Geometria de Poisson e sua teoria de Lie

Prova escrita para concurso de titular livre 72003 - IM-UFRJ.

Alejandro Cabrera

6 dez 2021

Nesta prova escrita, elaboramos um texto dissertativo sobre elementos de geometria de Poisson e a teoria de Lie correspondente.

Dividimos ele em 3 partes:

(1) Definições e elementos básicos de geom. de Poisson

(2) A teoria de Lie e grupóides simpléticos

(3) Desenvolvimentos da área e contribuições do autor.

Em (1), apresentamos os objetos de estudo e algumas das suas propriedades básicas.

Em (2), desenvolvemos com detalhe os elementos da teoria de Lie de grupóides simpléticos e sua relação com a geom. de Poisson.

Em (3), mencionamos ramificações e aplicações, destacando algumas contribuições do autor ao desenvolvimento da área.

Incluimos algumas referências no final. Dentre elas, destacamos o artigo acadêmico [C. artigo] apresentado neste concurso.

As partes (1) e (2) visam dar um contexto técnico detalhado para depois apresentar as contribuições do autor na área em (3).

(1) A geometria de Poisson é uma sub-área da geometria diferencial nascida no contexto da mecânica e que fica na interseção de muitas outras, em particular, através da sua relação com simetrias e quantização (veja [artigo] para mais detalhes do contexto).

Como veremos, esta geometria é muito rica, combinando elementos da teoria de folheações, de geometria simplética e de singularidades. Desde os anos '80, ficou estabelecida como área de estudo independente e foi desenvolvida uma teoria de Lie (baseada em grupóides simpléticos) como uma das ferramentas fundamentais para seu estudo.
Veremos estes tópicos no presente texto.

Começamos com a definição central.

Def: Uma estrutura de Poisson numa variedade diferenciável M é uma operação binária

$$\{\,,\,\}: C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$
$$f, g \longmapsto \{f,g\}$$

com as seguintes propriedades:

(1.0) $\mathbb{R}$-bilinear

(1.1) antisimétrica $\{f,g\} = -\{g,f\}$

(1.2) identidade de Jacobi $\{f_1,\{f_2,f_3\}\} + \{f_2,\{f_3,f_1\}\} + \{f_3,\{f_1,f_2\}\} = 0$

(1.3) derivação $\{f, g_1 g_2\} = \{f,g_1\} g_2 + g_1\{f,g_2\}$ (analog. $\{f_1 f_2, g\}$)

Uma tal estrutura se diz simplética se

$$\{f,g\} = 0 \ \forall g \in C^\infty(M) \Rightarrow df = 0$$

(condição de ser "não-degenerada")

Um <u>morfismo</u> $\phi : (M_1, \{,\}_1) \to (M_2, \{,\}_2)$ é um mapa suave $\phi : M_1 \to M_2$ tal que $\phi^*\{f,g\}_2 = \{\phi^* f, \phi^* g\}_1$, $\forall f,g \in C^\infty(M_2)$ $(\phi^* f = f \circ \phi)$

Uma <u>simetria</u> é um <u>isomorfismo</u> $\phi : (M, \{,\}) \circlearrowleft$.

Vejamos, agora, uma descrição geométrica dos colchetes. Pelas propriedades (1.3) e (1.1), $\{f,g\}|_x = \pi_x(df|_x, dg|_x)$, $x \in M$

para uma seção $\pi \equiv (x \mapsto \pi_x)$ do fibrado $\Lambda^2 TM \to M$ chamada de <u>bi-vetor de Poisson</u> (ou "tensor de Poisson").

Em uma carta $U \subseteq M$, $\underline{\pi|_U = \frac{1}{2} \pi^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}}$ (convenção de somas i, j)

A id. de Jacobi é uma EDP quadrática para $\pi^{ij}(x)$.

Dada f, $X_f : g \mapsto \{f, g\}$ define um <u>campo de vetores</u> chamado <u>Hamiltoniano</u>

(Id. de Jacobi $\Leftrightarrow$ X_f é simetria infinitesimal $\forall f \in C^\infty(M)$)

No caso simplético, a inversa $\omega_x = \pi_x^{-1}$ (como forma bilinear em cada $x \in M$) define uma 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ <u>não-degenerada</u> e <u>fechada</u> $d\omega = 0$ ($\Leftrightarrow$ id. de Jacobi)

Chamamos $(M, \{,\} \equiv \pi)$ de <u>variedade de Poisson</u> e (M, ω) de <u>variedade simplética</u>

Mencionemos algumas construções:

<u>produtos</u>: $(M_1, \pi_1) \times (M_2, \pi_2)$ tal que as projeções são morfismos

<u>quocientes</u>: Se $H \circlearrowright M \xrightarrow{q} B$ é fibrado H-principal e a ação de H é por simetrias de (M, π) $\Longrightarrow$ $\exists!$ estrutura π_B Poisson em B tal que q é morfismo.

<u>Obs</u>: (B, π_B) raramente é simplética (mesmo (M, ω) sendo).

Exemplos: (E0): a estrutura trivial $\pi \equiv 0$ em qualquer M (totalmente degenerada)

(E1): $M = \mathbb{R}^{2n} \ni (q,p) = x$ com colchete simplético canônico

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$\omega = \text{"}\omega_c\text{"} = dq^i \wedge dp_i$$

Os campos hamiltonianos X_f são equivalentes às eqs. de Hamilton com energia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ (veja [C artigo]).

Este exemplo generaliza a uma estrutura simplética canônica ω_c em qualquer cotangente $M = T^*G$

(E2): $M^{(2d)}$ uma superfície orientada com volume $\omega_0 \in \Omega^2(M)$.

$\Rightarrow \pi_0 = \omega_0^{-1}$ é Poisson simplético e $\pi = F\,\pi_0$ é Poisson para qualquer $F \in C^\infty(M)$.

(E3): $M = \mathbb{R}^3$, $\{f,g\}|_x = x \overset{\text{prod. escalar}}{\cdot} (\nabla f|_x \overset{\text{prod. vetorial}}{\times} \nabla g|_x)$ é Poisson não simplética. ($\pi_{x=0} = 0$)

(veja [C artigo] a aplicação em mecânica).

↳ generalização: $M = \mathfrak{h}^*$ dual de uma álgebra de Lie $(\mathfrak{h}, [,])$ com $\{f,g\}|_x = \langle x, [df|_x, dg|_x]\rangle$ ("Kirillov Poisson")

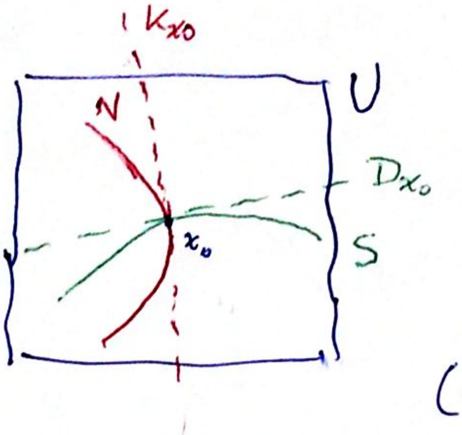
Outras generalizações são grupos de Lie-Poisson ([Drinfeld]).

Obs: $\mathfrak{h}^* = B$ é um quociente de (T^*H, ω_c) para H grupo de Lie integrando $\mathfrak{h}$.

(E4) dada $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ qualquer e π Poisson em $\mathbb{R}^3$ do (E3), obtemos $\pi^{(a)}_x := a(\|x\|^2)\,\pi_x$ Poisson em $\mathbb{R}^3$.

Obs: os exemplos (E2, E4) ilustram a natureza não linear desta geometria.

Vejamos agora alguns resultados que caracterizam a geometria de (M,π).



<u>Infinitesimalmente</u>, a forma bilinear π_x induz uma decomposição $T_xM = D_x \oplus K_x$

$\nearrow$ $\pi_x|_{D_x^*}$ não degenerada

$\searrow$ $\pi_x|_{K_x^*} = 0$

Observemos que $rk(\pi_x) := \dim D_x$ pode variar com $x \in M$ (veja (E3)) $\rightsquigarrow$ $D = \{D_x\}_{x\in M}$ <u>distribuição singular</u>.

O <u>teorema de splitting</u> de Weinstein [W83], dá uma <u>versão local</u>: na vizinhança de qualquer $x_0 \in M$, a estrutura de Poisson é isomorfa a um produto $(S,\omega_S)\times(N,\pi_N)$ com S simplético e $rk(\pi_N|_{x_0})=0$.
(veja a figura).

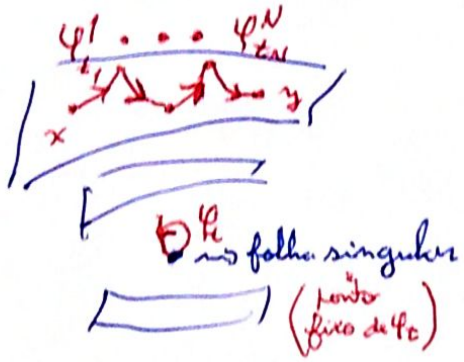
Em coordenadas adaptadas, $x \equiv (q,p,y)$ com $x_0 \equiv (0,0,0)$ temos

$$\underbrace{\pi \simeq \partial_{q^i}\wedge\partial_{p_i} + \pi_N(y), \quad \pi_N(0)=0} \qquad (1.4)$$

<u>Obs</u>: · este teorema generaliza o de Darboux ($\omega \overset{loc}{\simeq} \omega_c$) no caso simplético.

· o fator (N,π_N) é chamado de "<u>transversal</u>" (único a menos de difeo local). A linearização de π_N ao redor de x_0 dá uma estrutura de álgebra de Lie $\mathfrak{h}_{x_0}$ em $K^*_{x_0}$ ($(\pi_N)_{lin}$ é dado como em (E3) a partir de $\mathfrak{h}_{x_0}$) chamada de <u>álgebra de isotropia</u> em x_0. Ela é <u>intrinsecamente</u> definida por π em cada $x \in M$.

<u>Globalmente</u>, associado a (M,π) temos uma <u>folheação simplética</u> (singular).
Ela integra a distribuição D onde π é não degenerada e, por isto, cada folha $\mathcal{O} \xrightarrow{i} M$ herda uma estrutura simplética $\omega_{\mathcal{O}} \in \Omega^2(\mathcal{O})$ tal que i é morfismo. (<u>Obs</u>: i é só imersão em geral, não nec. mergulho ("embedding")).



Uma descrição dinâmica das folhas é:
$x, y \in \mathcal{O} \iff x$ se conecta com y mediante concatenação $\varphi^1_{t_1} \circ \dots \circ \varphi^N_{t_N}$ de fluxos hamiltonianos de X_{f_j}, $j = 1, \dots, N$.

<u>Obs</u>: • a dimensão das folhas pode mudar (como a de D_x) mas o teo. de splitting garante um modelo local suave.

• $h_x \cong h_y$ como álgebras de Lie se $x, y \in \mathcal{O}$ na mesma folha.

Finalizamos (1) observando que a geometria de (M,π) é <u>ainda mais rica</u> do que a <u>folheação simplética</u> e o feixe de isotropias $\{h_x\}_{x\in M}$.

Isto pode-se ver no exemplo (E.2): a folheação detecta os zeros $F(x)=0$, as isotropias detectam a linearização de F nos zeros, mas resta conhecer a informação de ordem superior nestas singularidades.

(<u>Obs</u>: a forma simplética das folhas regulares explode nos zeros de F: $\omega_{\mathcal{O}} \to \infty$ se $F(x) \to 0$)

(2) Nesta seção, vamos discutir a teoria de Lie adaptada à geom. de Poisson vista em (1).

Lembremos de um caso clássico na teo. de Lie dado pelo grupo das rotações $SO(3) \subseteq Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Se temos uma família suave

$$\underline{\mathbb{R} \ni t \longmapsto R(t) = id + t\,\xi + O(t^2) \in SO(3),} \qquad (2.1)$$

o termo ξ representa uma rotação <u>infinitesimal</u> $\xi \in so(3) = Lie(SO(3))$.
Dado um tal ξ, podemos gerar uma $R(t)$ resolvendo

$$\frac{d}{dt}R = \xi R \qquad \text{(campo de vetores \underline{invariante à direita})}.$$

Composta de rotações pode-se obter da composta dos fluxos destas equações. Infinitesimalmente, a composta é determinada pelo colchete de Lie $[\,,\,]$ em $so(3)$ (i.e. o comutador).

O <u>paradigma</u> é:

$$\left[\begin{tikzcd} \text{transformações infinitesimais} \arrow[r, bend right, dashed, "\text{integração}"'] & \text{transformações finitas} \arrow[l, bend right, "\text{diferenciação (funtor de ``Lie'')}"'] \end{tikzcd}\right]$$

No caso da geom. de Poisson, veremos que no lado infinitesimal teremos <u>algebroides de Lie</u> e, no lado finito, <u>grupóides de Lie</u>

Ainda, veremos que propriedades especiais desta geometria fazem com que os grupóides que aparecem sejam <u>simpléticos</u>

Começemos com o algebroide associado a (M,π) Poisson.

Seguindo o caso clássico (2.1), pensaremos nos fluxos $\varphi_t: M \to M$ de campos hamiltonianos X_f como transformações finitas e, assim, chegamos na ideia de que os geradores infinitesimais são co-vetores $df|_x \in T_x^*M$

Será importante darmos ênfase na propriedade de derivação (1.3) do $\{,\}$, e pensar em famílias de transformações parametrizadas por pontos $x \in M$, em lugar da álgebra de Lie $(C^\infty(M), \{,\})$ de dimensão infinita (que é menos útil para estudar (M,π)).

A definição que captura esta estrutura é:

Def: um algebróide de Lie $(A \to M, [,], \rho)$ é dado por um fibrado vetorial $A \to M$, um colchete de Lie $[,]$ nas suas seções $\Gamma_M A$, e um morfismo de fibrados $\rho: A \to TM$ (sob id_M) tais que:

$$[a, fb] = f[a,b] + \mathcal{L}_{\rho(a)}(f)b \quad , \quad a,b \in \Gamma_M A$$
$$f \in C^\infty(M).$$

(derivação ao longo de ρ)

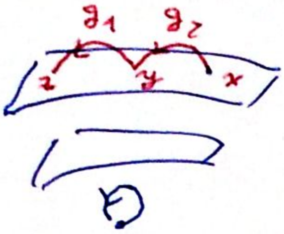
O algebroide associado a (M,π), denotado T_π^*M, é dado por:

$$A = T^*M \;,\quad [df, dg] = d\{f,g\} \;,\quad \rho(df) = X_f$$

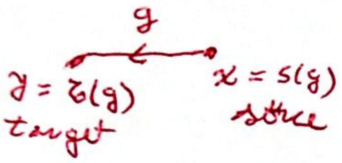
(a verificação dos axiomas é imediata).

Obs: Todo algebróide induz uma folheação (singular) de M e um feixe de álgebras de Lie de isotropia. ~~E~~ No caso $A = T_\pi^*M$, isto reproduz o visto em 1.
O algebróide dá uma presentação coerente suave destes objetos singulares.

No lado finito, temos os grupóides de Lie.



Um grupóide de Lie, denotado $G \rightrightarrows M$, é dado por uma variedade $G = \{g : x \to y,\ x, y \in M\}$ de "flechas" ("arrows") e uma de objetos M, junto com mapas estruturais:



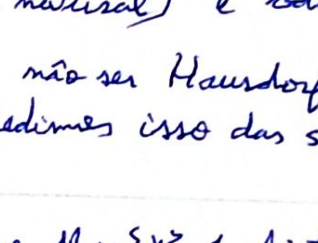
$s : G \to M$, $t : G \to M$, $1 : M \to G$, $inv : G \to G$
source, target, identidades, $g \mapsto g^{-1}$, inversa

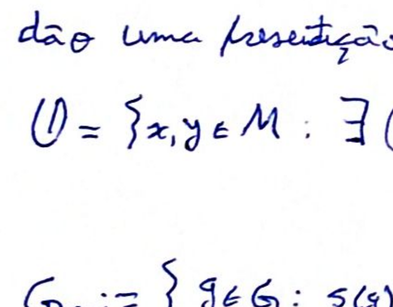
e multiplicação $m : \underbrace{\{(g_1, g_2) : s(g_1) = t(g_2)\}}_{\text{"}G^{(2)}\text{" flechas componíveis}} \subseteq G \times G \to G$

Os mapas devem satisfazer os axiomas algébricos de definir uma categoria (com G seus morfismos inversíveis), a condição de s e t serem suaves e submersões ($\Rightarrow G^{(2)}$ herda estrutura de variedade suave natural) e todos os outros mapas serem suaves. [Obs: permitimos G não ser Hausdorff mas sim pedimos isso das s-fibras]

Os grupóides de Lie generalizam os grupos de Lie (caso $M = \{*\}$ 1-objeto) e dão uma presentação suave das seguintes famílias de objetos possivelmente singulares

- $\mathcal{O} = \{x, y \in M : \exists (g : x \to y) \in G\}$ órbitas (subvariedades imersas) $\leadsto$ [folheação singular de M por órbitas de G]
- $G_x := \{g \in G : s(g) = t(g) = x\}$ grupos de Lie de isotropia para cada $x \in M$ ($G_x \simeq G_y$ se $x, y \in \mathcal{O}$)
- folheações simples dadas pelas s- e t-fibras

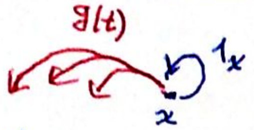




um fibrado G_x-principal para cada $x \in M$.

Obs: as dimensões de $\mathcal{O}_x$ e G_x podem variar com $x \in M$.

A diferenciação $(G \rightrightarrows M) \mapsto A_G =$ "$\mathrm{Lie}(G)$" de um grupóide para um algebróide é definida análogamente a (2.1):



família suave $t \mapsto g(t)$, $g(0) = 1_x$ com source fixo $s(g(t)) = x \ \forall t$, para poder multiplicar por direita

$$A_G = \ker Ds\big|_{1(M)}, \quad \rho = Dt, \quad [\,,\,]: \text{ da extensão a campos invariantes à direita}$$

(veja figura)

Dizemos que G integra A_G.

No caso especial $A_G = T^*_\pi M$ Poisson, notamos que T^*M vem com uma geometria simplética ω_c canônica. A nível de grupóides temos:

Def Um grupóide simplético $(G \rightrightarrows M, \omega)$ é um grupóide de Lie G e uma estrutura simplética $\omega \in \Omega^2(G)$ tais que

$$\underbrace{\Omega^2(G^{(2)}) \ni m^*\omega = pr_1^*\omega + pr_2^*\omega}_{\text{com } pr_j(g_1, g_2) = g_j,\ j = 1,2 \text{ projeções}}, \quad (2.2)$$

Obs equação análoga à de cociclo: $f(m(g_1, g_2)) = f(g_1) + f(g_2)$ para $f: G \to \mathbb{R}$.

A relação com estruturas de Poisson é dada pelo resultado fundamental:

Teorema ([CDW 87]) Seja $(G \rightrightarrows M, \omega)$ um grupóide simplético. Então,

- $\exists!$ estrutura de Poisson π em M tal que o source $s: G \to M$ é morfismo de Poisson,
- $\exists$ um isomorfismo de algebroides natural $\psi: A_G \xrightarrow{\sim} T^*_\pi M$ induzido por ω: $\langle \psi(a), v \rangle = \omega|_{1_x}(a, v)$, $a \in A_G|_x$, $v \in T_x M$.

Neste sentido, reconhecemos os grupóides simpléticos como "integrações" de variedades de Poisson no contexto da teoria de Lie para grupóides e algebróides.

Obs: a folheação simplética de (M, π) coincide com a de órbitas de G, as isotropias $\mathfrak{h}_x$ de (M, π) são as diferenciações dos G_x, $x \in M$.

Vejamos alguns aspectos <u>geometro-simpléticos</u> por trás de $(G \rightrightarrows M, \omega)$.

- De (2.2) segue fácilmente que $1 : M \hookrightarrow (G, \omega)$ é uma subvariedade <u>Lagrangiana</u>

  (lembremos que $\Sigma \overset{i}{\hookrightarrow} (S, \omega)$ subvariedade de uma simplética se diz Lagrangiana se $\dim \Sigma = \frac{1}{2} \dim S$ e $i^*\omega = 0$ (maximal isotrópica)).

- Menos evidente é que $\left[(2.2) \Leftrightarrow \{(g_1, g_2, m(g_1, g_2)) : (g_1, g_2) \in G^{(2)}\} \right.$ define uma subvariedade Lagrangiana de $\left. (G, -\omega) \times (G, -\omega) \times (G, \omega). \right]$

- as s- e t- fibras são simpléticamente ortogonais, $\{s^*f_1, t^*f_2\}_\omega = 0 \ \forall f_1, f_2 \in C^\infty(M)$

  (isto permite provar $\exists$ de π em M a partir de ω; usando id. de Jacobi e que X_{t^*f} é invariante à direita em G)

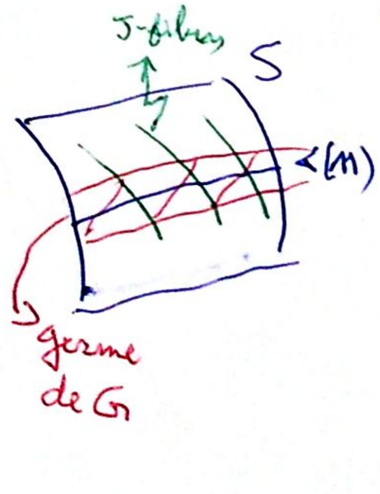
Como ω é não degenerada, define uma "de-singularização" de π.

A definição geral é:

<u>Def</u>: Uma <u>realização simplética</u> de (M, π) é uma variedade simplética (S, ω) e uma submersão $J : (S, \omega) \to (M, \pi)$ que é morfismo de Poisson. Ela se diz <u>estrita</u> se J admite uma seção Lagrangiana $\sigma : M \hookrightarrow (S, \omega)$.

Vemos que todo grupóide simplético $(G \rightrightarrows M, \omega)$ define uma realização simplética estrita com $S = G$, $J = s$ source, $\sigma = 1$.

Em [CoDW 87], se prova reciprocamente que uma tal (S, ω, J, σ) define univocamente o <u>germe</u> de uma estrutura de grupóide simplético ao redor de $\sigma : M \hookrightarrow S$.



Isto mostra a relação forte entre a geom. simplética de (G, ω) e sua estrutura de grupóide integrando (M, π).

Vejamos agora os análogos dos teoremas de Lie clássicos para o caso Poisson.
Primeiramente, observamos que a diferenciação $G \mapsto A_G$ se estende a um <u>functor</u> (o functor "de Lie").

O teorema "<u>Lie I</u>", diz que A_G determina G univocamente a menos de recobrimentos. No caso de <u>grupóides de Lie</u> (veja figura), os recobrimentos se tomam, como usual, ~~#~~ usando classes de homotopias de caminhos mas só ao longo das s-fibras.

Todos os G com s-fibras 1-conexas ("<u>s-1-conexo</u>") e algebroides isomorfos resultam isomorfos.

O teorema "<u>Lie II</u>", similarmente, permite determinar um morfismo $G_1 \xrightarrow{\phi} G_2$ (i.e. um functor suave) a partir da sua diferenciação $Lie(\phi): A_{G_1} \to A_{G_2}$ univocamente se G_1 é s-1-conexo.

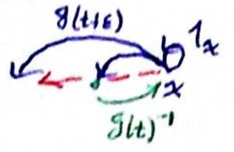
O análogo do "<u>Lie III</u>" clássico é falso: nem todo algebróide A é isomorfo a um A_G para um grupóide de Lie G (veja [CrF, Annals 1]).
Isto também vale para o caso particular $A = T^*_\pi M$ Poisson, ou seja, nem toda variedade de Poisson é integrável a um grupóide de Lie.
(quando $A = T^*_\pi M$ é integrável, a estrutura simplética é naturalmente herdada pelo $G \rightrightarrows M$ que é s-1-conexo.)

<u>Obs</u>: no exemplo (E4), para algumas $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, a estrutura $(\mathbb{R}^3, \pi(a))$ <u>não é integrável</u> (veja [CrF, JDG]).
Este é um dos casos mais simples de variedade de Poisson não integrável (veja mais à seguir).

Finalizamos (2) discutindo uma construção da integração

$$(M,\pi) \rightsquigarrow (G \rightrightarrows M, \omega).$$

Suponhamos que tal integração existe. Dado um caminho $t \mapsto g(t) \in G$, $g(0) \in 1_x$



contido na s-fibra, obtemos um caminho no algebróide : $t \mapsto \frac{d}{du}\Big|_{u=t} m(g(u), g(t)^{-1}) \in A_G$

Similarmente, uma homotopia de caminhos define uma família a 2-parâmetros em A_G.

A observação chave é que os caminhos e as homotopias assim obtidas podem ser caraterizados intrinsecamente em termos do algebróide $(A \xrightarrow{q} M, [\,,\,], \rho)$.
Por exemplo, um "A-caminho" é $t \mapsto a(t) \in A$ tal que

$$\rho(a(t)) = \frac{d}{dt} q(a(t)) \qquad (2.4)$$

Uma "A-homotopia" é definida por uma EDP a 2-parâmetros envolvendo $[\,,\,]$ e condições de contorno apropriadas.

Assim, dado um algebróide A qualquer, temos um candidato a grupóide integração s-1-conexa:

$$\widehat{G}_A := \frac{\{A\text{-caminhos}\}}{\{A\text{-homotopias}\}} \rightrightarrows M$$

com a multiplicação definida por concatenação de A-caminhos.

No caso $A = T^*_\pi M$ Poisson, esta construção também explica a estrutura simplética extra: é um caso de redução simplética ([MaWe]) em dimensão infinita,

$$\begin{array}{c} \{A\text{-caminhos}\} = \mu^{-1}(0) \hookrightarrow (T^*PM, \omega_c) \\ \downarrow \\ (\widehat{G}_A, \omega = [\omega_c]_{red}) \end{array}$$

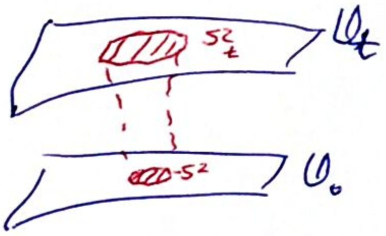
PM: espaço de caminhos C^2 (variedade de Banach)

μ: "moment map" associado a eq (2.4)

(A relação com teoria de campos foi dada em [CatF 01],
veja mais em [C artigo].)

Em [GrF, Annals1], se identificam as obstruções para um algebroide A ser integrável como aquelas para $\widehat{G}_A$ herdar uma estrutura de variedade suave ($\Rightarrow$ "de Lie") via quociente.
O problema pode estar em homotopias acumulándose sob. a trivial para $a(t)=0$ constante.

Ainda, em [GrF, JDG] no caso $A = T^*_\pi M$ Poisson, sob certas hipóteses se prova que se pode verificar a integrabilidade calculando variação da área simplética de esferas ao longo da folheação simplética de (M,π).



No caso do exemplo (E4) com $a>0$, as folhas são esferas $\mathcal{O} \equiv S^2_r$ de raio $r \geq 0$ em $\mathbb{R}^3$ e a área simplética induzida por $\pi^{(a)}$ é $A(r) = \dfrac{4\pi r}{a(r^2)}$.

A obstrução à integrabilidade é detectada quando:

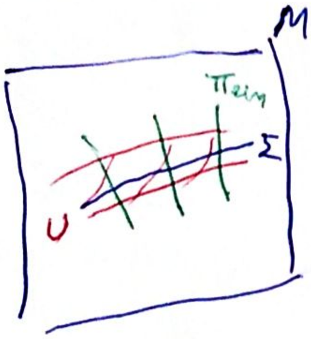
$$(2.5) \quad \frac{d}{dr} A(r)\Big|_{r_0} = 0 \quad \text{para algum } r_0 > 0 \text{ ou quando } r_0 \to 0.$$

(3) nesta última seção, discutimos desenvolvimentos e ramificações desta área destacando contribuições do autor em elas. (Damos ênfase aos que vem de (1) e (2).) Agrupamos as linhas em (3.1), ..., (3.5).

(3.1) A geom. de Poisson incorpora e desenvolve métodos que vem do estudo de eq's diferenciais (nos trabalhos de Lie, Cartan e outros, veja [W83]). Esta linha continua na atualidade com estudos de sistemas mecânicos, simetrias e sistemas integráveis (em dim. finita e infinita). Veja [C artigo].

(3.2) Esta geom. de Poisson se estabeleceu como área de estudo independente, estendendo a geom. simplética e incorporando a teo. de Lie como ferramenta fundamental.

Um exemplo de problemas nesta área é o de linearização.



Neste problema, temos (M, π) com π anulando-se num ponto ou numa subvariedade Σ e tenta-se provar que π é isomorfo à sua linearização π_{lin} numa vizinhança U de Σ (veja figura).

(quando $\Sigma = \{x_0\}$, π_{lin} é determinado por h_{x_0} a isotropia vista em (1).)

O artigo [CrF, Annals2] ilustra a importância do problema e a utilização de técnicas geométricas e de Lie.

(3.3) Nestes estudos, aparecem outras geometrias relacionadas à de Poisson. Um exemplo são as estruturas de Dirac que ocorrem ao restringir π a uma subvariedade arbitrária (vem dos "vínculos" em mecânica). No caso Dirac, as integrações são grupóides ($G \rightrightarrows M, \omega$) com ω degenerada ([BuCrWZ, Duke]). Outras geometrias relacionadas e de interesse são as "complexas generalizadas" ([Gu, Annals]).

(3.4) Operações de quocientes e redução destas geometrias também são amplamente estudadas (estendendo a "redução simplética", [MaWe]), assim como a sua interação com a teo. de Lie correspondente. Neste contexto, também se destaca o estudo da geometria em espaços de moduli mediante redução de estruturas em dim. infinita (como vimos em ②; veja também [AtBo 82]).

(3.5) Por último, destacamos as ramificações que vem da ideia de quantização (veja mais em [C artigo]). Neste contexto, se estabelecem ligações não triviais:

$$\left[\begin{array}{ccc} \text{geom. diferencial (Poisson)} & \longleftrightarrow & \text{álgebra não-comutativa.} \end{array}\right]$$

Um exemplo paradigmático é a teoria de grupos de Lie-Poisson $(\hat{H}, \pi)$ (mencionados em (E.3)) correspondendo aos "grupos quânticos" de Drinfeld e outros no lado não comutativo ([Drinfeld]). Muitos dos desenvolvimentos em geom. de Poisson e a teo. de Lie correspondente foram fortemente motivados pela quantização de variedades de Poisson.

Finalizamos este texto descrevendo brevemente algumas contribuições do autor nesta área. Referimos o leitor a [< artigo] para mais detalhes e outros trabalhos, em particular, aqueles relacionados com as aplicações mencionadas em (3.1). (Sublinhamos com ■ os artigos do autor a seguir.)

Em [BuC, Math Ann], no contexto de (3.3), desenvolvemos uma teoria completa para estruturas "multiplicativas" em grupóides $G \rightrightarrows M$ (estendendo o caso simplético visto em ②) e sua relação com geometrias induzidas em M. Um resultado fundamental é a caracterização infinitesimal destas estruturas:

$$\left[\begin{array}{ccccc} \omega \in \Omega^k(G) \text{ multiplicativa} & \xleftrightarrow{1:1} & \omega_A \in \Omega^k(A) & \xleftrightarrow{1:1} & \left.\begin{array}{l} \mu : A \to \wedge^{k-1} T^*M \\ \nu : A \to \wedge^{k} T^*M \end{array}\right\} \text{lineares} \\ (\text{eq. } (2.2)) & & \text{"infinitesimalmente multiplicativa"} & & \text{satisfazendo certas EDP's. } (*) \end{array}\right]$$

Ex: $$\begin{array}{ccccc} \omega \in \Omega^2(G) & & \omega_A = \omega_c & & \mu = id_{T^*M},\ \nu = 0 \\ \text{simplética} & \longleftrightarrow & \text{em } T^*_\pi M & \longleftrightarrow & \text{(peças simples!)} \end{array}$$

No artigo recente [CO preprint] estudamos a interação desta teoria de Lie com procedimentos de redução $(M,\pi) \rightsquigarrow (M_{red}, \pi_{red})$.

Em [BuCdH, Advances], damos uma teoria completa para estruturas multiplicativas de fibrados vetoriais sobre $G \rightrightarrows M$. Elas acomodam a teoria de representações de G ("up to homotopy"). Em [BrCO, J. Symp G], caracterizamos a integrabilidade mediante integrais sobre esferas (como (2.5)). Em [CDr, Pacific], aplicamos esta teoria a diversos problemas, em particular, dando uma demonstração conceitual de uma conjectura de rigidez de grupóides.

(*) $$\left.\begin{array}{l} \mu([u,v]) = L_{\rho(u)}\mu(v) - i_{\rho(v)} d\mu(u) - i_{\rho(v)}\nu(u) \\ \nu([u,v]) = L_{\rho(u)}\nu(v) - i_{\rho(v)} d\nu(u) \end{array}\right] \quad \forall\ u, v \text{ seções de } A \to M$$

■.(*)

No contexto de (3.4), em [CGM, Comm. Math. Phys] desenvolvemos uma teoria de estruturas de Dirac em dim. infinita e sua redução (como em ②). Assim, explicamos diversas estruturas geométricas relacionadas à teoria de gauge e espaços de moduli de fibrados.

No contexto de (3.2), na teo. de Lie geral, em [CMS, Crelle] desenvolvemos uma teoria de Lie completa para germes ao redor de $1: M \hookrightarrow G$. Esta é baseada em construções explícitas em termos dos dados infinitesimais de A e de um campo "spray" $V \in \mathfrak{X}(A)$. Isto generaliza amplamente a construção Baker-Campbell-Hausdorff do caso clássico de álgebras e grupos de Lie.

Em [CMS, Transf. gps.], aplicamos esta teoria para dar fórmulas explícitas das geometrias multiplicativas ao redor de $1: M \hookrightarrow G$. Como ilustração, damos uma prova conceitual do fato que

$$(3.6) \quad q : \left(T^*M,\ \omega = \int_0^1 \varphi_t^* \omega_c \, dt\right) \to (M, \pi) \quad \text{com} \quad \begin{cases} q : T^*M \to M \text{ projeção} \\ \varphi_t \text{ fluxo do spray } V \end{cases}$$

define uma realização simplética ao redor de $0 : M \hookrightarrow T^*M$ (seção zero).

De fato, segue que este é o modelo para o germe de qualquer grupóide simplético.

Consideramos que todos estes trabalhos dão uma contribuição fundamental à área de geometria de Poisson, sua teoria de Lie e os problemas associados.

Por último, no contexto de quantização (3.5), aplicamos as teorias dos trabalhos anteriores para estudar a geometria por trás da quantização e do trabalho de Kontsevich [Ko], que é o mais completo e aprofundado sobre quantização de variedades de Poisson.

Em [CDh, IMRN], provamos que a construção geométrica (3.6) consegue explicar uma parte principal da fórmula de quantização de Kontsevich. E' interessante destacar que certas expansões em termos de grafos em [Ko] vem de uma teoria de aproximações para fluxos de EDO's (o fluxo φ_t em (3.6)).

Em [C preprint], estendemos o trabalho anterior e, utilizando nossas construções explícitas do germe da integração (G, ω) de (M, π), descrevemos a geometria por trás da contribuição principal completa na fórmula de [Ko]. Ainda, estabelecemos uma conexão explícita com certas teorias de campos ([CatF, CMP]) mediante EDPs e suas soluções. Estes trabalhos do autor clarificam a relação entre a teoria de Lie e a quantização de Kontsevich, abrindo o caminho a novos desenvolvimentos. De fato, esta linha conectando geom. de Poisson, teo. de Lie e quantização continua. Em um trabalho em preparação (avançada) com R.L. Fernandes, estabelecemos uma conexão préviamente desconhecida entre a quantização e a integrabilidade de (M, π) (como em (2), [CrF, Annals1]).

$\boxtimes$.

Referências:

[AtBo 82] M. Atiyah, R. Bott, "The Yang-Mills equations over Riemann surfaces" Phil. Trans. R. Soc Lon. A, 308(1982), 523.

[Br C O, J. Symp G] O. Brahic, A. Cabrera, C. Ortiz, "Obstructions to the integrability of VB algebroids", J. Symp. geom 16, n2 (2018), 439.

[Bu C, Math Ann] H. Bursztyn, A. Cabrera, "Multiplicative forms at the infinitesimal level", Math. Ann. 353(3) (2012), 663.

[Bu C dH, Advances] H. Bursztyn, A. Cabrera, M. del Hoyo, "Vector bundles over Lie groupoids and algebroids", Advances in math., 290 (2016), 163.

[Bu Cr W Z Duke] H. Bursztyn, M. Crainic, A. Weinstein, C. Zhu, "Integration of twisted Dirac brackets", Duke Math. J. 123 (2004), 549.

[C artigo] A. Cabrera, "Uma visão simplética da geometria contemporânea: teoria e aplicações", artigo apresentado para o concurso TL003, IM-UFRJ, 26 Nov 2021.

[C preprint] A. Cabrera, "Generating functions for local symplectic groupoids and non-perturbative semiclassical quantization", submetido, arXiv: 2011.02321 [math.SG]

[C Dh, IMRN] A. Cabrera, B. Dherin, "Formal symplectic realizations", Int. Math. Res. Not 2016(7): 1925.

[C Dr, Pacific] A. Cabrera, T. Drummond, "Van Est isomorphism on VB-groupoids" Pacific J. Math. 287-2 (2017), 297.

[C G M, Com Math Phys] A. Cabrera, M. Gualtieri, E. Meinrenken, "Dirac geometry of the holonomy fibration", Comm. Math. Phys. 355(3) (2017), 865.

[C M S, Crelle] A. Cabrera, I. Marcut, M.A. Salazar, "On local integration of Lie brackets" J. Reine Ang. Math. (Crelle's Journal), 2020, 760, p. 267.

[C M S, Transf. G] ——, ——, ——, "Local formulas for multiplicative forms", Transf. groups 2020.

[C O preprint] A. Cabrera, C. Ortiz, "Quotients of multiplicative forms and Poisson reduction", submetido, arXiv: 2008.03416 [math.DG]

[CatF, CMP] A. Cattaneo, G. Felder, "A path integral approach to the Kontsevich quantization formula", Comm. Math. Phys. 212 (2000), p 591.

[CatF 01] ——, ——, "Poisson sigma models and symplectic groupoids" in quantization of singular Poisson quotients, Prog. Math. 198 (2001).

[CDW 87] A. Coste, P. Dazord, A. Weinstein, "grupoides simplectiques", Publications Lyon ser. A, Univ. Claude-Bernard, 1987.

[CrF Annals1] M. Crainic, R.L. Fernandes, "Integrability of Lie Brackets", Ann. of Math. (2) 157 (2003), p 575.

[CrF, JDG] ——, ——, "Integrability of Poisson brackets", Jour. Diff. Geom. 66 (2004) p. 71.

[CrF, Annals 2] ——, ——, "A geometric approach to Conn's linearization theorem", Ann. of Math. 173 (2011), p 1121.

[Drinfeld] V.G. Drinfeld, "Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the Yang-Baxter equation" Soviet Math. Dokl. (1983) 27: 68-71.

[Ko] M. Kontsevich, "Deformation quantization of Poisson manifolds", Lett. Math. Phys. 56 (2003), p 271.

[Gu Annals] M. Gualtieri, "Generalized complex geometry", Ann. of Math. 174 (2011), p 75.

[MaWe] J. Marsden, A. Weinstein, "Reduction of symplectic manifolds with symmetry", Rep. Math. Phys 5 (1974), p 121.

[W 83] A. Weinstein, "The local structure of Poisson manifolds". Jour. Diff. Geom. 18 (1983), p 523.

— o — (fim do texto)