
Total				20.582.920

Isto é, com base exclusivamente na experiência passada observada pela carteira da SegNews, a taxa estatística para que a resseguradora aceitasse o risco nos moldes do contrato solicitado seria de 17,15% dos prêmios da carteira, resultando em uma expectativa de arrecadação de R\$ 20,6 milhões.

4.4. Análise da Distribuição de Frequência

Figura 8 - Análise Gráfica e Principais Estatísticas

Ano	Frequência
2014	6
2015	5
2016	5
2017	6
2018	4
Total	26
Média	5,20
Desvio Padrão	0,84
Variância	0,70
CV	0,16



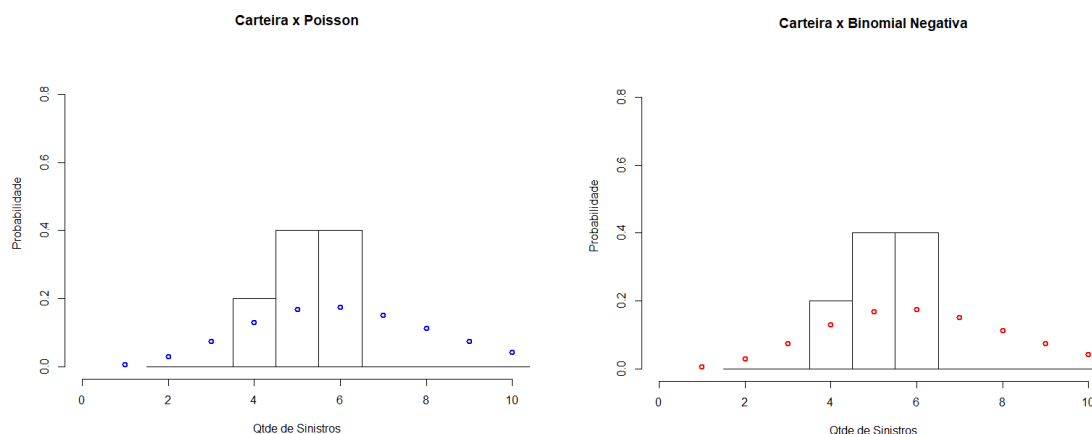
Como a frequência é uma variável discreta, iremos obter o melhor modelo por meio de ajustes das distribuições de Poisson e Binominal Negativa que são as distribuições mais utilizadas para modelagem da frequência pelo mercado segurador. Para tanto, estimaremos os parâmetros dessas distribuições pelo

método da máxima verossimilhança.

Tabela 8 - Estimador dos Parâmetros para Distribuições de Frequência

	Poisson (λ)	Binomial Negativa (k,p)
Estimador Máxima Verossimilhança - EMV	5,2	999,9978 e 0,9948

Figura 9 - Análise Gráfica: Carteira x Distribuição de frequência



Apenas pela análise gráfica não é possível concluir qual a distribuição traz o melhor ajuste para o histórico de frequência de sinistros verificada na carteira. A diferença entre as curvas das distribuições analisadas aparenta ser pequena e desta forma procederemos a escolha do melhor modelo através da realização de testes estatísticos.

Tendo em vista que a distribuição de frequência é uma variável discreta, não é aconselhável a realização do teste Kolmogorov-Smirnov (KS) devido o mesmo ser melhor aplicável a variáveis contínuas.

Desta forma tentaremos obter parâmetros para escolha do melhor ajuste para frequência por meio dos testes AIC (Critério de Informação de Akaike) e χ^2 (Qui-quadrado - Pearson).

Teste AIC (Critério de Akaike)

O teste do AIC permite a comparação entre modelos, nele busca-se o modelo que minimiza a divergência (K-L), sendo considerado como melhor modelo aquele que apresenta o menor AIC.

$$AIC = -2 \times \text{Verossimilhança} + 2 \times n^{\circ} \text{ de parâmetros do modelo}$$

Tabela 9 - Comparação do AIC

COMPARAÇÃO DO AIC	
Poisson ($\lambda=5,2$)	20,0928
Binomial Negativa ($k=999,9978$ e $p=0,9948$)	22,1160

Pelo critério AIC a distribuição de Poisson, dentre as distribuições analisadas, é a que melhor se ajusta a frequência de sinistros da carteira analisada.

Teste X^2 (Pearson - Goodness of fit test)

Pelo teste do X^2 (Pearson) rejeita-se a hipótese, neste caso a distribuição a ser testada, caso o p-valor obtido no teste seja inferior ao nível de significância que se deseja trabalhar.

Tabela 10 - Teste do X^2 (Pearson)

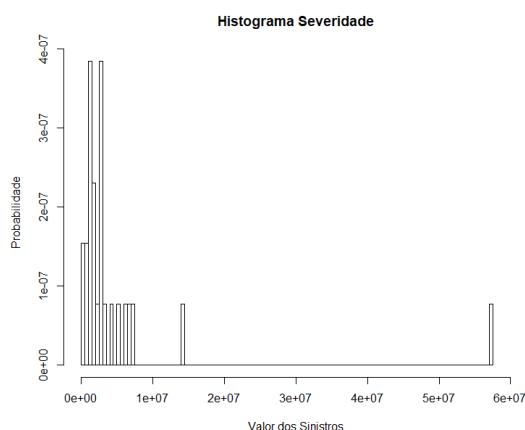
TESTE DO X^2	
Poisson ($\lambda=5,2$)	0.8482
Binomial Negativa ($k=999,9978$ e $p=0,9948$)	0.8477

Como o p-valor tanto para a distribuição de Poisson como para a Binomial Negativa ficaram muito próximos, não é possível utilizar o resultado do teste X^2 para descartar alguma das distribuições tendo em vista que ambas não foram rejeitadas pelo teste.

4.5. Análise da Distribuição de Severidade

Figura 10 - Análise Gráfica e Principais Estatísticas da Distribuição de Severidade

Ano	Sinistros
2014	33.080.958
2015	64.169.532
2016	16.184.022
2017	8.172.726
2018	11.212.144
Total	132.819.381
Média	5.108.438
Desvio Padrão	11.006.796
Variância	121.149.564.893.451
CV	2,15



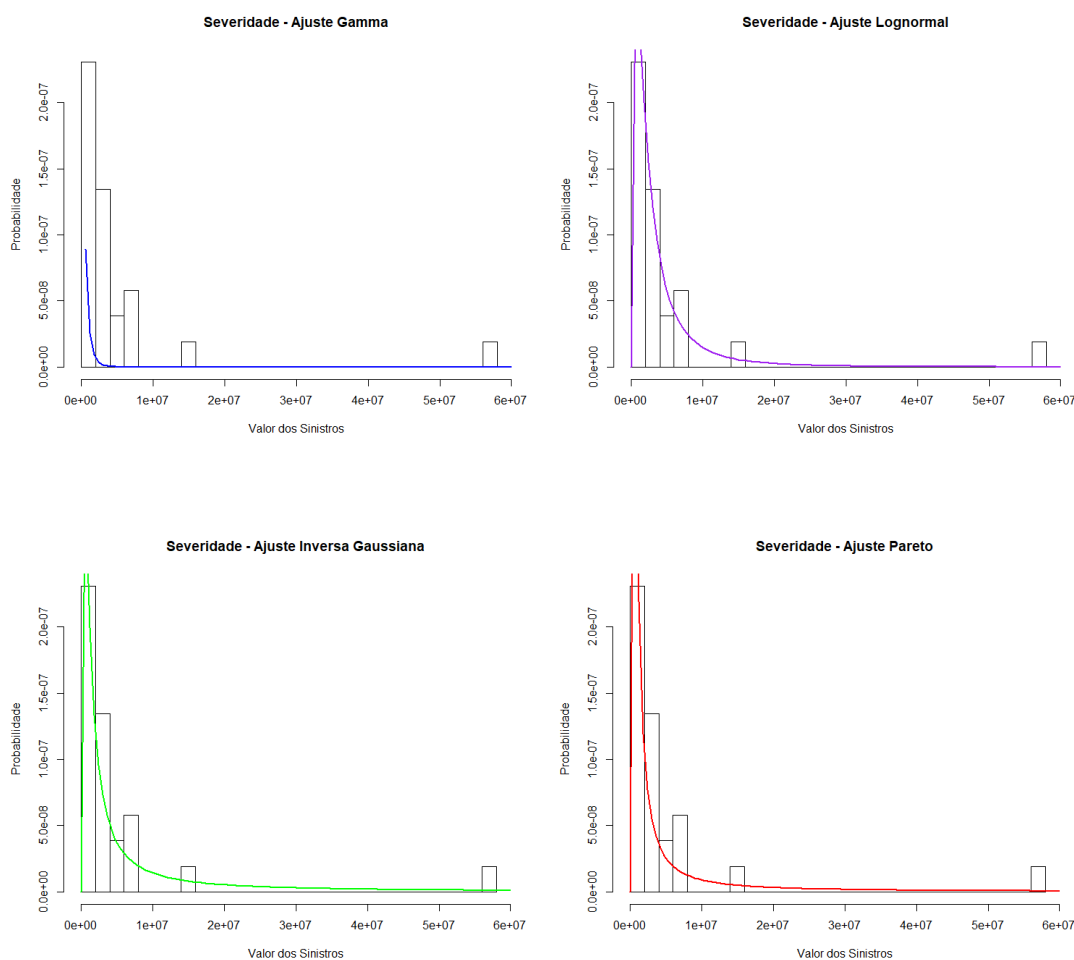
A severidade dos sinistros é uma variável contínua e estritamente positiva, com isso iremos tentar obter o melhor modelo por meio de ajustes das distribuições Gamma, Lognormal, Pareto e Inversa Gaussiana.

Para tanto, estimaremos os parâmetros dessas distribuições pelo método de máxima verossimilhança.

Tabela 11 - Estimador dos Parâmetros para Distribuições de Frequência

	Gamma (α, β)	Lognormal (μ, σ)	Inversa Gaussiana (a,b)	Pareto (α, k)
Estimador Máxima Verossimilhança - EMV	0,1 e $1,0545e^{-6}$	14,6702 e 1,0737	1863695822 e 1470395	$3.29210e^{+5}$ e $5.0869e^{-1}$

Figura 11 - Análise Gráfica: Carteira x Distribuição de Severidade



Apenas pela análise gráfica das observações dos sinistros da carteira frente as curvas de ajuste obtidas pelas distribuições testadas, cujos parâmetros foram obtidos por meio de estimadores de máxima verossimilhança, não é possível definir qual das distribuições testadas melhor se ajusta aos dados. Entretanto, aparentemente os ajustes obtidos para distribuição de Gamma e de Pareto não parecem ser a melhor opção.

Em seguida, foi verificado qual distribuição tem melhor ajuste para severidade da carteira observada por meio dos testes AIC (Critério de Informação de Akaike) e do teste KS (Kolmogorov-Smirnov).

Teste AIC

O teste do AIC permite a comparação entre modelos, nele busca-se o modelo que minimiza a divergência (K-L), sendo considerado como melhor modelo aquele que apresenta o menor AIC.

$$AIC = -2 \times \text{Verossimilhança} + 2 \times n^{\circ} \text{ de parâmetros do modelo}$$

Tabela 12 - Comparação do AIC - Severidade

COMPARAÇÃO DO AIC	
<i>Gamma</i> ($\alpha = 0,1$, $\beta=1,0545e^{-6}$)	1.159,3940
<i>Lognormal</i> ($\mu = 14,6702$, $\sigma = 1,0737$)	844,3402
<i>Inversa Gaussiana</i> ($a = 1863695822$, $b = 1470395$)	852,7967
<i>Pareto</i> ($\alpha = 3.29210e^{+5}$, $k = 5.0869e^{-1}$)	853,9998

Pelo critério do AIC a distribuição LogNormal, dentre as distribuições analisadas, é a que melhor se ajusta a severidade de sinistros da carteira.

Teste Kolmogorov-Smirnov (KS)

Pelo teste do KS, de forma análoga ao teste X^2 há evidências para rejeitar-se a hipótese, neste caso a distribuição testada, caso o p-valor obtido no teste seja inferior ao nível de significância que se deseja obter.

Tabela 13 - Comparação do Teste KS - Severidade

TESTE KOLMOGOROV-SMIRNOV (KS)	
<i>Gamma</i> ($\alpha = 0,1$, $\beta=1,0545e^{-6}$)	$5,5510e^{-16}$
<i>Lognormal</i> ($\mu = 14,6702$, $\sigma = 1,0737$)	0,7738
<i>Inversa Gaussiana</i> ($a = 1863695822$, $b = 1470395$)	0,0400
<i>Pareto</i> ($\alpha = 3.29210e^{+5}$, $k = 5.0869e^{-1}$)	0,0161

Como pode ser observado, os resultados dos testes de Kolmogorov Smirnov evidenciaram que tanto há evidências para rejeição de 3 das 4 distribuições testadas para cada carteira a um nível de significância de 5%.

Desta forma, ao nível de significância de 5%, o teste não dispôs de evidências para rejeição apenas para a distribuição LogNormal.

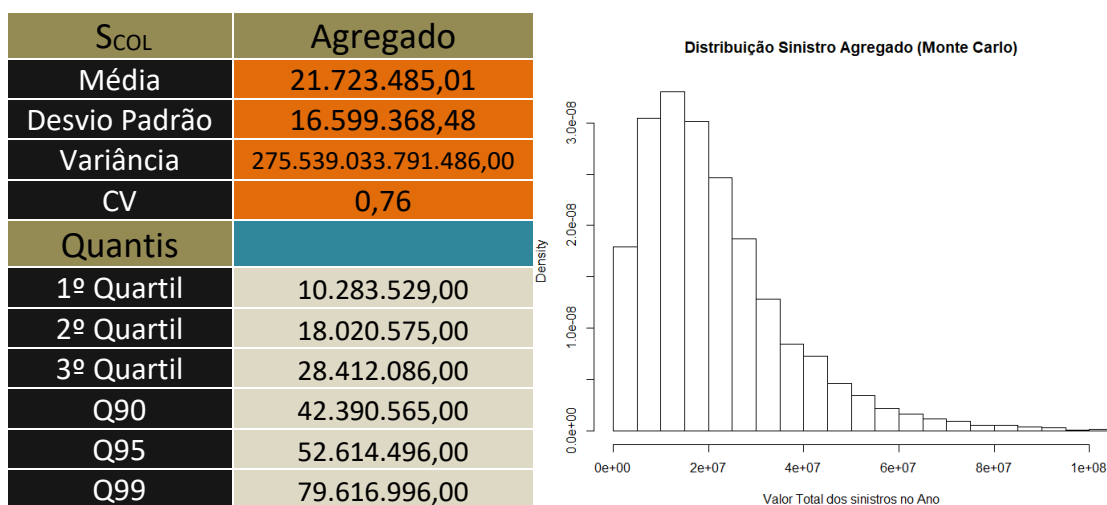
4.6. Distribuição do Sinistro Agregado (S^{COL})

Existem diferentes formas para apurarmos a distribuição do sinistro agregado, neste trabalho apuraremos a mesma através aplicação do método numérico de Monte Carlo, usualmente conhecida como simulação de Monte Carlo.

A aplicação do método numérico de Monte Carlo consiste na realização de um grande número de simulações com o objetivo de obter um volume robusto de dados gerados a partir dos parâmetros da distribuição da frequência e da severidade modelados, de tal forma que se supõe, dado o volume de dados gerados, que essas simulações assumirão uma boa estimativa para a distribuição de S^{COL} .

Abaixo segue histograma da distribuição estimada dos sinistros da carteira da Segnews, obtida por meio de simulações de Monte Carlo:

Figura 12 - Análise Gráfica: Carteira x Distribuição de Severidade



$$E[N] = \lambda = 5,2 \quad e \quad Var(X) = \lambda = 5,2$$

$$E[X] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) = 4.183.320,41$$

$$Var(X) = \exp(2\mu + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1) = 3,792547$$

$$E[S_{COL}]^{TEÓRICO} = E[N] \times E[X] = 5,2 \times 4.183.320,41 = 21.753.266,12$$

$$Var(S_{COL})^{TEÓRICO} = Var(X) \times E[N] + E[X]^2 \times Var(N) = 288.213.316.903.779,00$$

Os valores da média e variância teóricos e simulados de S^{COL} são próximos!

Tabela 14 - Sinistros Agregado Simulados

A tabela a seguir exemplifica como foi realizado a simulação de Monte Carlo para obtenção do sinistro agregado:

# SIM	Freq	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	V16	V17	TOTAL	
1	2	202.827,91	5.333.530,66	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5.536.358,57	
2	5	611.339,65	3.206.177,43	2.620.122,12	2.858.564,63	1.145.063,98	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	10.441.267,80	
3	4	1.889.776,65	4.045.739,44	3.103.780,25	715.559,50	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	9.754.855,84	
4	5	796.850,53	1.295.699,97	4.568.220,74	616.668,57	484.619,07	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7.762.058,88	
5	4	5.497.689,50	2.523.755,84	2.952.548,78	4.253.309,35	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	15.227.303,48	
6	3	2.099.756,92	3.455.505,93	3.511.155,97	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	9.066.418,82	
7	8	1.707.993,47	26.088.540,85	4.682.378,98	735.679,42	10.192.359,06	1.060.472,17	2.503.902,01	7.654.050,39	-	-	-	-	-	-	-	-	-	54.625.376,35	
8	3	9.665.875,33	3.457.001,62	21.082.086,37	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	34.204.963,31	
9	10	13.614.147,47	3.777.778,71	2.406.733,80	6.815.604,37	2.025.221,15	3.813.357,01	3.261.360,41	970.340,96	7.448.733,10	3.059.489,23	-	-	-	-	-	-	-	47.192.766,20	
10	3	11.100.321,81	1.298.373,14	1.871.756,14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	14.270.451,09	
...	
43	7	1.542.203,95	2.668.580,23	77.842.472,26	3.897.484,57	996.244,26	1.348.540,29	2.284.350,29	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	90.579.875,86	
...	
9793	17	1.731.416,01	708.170,23	4.456.298,56	590.039,47	2.322.826,56	607.712,83	5.919.553,54	13.613.069,08	5.350.219,47	413.947,78	1.467.508,73	733.041,14	977.620,16	548.413,90	237.139,33	822.467,87	2.615.006,93	43.114.451,59	
...	
10000	7	866.229,26	5.319.233,40	3.394.630,13	462.757,15	5.310.050,42	3.227.143,36	3.601.793,29	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	22.181.837,00	
																			E[S ^{COL}]	21.723.485,01
																			IC (95%) – Lim. Inferior	1.991.349,97
																			IC (95%) – Lim.Superior	63.815.799,19

Primeiramente foram geradas 10.000 simulações de frequência com base na distribuição Poisson ($\lambda = 5,2$). De acordo com os resultados obtidos para cada simulação de frequência foram gerados os sinistros com base na distribuição LogNormal ($\mu = 14,6702$, $\sigma = 1,0737$). A soma dos resultados de cada linha corresponde a uma simulação de sinistro agregado.

Entretanto, como estamos analisando uma proposta de resseguro por excesso de danos por sinistro e não uma proposta de “stop loss”, onde a cobertura da resseguradora ocorre com base nas perdas totais da carteira, nos interessa ter o conhecimento do valor a ser arcado pela resseguradora para cada sinistro. Desta forma, devemos aplicar a estrutura do contrato de resseguro proposto sobre os sinistros simulados para mensurar o desembolso esperado do Ressegurador para o contrato da SegNews.

Tabela 15 - Sinistros Simulados – Sinistros retidos pela Seguradora à título de prioridade

# SIM	Freq	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	V16	V17	TOTAL	
1	2	202.827,91	2.500.000,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2.702.827,91	
2	5	611.339,65	2.500.000,00	2.500.000,00	2.500.000,00	1.145.063,98	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	9.256.403,63	
3	4	1.889.776,65	2.500.000,00	2.500.000,00	715.559,50	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7.605.336,15	
4	5	796.850,53	1.295.699,97	2.500.000,00	616.668,57	484.619,07	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5.693.838,14	
5	4	2.500.000,00	2.500.000,00	2.500.000,00	2.500.000,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	10.000.000,00	
6	3	2.099.756,92	2.500.000,00	2.500.000,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7.099.756,92	
7	8	1.707.993,47	2.500.000,00	2.500.000,00	735.679,42	2.500.000,00	1.060.472,17	2.500.000,00	2.500.000,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	16.004.145,06	
8	3	2.500.000,00	2.500.000,00	2.500.000,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7.500.000,00	
9	10	2.500.000,00	2.500.000,00	2.406.733,80	2.500.000,00	2.025.221,15	2.500.000,00	2.500.000,00	970.340,96	2.500.000,00	2.500.000,00	-	-	-	-	-	-	-	22.902.295,91	
10	3	2.500.000,00	1.298.373,14	1.871.756,14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5.670.129,29	
...	
43	7	1.542.203,95	2.500.000,00	2.500.000,00	2.500.000,00	996.244,26	1.348.540,29	2.284.350,29	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	13.671.338,80	
...	
9793	17	1.731.416,01	708.170,23	2.500.000,00	590.039,47	2.322.826,56	607.712,83	2.500.000,00	2.500.000,00	2.500.000,00	413.947,78	1.467.508,73	733.041,14	977.620,16	548.413,90	237.139,33	822.467,87	2.500.000,00	23.660.304,01	
...	
10000	7	866.229,26	2.500.000,00	2.500.000,00	462.757,15	2.500.000,00	2.500.000,00	2.500.000,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	13.828.986,40	
																			E[Prioridade]	9.502.059,17
																			IC (95%) – Lim. Inferior	1.991.349,97
																			IC (95%) – Lim.Superior	19.373.798,45

A tabela acima apresenta os valores simulados que seriam retidos pela SegNews à título de prioridade.

Conforme desenho da estrutura de resseguro proposta, a resseguradora somente arcará parcialmente ou totalmente com os valores de sinistros que excederem a prioridade de 2.500.000,00. Dessa forma na tabela acima verificamos os valores esperados, com base nos resultados da simulação da frequência e severidade dos sinistros pelo método numérico de monte carlo, a serem retidos pelas SegNews a título de prioridade.

Com base nos cenários simulados verificou-se que em média o valor esperado da prioridade a ser assumida pela SegNews para o próximo ano será de 9.502.059,17.

Tabela 16 - Sinistros Simulados – Sinistros pagos pela Resseguradora na Faixa 1

# SIM	Freq	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	V16	V17	TOTAL	
1	2	-	2.500.000,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2.500.000,00	
2	5	-	706.177,43	120.122,12	358.564,63	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.184.864,17	
3	4	-	1.545.739,44	603.780,25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2.149.519,69	
4	5	-	-	2.068.220,74	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2.068.220,74	
5	4	2.500.000,00	23.755,84	452.548,78	1.753.309,35	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4.729.613,97	
6	3	-	955.505,93	1.011.155,97	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.966.661,89	
7	8	-	2.500.000,00	2.182.378,98	-	2.500.000,00	-	3.902,01	2.500.000,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	9.686.280,99	
8	3	2.500.000,00	957.001,62	2.500.000,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5.957.001,62	
9	10	2.500.000,00	1.277.778,71	-	2.500.000,00	-	1.313.357,01	761.360,41	-	2.500.000,00	559.489,23	-	-	-	-	-	-	-	11.411.985,35	
10	3	2.500.000,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2.500.000,00	
...	
43	7	-	168.580,23	2.500.000,00	1.397.484,57	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4.066.064,81	
...	
9793	17	-	-	1.956.298,56	-	-	-	2.500.000,00	2.500.000,00	2.500.000,00	-	-	-	-	-	-	-	115.006,93	9.571.305,49	
...	
10000	7	-	2.500.000,00	894.630,13	-	2.500.000,00	727.143,36	1.101.793,29	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7.723.566,78	
																			E[Faixa1]	4.444.655,95
																			IC (95%) – Lim. Inferior	0,00
																			IC (95%) – Lim.Superior	11.528.966,54

A tabela acima apresenta os valores simulados que seriam pagos pela Resseguradora relativos a Faixa 1 da estrutura. Recordando, a Faixa 1 apresenta prioridade de 2.500.000,00 e limite também de 2.500.000,00, isto é, paga-se indenização de sinistros de valores superiores a 2.500.000,00 com indenizações individuais de valor limitado também a 2.500.000,00.

Com base nos cenários simulados verificou-se que em média o valor esperado a ser coberto pelo resseguradora para o próximo ano relativa a Faixa 1 da estrutura de resseguro proposta pela SegNews será de 4.444.655,95.

Tabela 17 - Sinistros Simulados – Sinistros pagos pela Resseguradora na Faixa 2

# SIM	Freq	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	V16	V17	TOTAL	
1	2	-	333.530,66	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	333.530,66	
2	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
3	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
4	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
5	4	497.689,50	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	497.689,50	
6	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
7	8	-	5.000.000,00	-	-	5.000.000,00	-	-	2.654.050,39	-	-	-	-	-	-	-	-	-	12.654.050,39	
8	3	4.665.875,33	-	5.000.000,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	9.665.875,33	
9	10	5.000.000,00	-	-	1.815.604,37	-	-	-	-	2.448.733,10	-	-	-	-	-	-	-	-	9.264.337,47	
10	3	5.000.000,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5.000.000,00	
...	
43	7	-	-	5.000.000,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5.000.000,00	
...	
9793	17	-	-	-	-	-	-	919.553,54	5.000.000,00	350.219,47	-	-	-	-	-	-	-	-	6.269.773,01	
...	
10000	7	-	319.233,40	-	-	310.050,42	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	629.283,81	
																			E[Faixa2]	3.860.097,36
																			IC (95%) – Lim. Inferior	0,00
																			IC (95%) – Lim.Superior	13.895.002,87

A tabela acima apresenta os valores simulados que seriam pagos pela Resseguradora relativos a Faixa 2 da estrutura. Recordando, a Faixa 2 apresenta prioridade de 5.000.000,00 e limite também de 5.000.000,00, isto é, paga-se indenização de sinistros de valores superiores a 5.000.000,00 com indenizações individuais de valor limitado também a 5.000.000,00. A prioridade da Faixa 2 é definida como Prioridade da Faixa 1 (2.500.000,00) + Limite da Faixa 1 (2.500.000,00), tendo em vista que a segunda faixa somente será acionada caso a primeira seja esgotada.

Com base nos cenários simulados verificou-se que em média o valor esperado a ser coberto pela resseguradora para o próximo ano relativa a Faixa 2 da estrutura de resseguro proposta pela SegNews será de 3.860.097,36.

Tabela 18 - Sinistros Simulados – Sinistros pagos pela Resseguradora na Faixa 3

# SIM	Freq	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	V16	V17	TOTAL	
1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
2	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
3	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
4	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
5	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
6	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
7	8	-	16.088.540,85	-	-	192.359,06	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	16.280.899,91	
8	3	-	-	11.082.086,37	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	11.082.086,37	
9	10	3.614.147,47	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3.614.147,47	
10	3	1.100.321,81	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.100.321,81	
...	
43	7	-	-	20.000.000,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	20.000.000,00	
...	
9793	17	-	-	-	-	-	-	-	3.613.069,08	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3.613.069,08	
...	
10000	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
																			E[Faixa3]	3.147.297,27
																			IC (95%) – Lim. Inferior	0,00
																			IC (95%) – Lim.Superior	20.000.000,00

A tabela acima apresenta os valores simulados que seriam pagos pela Resseguradora relativos a Faixa 3 da estrutura. Recordando, a Faixa 3 apresenta prioridade de 10.000.000,00 e limite de 20.000.000,00, isto é, paga-se indenização de sinistros de valores superiores a 10.000.000,00 com indenizações individuais de valor limitado a 20.000.000,00. A prioridade da Faixa 3 é definida como Prioridade da Faixa 2 (5.000.000,00) + Limite da Faixa 2 (5.000.000,00), tendo em vista que a terceira faixa somente será acionada caso a primeira e a segunda faixa sejam esgotadas.

Com base nos cenários simulados verificou-se que em média o valor esperado a ser coberto pelo resseguradora para o próximo ano relativa a Faixa 3 da estrutura de resseguro proposta pela SegNews será de 3.147.297,27.

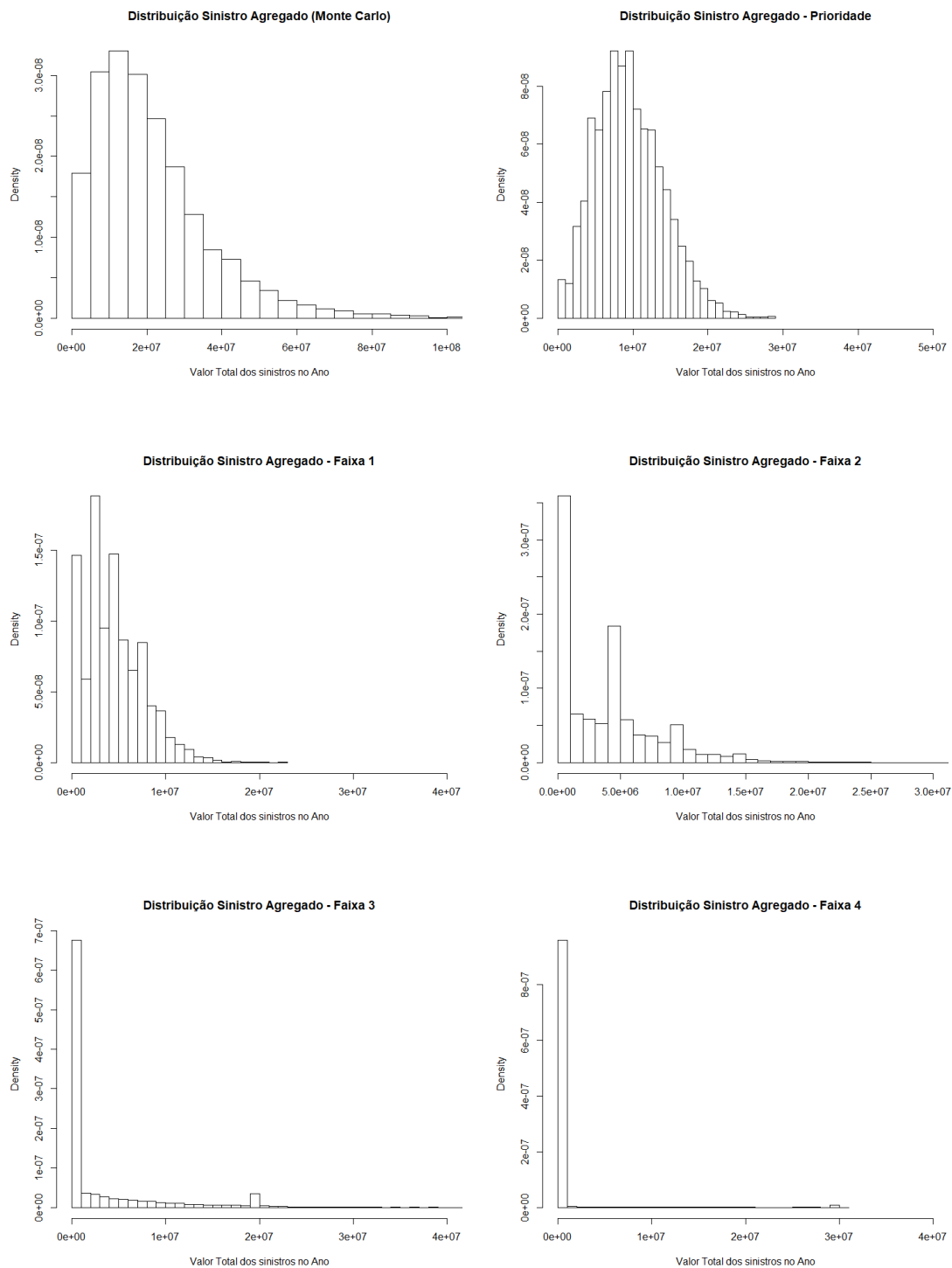
Tabela 19 - Sinistros Simulados – Sinistros pagos pela Resseguradora na Faixa 4

# SIM	Freq	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	V16	V17	TOTAL	
1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
...
43	7	-	-	30.000.000,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	30.000.000,00
...
9793	17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
...
10000	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
																			E[Faixa4]	569.418,03
																			IC (95%) – Lim. Inferior	0,00
																			IC (95%) – Lim.Superior	8.292.437,96

A tabela acima apresenta os valores simulados que seriam pagos pela Resseguradora relativos a Faixa 4 da estrutura. Recordando, a Faixa 4 apresenta prioridade de 30.000.000,00 e limite de 30.000.000,00, isto é, paga-se indenização de sinistros de valores superiores a 30.000.000,00 com indenizações individuais de valor limitado a 30.000.000,00. A prioridade da Faixa 4 é definida como Prioridade da Faixa 3 (10.000.000,00) + Limite da Faixa 3 (20.000.000,00), tendo em vista que a terceira faixa somente será acionada caso a primeira, a segunda e a terceira faixa sejam esgotadas.

Com base nos cenários simulados verificou-se que em média o valor esperado a ser coberto pelo resseguradora para o próximo ano relativa a Faixa 4 da estrutura de resseguro proposta pela SegNews será de 569.418,03.

Figura 13 - Histogramas dos Sinistros Agregados na Estrutura do Resseguro Proposta



Conforme pode-se observar nos histogramas, as simulações geraram cenários em que os sinistros atingem valores em todas as faixas do contrato, o que é muito importante já que muitas vezes a análise histórica de períodos curtos não permitirá a visualização de tais eventos e consequentemente podemos estar subestimando os prêmios a serem cobrados da SegNews.

Além da observação de sinistros em todas as faixas da estrutura de resseguro proposta é igualmente importante observar a distribuição desses sinistros entre as faixas. Em nosso exemplo, as simulações mostram que a probabilidade de ocorrência de sinistros da carteira da SegNews na 4ª faixa é baixa, entretanto, tendo em vista que nosso histórico contém o valor de um sinistro de valor destoante, ao realizar a precificação apenas com base nos dados históricos poderíamos estar incorrendo na apuração de alíquotas muito elevadas que inviabilizariam a contratação da cobertura.

4.7. Prêmio Estatístico e Taxa Pura de Risco

O cálculo do prêmio estatístico com base no modelo agregado é realizado de forma similar ao cálculo do Burning Cost, entretanto, ao invés de utilizarmos os sinistros e prêmios históricos serão utilizados as perdas ($E[S_{COL}]$) e prêmios esperados (GNPI).

O prêmio estimado em geral é apurado com base nas projeções informadas pela seguradora. Em nosso estudo consideraremos que os prêmios projetados para o próximo ano da SegNews montam 120.000.000,00.

Os sinistros esperados serão obtidos a partir dos resultados das simulações pelo método numérico de Monte Carlo e aplicação de resseguro proposta conforme exemplificado nas Tabelas 1 a 6. Desta forma temos:

Tabela 20 - Resultados das Simulações de Sinistros

RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES DE SINISTROS				
Faixa	1ª	2ª	3ª	4ª
GNPI 2019	120.000.000	120.000.000	120.000.000	120.000.000
Limite	2.500.000	5.000.000	10.000.000	30.000.000
<i>Perda Esperada</i>	4.444.655,95	3.860.097,36	3.147.297,27	569.418,03
<i>IC (95%) – Lim. Inferior</i>	-	-	-	-
<i>IC (95%) – Lim. Superior</i>	11.528.966,54	13.895.002,87	20.000.000,00	8.292.437,96
<i>Desvio Padrão</i>	3.128.298,38	3.998.004,23	6.252.382,76	3.432.790,50
<i>Coeficiente de Variação</i>	0,70	1,04	1,99	6,03
<i>Frequência Esperada</i>	2,49	1,25	0,47	0,05
<i>Valor Médio (por Sinistro)</i>	1.787.874,48	3.079.864,92	6.729.787,47	12.289.597,79
<i>R.O.L. - Rate on Line</i>	177,79%	77,20%	15,74%	1,90%

Com relação a reintegração deste contrato, vamos considerar reintegrações ilimitadas e com custos zero. Neste caso, a taxa estatística será calculada com base em toda perda esperada, ou seja, sinistros ilimitados. Caso fossemos considerar um limite de reintegração, teríamos que calcular a perda esperada com base no limite anual agregado, mas não é objetivo deste trabalho evoluir o estudo da reintegração e nem mesmo no cálculo do desconto do prêmio de reintegração.

O R.O.L é a relação entre o prêmio de resseguro de uma determinada faixa do contrato comparado com o limite de cobertura desta faixa. Este indicador é utilizado para mensurar de forma comparativa a exposição ao risco de determinada carteira com outras já assumidas pelo ressegurador. O mercado também utiliza o ROL como uma forma de mensurar o “custo do resseguro”, sugerindo a redução do ROL é reflexo da redução do preço do resseguro. Além disso, a ROL indica o payback da faixa, ou seja, quantos anos a carteira será recuperada caso tenha uma perda total, considerando o prêmio da faixa ou do contrato.

Tabela 21 - Prêmio Puro de Risco (Perda Esperada)

PRÊMIO PURO DE RISCO (PERDA ESPERADA)				
Faixa	1ª	2ª	3ª	4ª
2019	4.444.655,95	3.860.097,36	3.147.297,27	569.418,03
			Total	12.021.468,62

Na modelagem do prêmio agregado para cobertura de contratos de resseguro por excesso de danos por risco utilizando simulações pelo método numérico de Monte Carlo, o prêmio puro de risco é equivalente ao valor dos sinistros esperados com base na média dos cenários de perda agregada simulados. O valor do prêmio puro de risco equivale ao valor esperado a ser arrecadado com os prêmios de resseguro.

Com base na carteira projetada da SegNews, esperamos que arrecadação total para cobertura de resseguro no ano de 2019, caso sejam contratadas todas as faixas do contrato, totalizem aproximadamente R\$ 12 milhões.

Tabela 22 - Taxa Pura de Risco (Perda Esperada / GNPI)

TAXA PURA DE RISCO (PERDA ESPERADA / GNPI)				
Faixa	1ª	2ª	3ª	4ª
2019	3,7039%	3,2167%	2,6227%	0,4745%
			Total	10,0179%

A apuração da Taxa Pura de Risco, ocorre de forma análoga ao Burning Cost. Entretanto, ao invés de dividirmos os sinistros passados pelo GNPI histórico da carteira a ser segurada, trabalhamos com os valores projetados de sinistro e GNPI para o próximo período de vigência da apólice.

A Taxa Pura de Risco para resseguro da carteira da SegNews, considerando a estrutura contratual proposta e uma precificação de distribuição de sinistro agregado com utilização de simulação de Monte Carlo, foi de 10,0179%. Este percentual será aplicado sobre o GNPI a ser observado em 2019, sendo inicialmente esperada uma arrecadação de resseguro de R\$ 12 milhões.

4.8. GNPI Projetado de 2019

O GNPI (Gross Net Premium Income) representa o prêmio líquido que a carteira possui de qualquer outro resseguro vigente em benefício dos mesmos riscos. Em nosso estudo consideraremos que os prêmios líquidos projetados da SegNews para o próximo ano montam 120.000.000,00 (GNPI 2019).

4.9. Distribuição Agregada vs Burning Cost

Tabela 23 - Prêmios de Risco Esperadas para 2019

PRÊMIO DE RISCO ESPERADO 2019					
Faixa	1ª	2ª	3ª	4ª	Total
BURNING COST	4.411.610	3.744.978	5.855.989	6.570.342	20.582.919
SINISTRO AGREGADO	4.444.655	3.860.097	3.147.297	569.418	12.021.467
VAR(%)	0,7%	3,1%	-46,3%	-91,3%	-41,6%

Tabela 24 - Taxas de Risco Esperada para 2019

TAXA PURA DE RISCO 2019					
Faixa	1ª	2ª	3ª	4ª	Total
BURNING COST	3,6763%	3,1208%	4,8700%	5,4753%	17,1424%
SINISTRO AGREGADO	3,7039%	3,2167%	2,6227%	0,4745%	10,0178%

Como pode-se observar a diferença entre os valores observados pelo método do Burning Cost e do Sinistro Agregado com utilização de Monte Carlo para as Faixas 1 e 2 do contrato são relativamente pequenas, isso ocorre pelo fato dessas faixas serem as faixas com maior concentração de sinistros com base no histórico observado da SegNews.

Já as divergências para as faixas 3 e 4 se dão pela ocorrência de dois sinistros de valor superior as prioridades destas faixas, pois apresentam baixa probabilidade de ocorrência pelo modelo adotado, o qual prevê a probabilidade de ocorrência de sinistros de valores superiores as prioridades das faixas 3 (10Milhões) e da faixa 4 (30Milhões) em 8,88% e 0,88% ou a ocorrência de sinistros desta magnitude a cada 11,26 e 112,87 sinistros, respectivamente.

Na prática, ao realizarmos a precificação por Burning Cost, temos que ter especial cuidado com a análise dos valores extremos de sinistros observados pois poderíamos estar incorrendo na apuração de alíquotas muito elevadas que poderiam vir a inviabilizar a contratação da cobertura.

4.10. Outros Fatores Analisados no Processo de Precificação

Uma vez definida a taxa de risco a ser aplicada sobre o contrato de resseguro, outros fatores serão levados em consideração para composição da taxa comercial. Corretagem, Margem do Ressegurador, Impostos e adicionais decorrentes de limites de reintegração são exemplos de fatores adicionais aos prêmios puros de risco calculados.

- Corretagem (Brokerages) – Remuneração do corretor que intermediou a cotação do risco entre a cedente e o ressegurador. A corretagem para contratação de contrato não proporcional gira em torno de 10%.

- Margem do Ressegurador (Lucro + DA) – A margem do ressegurador tem o objetivo de pagar as despesas da operação (DA), além da obtenção de uma parcela de lucro. Este custo é apurado de acordo com a estratégia de negociação de cada ressegurador. Os percentuais que serão considerados neste cálculo têm apenas o objetivo de exemplificar os carregamentos para a definição do prêmio comercial, consideraremos a margem do ressegurador como 25%.
- Impostos (Tax) – No Brasil, os impostos devidos já são retidos pela cedente. Desta forma, não serão considerados nenhum imposto na operação de resseguro exemplificada.
- Reintegração (desconto) – O desconto de reintegração, considera a razão entre a perda esperada da carteira e o limite da faixa. A este fator se aplica o custo de reintegração, que normalmente é de 100% do prêmio da faixa. O exemplo abaixo ilustra de forma elucidativa este cálculo que é realizado por faixa do contrato.

Ressaltamos que para efeito do prêmio comercial, iremos considerar para o nosso contrato reintegrações ilimitadas em todas as faixas e prêmio de reintegração a custo zero. Desta forma, o prêmio de risco será equivalente aos sinistros ilimitados calculados para cada faixa e não será deduzido nenhum desconto de prêmio de reintegração, pois neste caso o ressegurador cobrará toda a perda esperada no início do contrato. O desconto do prêmio de reintegração só se justifica quando há um custo de reintegração negociada, neste caso a seguradora somente pagará o prêmio adicional quando houver o sinistro e não antecipadamente como nosso exemplo.

EL = Perda Esperada= 1.776.746 / L = Limite da Faixa = 7.000.000

Tabela 25 - Exemplo do Cálculo do Desconto de Reintegração

$$\text{Desconto de Reintegração} = \left(\frac{1}{1 + \alpha \frac{EL}{L}} \right) - 1$$

$$\text{Desconto de Reintegração} = \left(\frac{1}{1 + (100\% \frac{1.776.746}{7.000.000})} \right) - 1$$

Desconto de Reintegração = - 0,2024

4.11. Prêmio Comercial

Prêmio Comercial (PC) = Prêmio de Risco (PR) + Adicionais – Deduções

PC = PR × (1 + Brokerage + Margem + Imposto) × (1 + Desconto Reintegração)

Tabela 26 - Apuração do Prêmio Comercial

PRÊMIO COMERCIAL 2019				
Faixa	1ª	2ª	3ª	4ª
BURNING COST	3,6763%	3,1208%	4,8700%	5,4753%
PESO	50%	50%	20%	20%
SINISTRO AGREGADO	3,7039%	3,2167%	2,6227%	0,4745%
PESO	50%	50%	80%	80%
TAXA DE RISCO	3,6901%	3,1688%	3,0722%	1,4747%
GNPI 2019	120.000.000	120.000.000	120.000.000	120.000.000
PRÊMIO DE RISCO	4.428.120	3.802.500	3.686.592	1.769.592
BROKERAGE	10%	10%	10%	10%
MARGEM	25%	25%	25%	25%
IMPOSTO	0%	0%	0%	0%
DESCONTO DE REINTEGRAÇÃO	0%	0%	0%	0%
PRÊMIO COMERCIAL	5.977.962	5.133.375	4.976.899	2.388.949
TAXA DE AJUSTE	4,9816%	4,2778%	4,1474%	1,9908%

O prêmio comercial foi definido através de pesos considerados para cada modelo. Estes pesos são consequência de análises complementares do atuário e leva em consideração a credibilidade dos modelos de cálculo em cada faixa.

Ressaltamos que, o prêmio comercial apresentado acima não é efetivamente o cobrado à cedente, pois existe uma margem de erro na estimativa do GNPI. Para que a seguradora não seja onerada indevidamente no caso de não performar o

GNPI, existe uma prática no mercado ressegurador em cobrar apenas 85% ou 90% do prêmio calculado, o qual chamamos de prêmio mínimo. A diferença devida, caso haja, será cobrada apenas no final do contrato.

O ajustamento é a prática do resseguro que calcula o prêmio devido do contrato ao final de vigência. Neste momento é apurado o GNPI performado e a este valor é aplicado a taxa comercial negociada no início do acordo. Se o cálculo resultar em um valor superior ao prêmio mínimo, a seguradora deverá pagar a diferença, caso contrário, nenhum valor será ajustado. A taxa comercial do contrato é usualmente chamada de taxa de ajustamento.

Abaixo segue um exemplo de ajustamento do contrato, considerando duas hipóteses de performance: GNPI de 150.000.000 e 80.000.000:

Tabela 27 - Exemplo de Apuração do Prêmio de Ajustamento

PRÊMIO DE AJUSTAMENTO 2019				
Faixa	1ª	2ª	3ª	4ª
PRÊMIO COMERCIAL	5.977.962	5.133.375	4.976.899	2.388.949
PRÊMIO MÍNIMO (90%)	5.380.166	4.620.038	4.479.209	2.150.054
TAXA DE AJUSTE	4,9816%	4,2778%	4,1474%	1,9908%
GNPI 1	150.000.000	150.000.000	150.000.000	150.000.000
AJUSTAMENTO	7.472.453	6.416.719	6.221.124	2.986.187
DIFERENÇA	2.092.287	1.796.681	1.741.915	836.132
GNPI 2	80.000.000	80.000.000	80.000.000	80.000.000
AJUSTAMENTO	3.985.308	3.422.250	3.317.933	1.592.633
DIFERENÇA	(1.394.858)	(1.197.788)	(1.161.276)	(557.421)

No exemplo acima, somente seria cobrado um prêmio adicional de ajustamento no GNPI 1, já que o valor no ajustamento é superior ao prêmio mínimo cobrado no início das operações. No GNPI 2, o ajustamento seria inferior ao prêmio mínimo, logo nenhum valor é devido pela cedente e ela somente será cobrada pelo prêmio mínimo.

CAPÍTULO 5: CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi apresentar a precificação de um contrato de resseguro de Excesso de Danos da carteira de uma seguradora fictícia SegNews pelo modelo agregado e comparar estas taxas com as geradas pelo modelo Burning Cost. Para o desenvolvimento deste trabalho consideramos 4 distribuições para modelar a severidade e 2 distribuições para modelar a frequência que foram:

Tabela 28 - Distribuições e Testes Realizados

	Distribuições Testadas	Testes Realizados
Distribuição de Frequência	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Poisson ▪ Binomial Negativa 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ AIC ▪ χ^2
Distribuição de Severidade	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Gamma ▪ LogNormal ▪ Inversa Gaussiana ▪ Pareto 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ AIC ▪ KS

Através dos testes estatísticos do AIC e KS identificamos que a distribuição Lognormal foi a mais adequada para modelar a severidade dos sinistros observados e os testes AIC e χ^2 (Pearson) indicaram a distribuição Poisson. Desta forma, a precificação foi realizada com base nestas duas distribuições.

Tabela 29 - Parâmetros das Distribuições e Resultados dos Testes Realizados

	Parâmetros	AIC	χ^2	KS
Frequência				
Poisson (λ)	5,2	20,0928	0.8482	N/A
Binominal Negativa (k,p)	999,9978 e 0,9948	22,1160	0.8477	N/A
	Parâmetros	AIC	χ^2	KS
Severidade				
Gamma (α,β)	0,1 e 1,0545e-6	1.159,3940	N/A	5,5510e-16
Lognormal (μ,σ)	14,6702 e 1,0737	844,3402	N/A	0,7738
Inversa Gaussiana (a,b)	1.863.695.822 e 1.470.395	852,7967	N/A	0,0400
Pareto (α,k)	3.29210e+5 e 5.0869e-1	853,9998	N/A	0,0161

Com base nas distribuições escolhidas, realizamos simulações conjugadas de frequência e severidade dando origem a Distribuição do Sinistro Agregado.

Os resultados dessas simulações foram utilizados para obtenção dos prêmios e taxas puras de Risco, apresentados na tabela abaixo juntamente com os resultados obtidos pelo método do Burning Cost para comparação.

Tabela 30 - Prêmios e Taxas de Risco por Modelo de Precificação

PRÊMIO DE RISCO ESPERADO 2019					
Faixa	1ª	2ª	3ª	4ª	Total
BURNIG COST	4.411.610	3.744.978	5.855.989	6.570.342	20.582.919
SINISTRO AGREGADO	4.444.655	3.860.097	3.147.297	569.418	12.021.467
VAR(%)	0,7%	3,1%	-46,3%	-91,3%	-41,6%

TAXA PURA DE RISCO 2019					
Faixa	1ª	2ª	3ª	4ª	Total
BURNIG COST	3,6763%	3,1208%	4,8700%	5,4753%	17,1424%
SINISTRO AGREGADO	3,7039%	3,2167%	2,6227%	0,4745%	10,0178%

Nossa conclusão é que não existe uma maneira “perfeita” de realizar a precificação dos prêmios de resseguro. Muitas vezes o subscritor possui em suas mãos a precificação do risco por distintas modelagens técnicas para auxiliá-lo no embasamento da taxa a ser aplicada na negociação, algumas vezes a taxa final é obtida pela combinação de precificações distintas com a atribuição de pesos para cada modelagem, conforme exibido no desenvolvimento deste estudo de caso. Isso ocorre pois apesar da técnica ser fundamental para o sucesso do negócio, existem fatores comerciais que também são fortemente levados em consideração no momento da negociação com as cedentes, tais como: interesse na ampliação da carteira de determinado segmento, fortalecimento do relacionamento com o cliente, necessidade de atingimento das metas de comercialização da empresa, etc.

Como sugestão para desenvolvimento de trabalhos futuros deixamos aqui a proposta de incluir a distribuição GPD e comparar seus resultados tendo em vista que esta é uma distribuição para cauda pesada e muito utilizada no mercado de resseguro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LIVROS E ARTIGOS

BOTTI, Paulo Eduardo de Freitas (1995). Introdução ao resseguro para brasileiros: Nobel(p.155)

BELLEROSE, Philippe (2003). Reinsurance for the Beginner: Witherby & Co. Ltd.

CASS, R. Michael. KENSICKI, Peter R., PATRIK, Gary S., REINARZ, Robert C. (2002). Práticas de Resseguro: FUNENSEG

DIRUBE, Ariel Fernández (1993). Manual de Reaseguros: General Re

Fundación Mapfre (2011). Introdução ao Resseguro: FUNENSEG

Fundación Mapfre (1979). El Reaseguro: Fundación Mapfre

GROPELLO, Giulio Di; MANGHETTI, Giovanni (1997). Princípios da técnica de resseguro, Itau Re: FUNENSEG

HARRISON, Connor M. (2004). Princípios e práticas de resseguro: FUNENSEG

HOGG, R. V., KLUGMAN, S. A. (1984). Loss Distributions: John Wiley & Sons Limited

BURNHAM, K. P., ANDERSON, D. R. (2002). Model Selection and Inference: A Practical Information Theoretic Approach - 2nd Edition: Springer-Verlag

BOWERS, N. L., GERBER, H. U., HICKMAN, J. C., JONES, D. C. & NESBITT, C. J. (1997). Actuarial Mathematics, SOA. Schaumberg

AKAIKE, H. (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In B.N Petrov and F Csaki (eds.), Proceedings of the Second International Symposium on Information Theory. Budapest: Akademiai Kiado

SITES

CLARK, David. Basics of Reinsurance Pricing. SOA, 2014. Disponível em: <<https://www.soa.org/globalassets/assets/files/edu/edu-2014-exam-at-study-note-basics-rein.pdf>>. Acesso em: 02 de dez.de 2019

FRAGA, Eduardo. Uma Aplicação da Teoria de Valores Extremos para Avaliação do Risco de Contratos de Resseguro, 2006. Disponível em: <<http://www.rbrs.com.br/arquivos/RBSR3-1%20Eduardo%20Fraga.pdf>>. Acesso em: 02 de dez.de 2019

SCAILLET, Olivier. A Kolmogorov-Smirnov Type Test for Positive Quadrant Dependence. University of Geneva, 2005. Disponível em: < <https://ssrn.com/abstract=668841> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.668841>>. Acesso em 02 de jan.2020