1 - Résumé partiel des travaux antérieurs.

1.1 - Représentation d'Enneper-Weierstrass. La représentation d'Enneper-Weierstrass (dite représentation EW dans la suite) - qui décrit des surfaces minimales dans $\mathbb{R}^3$ en termes d'une fonction et d'une 1-forme holomorphes sur une surface de Riemann donnée - est peut-être le plus remarquable de tous les outils qui ont été appliqués à l'étude de ces objets mathématiques. En effet, en fournissant un pont entre le monde géométrique et un autre, plutôt algébrique, la représentation EW fournit des constructions de surfaces minimales ayant des propriétés inattendues et souvent surprenantes. Ainsi on obtient, par exemple, la surface de Costa, qui était le premier exemple connu d'une surface complète plongée dans $\mathbb{R}^3$ à topologie finie mais non-triviale ; ou la surface d'Enneper, qui est, après la caténoïde, la seule surface minimale complète immergée dans $\mathbb{R}^3$ à courbure totale égale à 4π ; et ainsi de suite.

Motivés par des résultats de ce type, plusieurs auteurs ont construit des représentations de type EW pour des surfaces immergées dans d'autres variétés ambiantes et pour d'autres notions de courbure. C'est dans cet esprit que - en suivant les travaux [31] et [32] de Labourie - on construit une représentation de type EW pour des surfaces immergées à courbure gaussienne constante dans l'espace hyperbolique de dimension 3. Avant de décrire notre construction, il convient d'étudier d'abord la géométrie élémentaire de l'espace hyperbolique (c.f. [3]). Soit alors $\mathbb{H}^3$ l'espace hyperbolique de dimension 3. Rapellons que $\partial_\infty\mathbb{H}^3$, **l'horizon à l'infini** de $\mathbb{H}^3$, peut être défini comme étant l'espace des classes d'équivalence des rayons géodésiques de vitesse unitaire dans $\mathbb{H}^3$, où deux rayons sont considérés comme équivalents lorsqu'ils restent à distance bornée l'un de l'autre. Comme cet espace, qui est topologiquement une sphère, est muni d'une structure conforme canonique, il s'identifie naturellement avec la sphère de Riemann, $\hat{\mathbb{C}}$. Notons ensuite $U\mathbb{H}^3$ le fibré des vecteurs tangents unitaires au dessus de $\mathbb{H}^3$, et définissons l'application de **Minkowksi**, $m : U\mathbb{H}^3 \to \partial_\infty\mathbb{H}^3$, tel que pour tout vecteur, V, $m(V)$ soit le point de l'horizon à l'infini visé par V, c'est-à-dire

$$m(V) := \mathop{\mathrm{Lim}}_{t\to+\infty} \gamma_V(t),$$

où γ_V est le rayon géodésique défini par

$$\dot{\gamma}_V(0) = V.$$

Soit maintenant S une surface lisse, soit $i : S \to \mathbb{H}^3$ une immersion, soit $N_i : S \to U\mathbb{H}^3$ son champ de vecteurs normaux unitaires, et soit A_i son opérateur de Weingarten. On définit la **courbure extrinsèque** de i - aussi connue comme sa **courbure gaussienne** - par

$$K_i := \mathrm{Det}(A),$$

et on définit l'application de Gauss de i par

$$g_i := m \circ N_i.$$

En particulier, si K est positive, en renversant éventuellement l'orientation, on peut toujours supposer que i est localement strictement convexe (LSC dans la suite) dans le sens où A_i est en tout point définie positive. Dans ce cas-ci, des raisonnements de géométrie hyperbolique élémentaire montrent que g_i est un *difféomorphisme* local, et, en munissant S de la bonne structure conforme - qui est uniquement définie par cette propriété - on peut supposer que g_i est, en fait, localement *conforme*.

Enfin, rapellons qu'un *revêtement ramifié* de la sphère de Riemann est une paire $(\tilde{S}, \phi)$ où $\tilde{S}$ est une surface de Riemann compacte, et $\phi : \tilde{S} \to \hat{\mathbb{C}}$ est une application holomorphe non-constante. En particuler, si $(\tilde{S}, \phi)$ est un revêtement ramifié, et si $P \subseteq \tilde{S}$ contient tous ses points de ramification - c'est-à-dire tous les points où $d\phi$ s'annule - alors la réstriction de ϕ à $S := \tilde{S} \setminus P$ est localement conforme. On montre (c.f. [45] et [58]),

Theorem 1.1.1, Représentation de Weierstrass.

Soit $(\tilde{S}, \phi)$ un revêtement ramifié de la sphère de Riemann, soit $P \subseteq \tilde{S}$ un sous-ensemble fini qui contient tous ses points de ramification et notons $S := \tilde{S} \setminus P$. Alors, pour tout $k \in]0,1[$, il existe une unique immersion complète, d'aire finie, $i : S \to \mathbb{H}^3$ à courbure gaussienne constante égale à k telle que $g_i = \phi$.

Réciproquement, soit $i : S \to \mathbb{H}^3$ une immersion complète d'aire fini et à courbure gaussienne constante égale à $k \in]0,1[$. Alors S porte la structure d'une surface de Riemann compacte, $\tilde{S}$, otée d'une famille finie, P, de points, et g_i s'étend à un revêtement ramifié $\phi : \tilde{S} \to \hat{\mathbb{C}}$.

En d'autres termes, pour tout $k \in]0,1[$, on a la bijection suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}(i,S) \text{ telle que}\\ i : S \to \mathbb{H}^3 \text{ soit une immersion ;}\\ i \text{ soit complète ;}\\ i \text{ soit d'aire finie ; \&}\\ K_i = k.\end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(\phi, \tilde{S}, P) \text{ tel que}\\ \phi : \tilde{S} \to \hat{C} \text{ soit holomorphe ;}\\ \phi \text{ soit non-constante ;}\\ P \subseteq S \text{ soit fini ; \&}\\ \mathrm{Crit}(\phi) \subseteq P.\end{array}\right\}.$$

En particuliar, un élément important de la démonstration du Théorème 1.1.1 est le résultat de compacité suivant (c.f. [52]).

Theorem 1.1.2, Compacité.

Soit (k_m) une suite dans $]0,1[$, soit (i_m) une suite d'immersions LSC de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{H}^3$. Supposons que pour tout m, i_m soit à courbure gaussienne constante égale à k_m et que $g_m := g_{i_m}$ soit holomorphe. Si (k_m) converge vers $k_\infty \in]0,1[$, et si (g_m) converge localement uniformément vers la fonction non-constante $g_\infty : \mathbb{D} \to \hat{\mathbb{C}}$, alors (i_m) converge au sens C^∞_{loc} vers une immersion $i_\infty : \mathbb{D} \to \mathbb{H}^3$. En particulier, i_∞ est à courbure gaussienne constante égale à k_∞ et $g_\infty = g_{i_\infty}$.

Ainsi voit-on que la bijection construite ci-dessus est en fait un homéomorphisme. En plus, en rappelant que l'espace des revêtements ramifiés de la sphère est un espace stratifié par des variétés complexes de dimension finie, il paraît raisonnable que cet homéomorphisme se restreigne à un difféomorphisme sur chacune des strates. D'ailleurs, il semble en plus que la fonction de volume, ainsi que d'autres fonctions provenantes de la géométrie de l'immersion, devraient définir des fonctions analytiques sur chaque strate ayant des propriétés différentielles intéressantes. Ainsi, en posant des questions de ce genre sur la relation entre ces deux espaces, on voit s'ouvrir la voie vers un champ assez important de petits problèmes ouverts et intéressants.

1.2 - Solitons du flot de courbure moyenne. Le flot de courbure moyenne est le flot gradient de la fonctionelle d'aire dans l'espace des sous-variétés immergées d'une variété donnée. Plus précisement, soit $M := M^{m+1}$ une variété riemannienne, soit $\Sigma := \Sigma^m$ une variété de codimension 1, et soit $e : \Sigma\times]a,b[\rightarrow M$ une famille lisse d'immersions. On dit que e est **flot de courbure moyenne** lorsque

$$H_t + \langle \partial e_t, N_t\rangle = 0, \tag{1}$$

où N_t est le champ de vecteurs normaux unitaires au dessus de l'immersion e_t, et H_t est sa courbure moyenne. D'un intérêt particulier sont les flots dans l'espace euclidien, $\mathbb{R}^{m+1}$, qui sont invariants sous l'action d'un certain groupe, d'une part parce-que cette restriction nous permet de construire des exemples de flots de courbure souvent non-triviaux, et d'autre part parce-que la technique de changement d'échelle nous montre que ces flots peuvent aussi surgir comme des modèles infinitésimaux de singularités de flots de courbure moyenne plus généraux. Par exemple, lorsque le groupe en question est le groupe des dilatations, on obtient des **shrinkers**, qui sont définis par des immersions solutions de l'equation

$$H + \langle x, N\rangle = 0, \tag{2}$$

où x est le vecteur de position. De la même manière, lorsque le groupe en question est le groupe des translations, on obtient des **solitons**, que sont définis par des immersions solutions de l'equation

$$H + \langle V, N\rangle = 0, \tag{3}$$

où V est un vecteur fixe donné, généralement choisi égal à e_{m+1}.

Nous nous intéressons ici au cas des solitons dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Remarquons d'abord que, même si (3) n'est au fond qu'une perturbation de l'équation des surfaces minimales, à cause de la non-compacité de l'espace euclidien, les solutions de cette equation ne sont pas des perturbations de surfaces minimales. En fait, tout en se ressemblant à petite échelle, les solitons et les surfaces minimales diffèrent considérablement à grande échelle. Ainsi la classification des solitons nous présente un problème intéressant analogue au problème de classification des surfaces minimales mais pourtant bien différent de celui-ci.

Bien sûr, lorsque l'espace ambiant est de dimension 2, une classification complète est facilement obtenue. En effet, les seuls solitons dans $\mathbb{R}^2$ sont des droites verticales et des courbes dites **Grim reaper**, qui sont des translatées du graphe de la fonction $f(x) := \log(\sec(x))$ au dessus de l'intervalle $]-\pi/2,\pi/2[$. Pourtant, même dans le cas où l'espace ambiant est de dimension 3, il existe une grande variété de solitons. Rapellons ici des exemples les plus pertinents pour notre étude (voir [34] pour une liste plus complète) :

(1) tous les plans verticaux sont des solitons ;

(2) les **plans de Grim** sont des produits cartésiens des courbes Grim reaper avec des droits horizontaux ;

(3) les **paraboloïdes de Grim** sont des surfaces de révolution simplement connexes (c.f. [1] et [11]). Ces surfaces, qui sont toutes égales à translation près, sont des graphes au dessus de $\mathbb{R}^2$ d'une fonction, f, asymptotique à la fonction $\frac{1}{2}\|x\|^2 - \log(\|x\|)$ pour x grand ;

(4) les **caténoïdes de Grim** sont des surfaces de révolution doublement connexes (c.f. [1] et [11]). Ces surfaces, qui sont paramétrisées à translation près par leurs rayons intérieurs, sont des réunions des graphes de deux fonctions f_1 et f_2, définies au dessus d'un anneau dans $\mathbb{R}^2$ de rayon extérieur infini, asymptotiques à la fonction $\frac{1}{2}\|x\|^2 - \log(\|x\|)$ pour x grand ;

(5) les **bouts de Grim** sont des intersections avec l'extérieur d'une boule compacte dans $\mathbb{R}^3$ des paraboloïdes de Grim et des caténoïdes de Grim, ainsi que des petites perturbations de celles-ci; et

(6) les **tridents**, construits par Nguyen dans [38], sont des désingularisations des réunions des plans verticaux avec des plans de Grim le long d'une surface simplement périodique de Sherk. Ces solitons, de genre infini, étaient les premiers exemples connus de solitons de topologie non-triviale.

Pourtant - comme avait été remarqué par Martín, Savas-Halilaj and Smoczyk - malgré cette grande variété d'exemples, il n'existait pas encore de construction de soliton de topologie finie mais de genre non-trivial. C'était précisement dans l'objectif de combler cette lacune qu'on a construit, dans [59], des solitons de topologie finie et de genre g, pour tout entier positif, g. Notre construction consiste à désingulariser la réunion d'une paraboloïde de Grim avec une caténoïde de Grim autour d'une surface de Costa-Hoffman-Meeks.

Avant d'énoncer le résultat, il convient de rappeler brièvement des propriétés géométriques élémentaires de la surface de Costa-Hoffman-Meeks, C_g. Cette surface est une surface minimale, plongée dans $\mathbb{R}^3$, de genre g ayant trois bouts qui sont tous des graphes des fonctions f_-, f_0, f_+ définies au dessus d'un anneau dans $\mathbb{R}^2$ de rayon extérieure infini. En plus, pour tout $0 \leq k \leq g$, elle est invariante par réflexion dans le plan engendré par le vecteur e_z et le vecteur $\cos(k\pi/g)e_x + \sin(k\pi/g)e_y$. On appelle **symétries horizontales** de C_g le sous-groupe de $O(3)$ engendré par ces reflections.*

La construction des solitons de topologie finie et de genre non trivial est donnée par le résultat suivant.

Theorem 1.2.1, Existence des solitons non-triviaux de topologie fini.

Soit $g \in \mathbb{N}$ et $\eta < 1$. Pour tout Δ suffisament grand, et pour tout ϵ et pour tout R satisfaisant

$$\left(\epsilon R^{4+\eta} + \frac{1}{R^{1-\eta}}\right) \leq \frac{1}{\Delta},\ \epsilon\mathbb{R}^{5-\eta} \geq \Delta,$$

il existe un soliton complet Σ de genre g avec 3 bouts. En plus

(1) Σ est préservé par les symétries horizontales de C_g ;

(2) $\Sigma \setminus B(\epsilon R)$ consiste en trois bouts de Grim disjoints qui convergent tous vers le paraboloïde de Grim lorsque Δ tends vers l'infini ; et

* En fait, C_g possède une autre symétrie consistant en la composition d'une réflexion dans le plan horizontal avec une rotation. Comme cette symétrie ne peut pas être partagée par un soliton, elle n'a pas de rapport avec notre construction.

(3) en changeant l'échelle par $1/\epsilon$, $\Sigma\cap B(2\epsilon R)$ converge vers C_g lorsque Δ tend vers l'infini.

1.3 - Courbure spéciale lagrangienne. La courbure gaussienne est un outil fondamental de l'étude géométrique des surfaces qui, malgré sa formulation relativement simple, entraîne rapidement de très durs problèmes d'EDPs totalement non-linéaires. Pourtant, souvent une transformation ingénieuse permet de reformuler ces mêmes problèmes en termes de la théorie des courbes pseudo-holomorphes. Ainsi, dans [31] et [32], Labourie montre comment les outils puissants devéloppés par Gromov dans [19] nous fournissent alors des résultats de compacité pour des familles de surfaces immergées, complètes à courbure gaussienne constante, et cela permet ensuite de construire des exemples de telles surfaces satisfaisant à des conditions géométriques non-triviales dans diverses situations intéressantes.

Ce qui est assez étonnant, c'est que cette transformation continue de nous fournir des résultats intéressants même en dimension supérieure, où le rôle des courbes pseudo-holomorphes est maintenant joué par des sous-variétés spéciales lagrangiennes (ou, plus précisement, spéciales legendriennes) du fibré unitaire de la variété ambiante. En particulier - et incroyablement - la notion de courbure associée à cette structure-ci, qu'on appelle **courbure spéciale lagrangienne** jouit alors des mêmes propriétés de compacité qui ont été montrées pour la courbure gaussienne en dimension 2.

Il existe plusieurs manières différentes de formuler la courbure spéciale lagrangienne, mais on trouve que la suivante - qui ne vaut, en fait, que pour des immersions localement strictement convexes (LSC) - est la plus simple à comprendre géométriquement, malgré son abstraction apparente. D'abord, pour tout r positif et pour toute matrice symétrique, A, on définit

$$\mathrm{SL}(A;r) := \sum_{i=1}^{m}\arctan(\lambda_i/r),$$

où $\lambda_1\leq ...\leq\lambda_m$ sont les valeurs propres de A. Malgré les apparences, SL est une fonction analytique en (r,A). En plus, lorsque A est définie positive, elle est strictement décroissante en r, tend vers $m\pi/2$ lorsque r tend ver 0 et tend vers 0 lorsque r tend vers l'infini. Ainsi, en appliquant le théorème des fonctions implicites, on obtient une fonction analytique, R, définie uniquement par la propriété que pour tout $\theta\in]0,m\pi/2[$ et pour toute matrice définie positive A,

$$\mathrm{SL}(A;R(A;\theta))=\theta.$$

Soit maintenant $M:=M^{m+1}$ une variété riemannienne, soit $\Sigma:=\Sigma^m$ une variété de codimension 1 et soit $i:\Sigma\to M$ une immersion. Lorsque i est LSC, pour tout $\theta\in]0,m\pi/2[$, on définit sa **courbure θ-spéciale-lagrangienne** (courbure θ-SL dans la suite) par

$$R_{i,\theta}(x) := R(A_i(x);\theta),$$

où A_i est l'opérateur de Weingarten de l'immersion, i. D'un intérêt particulier est le cas $R_i:=R_{i,(m-1)\pi/2}$, puisque c'est dans ce cas-ci qu'on obtient le résultat de compacité le plus intéressant. En plus, en petite dimension, la fonction R_i a une expression très simple. En effet,

(1) lorsque $m = 2$, $R_i = K_i^{1/2}$, où K_i est la courbure gaussienne de l'immersion, i, justifiant ainsi notre interprétation de R_i comme une généralisation en dimension supérieure de cette notion de courbure ;

(2) lorsque $m = 3$, $R_i = (K_i/H_i)^{1/2}$, où H_i est la courbure moyenne de l'immersion i ;

(3) en plus, lorsque $m = 3$, en appliquant des techniques simples de dualité, il est souvent possible d'identifier R_i avec la courbure scalaire de l'hypersurface Σ (voir aussi Section [???]) ; et

(4) en général, R_i, est l'unique valeur de r telle que

$$r^m\sigma_m(A_i) - r^{m-2}\sigma_{m-2}(A_i) + r^{m-4}\sigma_{m-4}(A_i) - ... = 0,$$

où $\sigma_0, \sigma_1, ...$ sont les fonctions symétriques élémentaires uniquement définies par

$$\mathrm{Det}(\mathrm{Id} + tA) = \sum_{k=0}^{m} t^k\sigma_k(A).$$

Avant d'énoncer le résultat de compacité, il convient d'abord de rappeler quelques constructions géométriques. Soit UM le fibré des vecteurs tangents unitaires au dessus de M et soit $\pi : UM \to M$ la projection canonique. On dit qu'une immersion $\hat{\imath} : \Sigma \to UM$ est **non-dégénérée** lorsque la composée $i := \pi \circ \hat{\imath}$ est aussi une immersion de Σ dans M, et on dit qu'elle est **dégénérée** sinon.

Pour toute géodésique complète, Γ, dans M, soit $N\Gamma \subseteq UM$ l'ensemble de tous les vecteurs unitaires normaux à Γ. Remarquons que Γ est isométrique à un quotient du cylindre $S^{m-1} \times \mathbb{R}$, où S^{m-1} est la sphère de dimension $(m-1)$ dans $\mathbb{R}^m$. On appelle **tube** toute immersion $\hat{\imath} : N \to UM$ qui est un revêtement d'un cylindre de la forme $N\Gamma$. Voyons que tout tube, $\hat{\imath}$, est totalement dégénéré dans le sens où la composée $i := \pi \circ \hat{\imath}$ n'est en aucun point une immersion.

Enfin, on appelle **relevé de Gauss** d'une immersion $i : \Sigma \to M$, l'unique immersion $\hat{\imath} : \Sigma \to UM$ définie telle que pour tout point, p, $\hat{\imath}(p)$ soit le vecteur normal unitaire à i au point p qui est compatible avec l'orientation. Notons, en particulier, que tout relevé de Gauss est trivialement non-dégénéré.

Pour une fonction positive et lisse f sur M, on dit que l'immersion i est à courbure spéciale lagrangienne **prescrite** par f lorsqu'en tout point, p, on a

$$R_i(p) = (f \circ i)(p).$$

On montre (c.f. [49]),

Theorem 1.3.1, Compacité pour la courbure spéciale lagrangienne.

Soit (M, g) une variété riemannienne, soit Σ une variété de codimension 1*, soit (f_m) une suite de fonctions positives et lisses sur M, soit (i_m) une suite d'immersions LSC de Σ dans M, et pour tout m, soit $\hat{\imath}_m$ le relevé de Gauss de i_m. Supposons que pour tout m, i_m est à courbure sectionnelle prescrite par f_m. Alors, si (f_m) converge au sens C^∞_{loc} vers* *une fonction positive et lisse, f_∞, et s'il existe un sous ensemble compact K de M et un point p de Σ tel que $i_m(p) \in K$ pour tout m, alors, quitte à extraire une sous-suite, la suite $(N, \hat{\imath}_m, x)$ converge vers une sous-variété immergée pointée $(\Sigma_\infty, \hat{\imath}_\infty, x_\infty)$. De plus, si $(\Sigma_\infty, \hat{\imath}_\infty)$ n'est pas non-dégénerée, alors c'est un tube.*

On considère ce résultat comme un résultat de compacité à un unique mode de dégénérescence près, où, en plus, les limites dégénérées peuvent souvent être exclues par des raisonnements géometriques simples. Ainsi, suivant Labourie, on déduit du Théorème 1.3.1 plusieurs résultats d'existence pour des hypersurfaces à courbure SL constante satisfaisant à des conditions géométriques prescrites. Par exemple, on montre facilement

Theorem 1.3.2, Problème de Plateau asymptotique.

Soit $M := M^{m+1}$ une variété d'Hadamard à courbure sectionnelle majorée par -1, et soit Ω un sous-ensemble ouvert de l'horizon à l'infini de M, $\partial_\infty M$. Alors, pour tout $k \in]0,1[$, il existe une hypersurface, complète, plongée, LSC, $i : \Sigma \to M$, à courbure spéciale lagrangienne égale à k telle que $\partial\Sigma = \partial\Omega$.

D'autres théorèmes d'existence provenants du Théorème 1.3.1 sont aussi décrits dans la Section 1.5.

La courbure spéciale Lagrangienne trouve en plus une application intéressante dans la théorie des bouts hyperboliques et des espaces-temps de-Sitter. Rappelons d'abord plusieurs définitions géométriques. Une **variété de Möbius** est une variété localement modelée sur la sphère euclidienne, S^d, dont tous les changements de cartes sont des restrictions d'applications de Möbius. Un **bout hyperbolique** est une généralisation du complément d'un sous-ensemble convexe et fermé de l'espace hyperbolique. En effet c'est une variété hyperbolique à bord *non-lisse* qui est recouverte par des cartes de la forme $\pi^{-1}(X) \setminus X$ où X est un sous-ensemble relativement ouvert d'un sous-ensemble convexe et fermé, K, de l'espace hyperbolique, $\mathbb{H}^{d+1}$, et $\pi : \mathbb{H}^{d+1} \to K$ est la projection canonique. De la même manière, un **espace-temps de-Sitter globalement hyperbolique** est une est une généralisation du futur d'un sous-ensemble convexe et fermé à bord de type espace de l'espace-temps de-Sitter. En effet, c'est une variété de-Sitter à bord *non-lisse* recouverte par des cartes de la forme $\pi^{-1}(X) \setminus X$ où X est un sous-ensemble relativement ouvert d'un sous ensemble convexe, fermé et à bord de type espace, K, de l'espace-temps de-Sitter, $dS^{d,1}$, et $\pi : dS^{d,1} \to K$ est la projection canonique.

Un bout hyperbolique, B, est dit **maximal** lorsque, pour tout point de ∂B, il existe un arc géodésique ouvert contenu dans ∂B qui passe par ce point. De la même manière, un espace-temps de-Sitter globalement hyperbolique, E, est dit **maximal** lorsque pour tout pout p de ∂E, il existe un rayon nul partant de ce point qui est contenue dans ∂E. Dans [30], Kulkarni & Pinkall construisent des identifications canoniques entre les espaces de variétés de Möbius, des bouts hyperboliques maximaux et des espaces-temps de-Sitter globalement hyperboliques maximaux. En particulier, il existe une dualité naturelle entre des bouts hyperboliques maximaux d'un côté et des espaces-temps de-Sitter globalement hyperbolique maximaux de l'autre, et ces objets sont tous paramétrés par des variétés de Möbius.

On étudie des hypersurfaces à courbure constante dans des bouts hyperboliques maximaux, et on montre (c.f. [47])

Theorem 1.3.3, Feuilletages des bouts hyperboliques maximaux.

Soit B un bout hyperbolique maximal. Alors, il existe un feuilletage, $(\Sigma_k)_{k\in]0,1[}$, d'un voisinage, Ω, du bord de B tel que, pour tout k, Σ_k soit LSC et à courbure SL constante égale à k.

En appliquant la dualité de Kulkarni-Pinkall, le théorème 1.3.3 se traduit immédiatement en un résultat analogue pour des espaces-temps de-Sitter globalement hyperboliques maximaux. En particulier, en dimension $3+1$, cette dualité envoie des hypersurfaces à courbure SL constante en des hypersurfaces à courbure scalaire constante. On obtient alors un feuilletage qui définit une fonction temps cosmologique dont les isochrones sont tous à courbure scalaire constante.

Theorem 1.3.4, Feuilletages des espace-temps maximaux.

Soit E un espace-temps de-Sitter globalement hyperbolique maximal. Alors, il existe un feuilletage, $(\Sigma_k)_{k\in]-\infty,0[}$, d'un voisinage, Ω, du bord de E tel que, pour tout k, Σ_k soit LSC, de type espace et à courbure scalaire constante et égale à k.

1.4 - Problèmes de Plateau non-linéaires. Soit M une variété riemannienne complète de dimension $(m+1)$, soit K une notion de courbure, qui peut être la courbure moyenne, courbure extrinsèque, etc., et soit Γ une sous-variété compacte, sans-bord, de codimension 2, immergée de manière lisse dans M. Le problème de Plateau concerne l'existence d'une hypersurface compacte, Σ, immergée de manière lisse dans M à K-courbure constante et telle que $\partial\Sigma = \Gamma$.

Lorsqu'on a affaire à la fonction de courbure moyenne, le problème de Plateau est dit **linéaire** - puisque cette fonction de courbure-ci est la seule qui dépende linéairement des courbures principales de l'hypersurface - et le problème de Plateau est dit **non-linéaire** sinon. Naturellement, les outils analytiques appliqués à l'étude du problème non-linéaire sont bien différents de ceux qui servent à la résolution du cas linéaire. Avant de présenter ces techniques, il convient pourtant de formuler de manière plus précise ce qu'on entend réellement par "fonction de courbure non-linéaire".

Les fonctions de courbure sont définies sur des cônes. En effet, soit d'abord $\Lambda_+ := \Lambda_+^m$ le cône convexe et ouvert des vecteurs dans $\mathbb{R}^m$ dont toutes les composantes sont positives. Ensuite, soit $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$ un autre cône convexe et ouvert tel que

(1) pour tout $x := (x_1, ..., x_m) \in \Lambda$ et pour toute permutation σ, $x_\sigma := (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}) \in \Lambda$;

(2) pour tout $x \in \Lambda$ et pour tout $\lambda > 0$, $\lambda x \in \Lambda$; et

(3) pour tout $x \in \Lambda$ et pour tout $y \in \Lambda_+$, $x + y$ est un élément de Λ.

Une fonction $K \in C^\infty(\Lambda) \cap C^0(\overline{\Lambda})$ est dite alors **fonction de courbure** lorsque

(4) K est homogène d'ordre 1 ;

(5) pour tout $x \in \Lambda$ et pour toute permutation, σ, $K(x_\sigma) = K(x)$;

(6) $K(1, ..., 1) = 1$; et

(7) K est strictement positive sur Λ et s'annule le long de $\partial\Lambda$.

En particulier, une fonction de courbure est *inséparable* d'une notion de convexité. En effet, on dit qu'une hypersurface, Σ, immergée de manière lisse dans M, est **strictement K-convexe** lorsque le vecteur, $\kappa := (\kappa_1, ..., \kappa_m)$, de ses courbures principales est en tout point un élément de Λ, ce qui est bien défini par l'invariance de Λ sous permutation de ses composantes. Une fois que Σ est strictement K-convexe, on appelle **K-courbure** de Σ la fonction $K_\Sigma := K(\kappa)$, ce qui est, de nouveau, bien définie par l'invariance de K.

Toutes les notions classiques de courbure entrent dans ce cadre abstrait. Par exemple, si les fonctions symétriques fondamentales $f_0, ..., f_m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, sont définies telles que, pour tout x et pour tout t,

$$\Pi_{k=1}^m(1 + tx_k) = \sum_{k=0}^m \frac{k!(m-k)!}{m!} t^k f_k(x_1, ..., x_m), \tag{4}$$

alors, pour tout k, la paire (Λ_k, σ_k) - où $\Lambda_k := \{x \mid f_1(x), ..., f_k(x) > 0\}$ et $\sigma_k(x) := f_k(x)^{1/k}$ - est une fonction de courbure. En particulier, (Λ_1, σ_1) nous donne la courbure moyenne, qui est associée à la convexité moyenne; (Λ_m, σ_m) nous donne la courbure extrinsèque qui est associée à la convexité normale; et - au moins lorsque l'espace ambiant est à courbure sectionnelle constante - (Λ_2, σ_2) nous donne la courbure scalaire qui est associée à une notion de convexité intermédiaire.

Ce cadre comprend pourtant une grande famille d'autres notions de courbure. Par exemple, si, pour tout $1 \leq l < k \leq m$, on définit $\sigma_{k,l} := (f_k/f_l)^{1/(k-l)}$, alors la paire $(\Lambda_k, \sigma_{k,l})$ est aussi une fonction de courbure, appelée **quotient de courbure**. En plus, pour tout paire, (Λ, K_1) et (Λ, K_2), de fonctions de courbure ayant le même cône de définition, et pour tout $\alpha \in]0, 1[$, la combinaison convexe $(\Lambda, \alpha K_1 + (1-\alpha)K_2)$ est une fonction de courbure; et pour tout paire, (Λ_1, K_1) et (Λ_2, K_2), de fonctions de courbure, et pour tout $\alpha \in]0, 1[$, la combinaison convexe $(\Lambda_1 \cap \Lambda_2, K_1^\alpha K_2^{1-\alpha})$ est aussi une fonction de courbure. Ce formalisme sert alors à l'étude de certaines familles de problèmes de Weingarten. Par exemple, le problème

$$\sigma_4 = \alpha\sigma_1,$$

où $\alpha > 0$ est une constante donnée, peut être étudié en utilisant un quotient de courbure, et des problèmes,

$$\alpha\sigma_4^{\frac{1}{3}} + \beta\sigma_3^{\frac{1}{3}} + \gamma\sigma_2^{\frac{1}{3}} = \delta\sigma_1^{\frac{1}{3}},$$
$$\sigma_4 = \alpha\sigma_1^{\frac{1}{2}}\sigma_2^{\frac{1}{2}},$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ sont des constantes données, peuvent être étudiés en utilisant des combinaisons convexes, et ainsi de suite. D'un intérêt particulier sont les problèmes de Weingarten de la forme

$$\cos(\theta) - t\sin(\theta)\binom{n}{1}\sigma_1 - t^2\cos(\theta)\binom{n}{2} + t^3\sin(\theta)\binom{n}{3}\sigma_3^3 + ... = 0,$$

où $\theta, t \in \mathbb{R}$ sont des constantes données, puisque les hypersurfaces qui satisfont à cette équation-ci sont précisement les hypersurfaces à courbure spéciale Lagrangienne constante qui ont déjà été étudiées en détaille dans la Section 1.3.

Pour des raisons analytiques, il convient de supposer en plus que

(8) pour tout $x \in \Lambda$ et pour $1 \leqslant k \leqslant m$, $\partial_k K(x) > 0$; et

(9) K est concave.

La condition (8), qu'on appelle **ellipticité** garantit que l'opérateur de Jacobi de la K-courbure - qui, rappellons-le, mesure la variation infinitésimale de la K-courbure provenant d'une perturbation normale de l'immersion - est un opérateur elliptique, nous permettant ainsi d'employer des outils puissants qui ont été développés pour l'étude de ces opérateurs. Enfin, la concavité est une condition quasiment indispensable pour l'emploi de presque toute la technologie d'EDPs non-linéaires qui existe jusqu'à présent. Les fonctions de courbure introduites ci-dessus satisfont toutes à ces deux conditions, et dans la suite on va supposer que toutes les fonctions de courbure ont, en plus, ces deux propriétés.

Une vaste littérature sur le problème de Plateau non-linéaire s'est développée depuis le travail fondateur, [5] and [7], de Caffarelli, Nirenberg & Spruck, qui étudie le problème de Plateau dit **non-paramétrique**, c'est-à-dire pour des graphes au dessus de domaines dans $\mathbb{R}^m$. En supposant la convexité du domaine, ces auteurs montrent l'existence des solutions au problème de Plateau pour une grande famille de fonctions de courbure. Pourtant, ce faisant, ils sont obligés de reconnaître l'existence de deux classes importantes de fonctions de courbure distinguées par leur comportement à l'infini. En effet, pour une fonction de courbure (Λ, K), on définit

$$\begin{aligned} \Lambda_\infty &:= \{(x_1, ..., x_{m-1}) \mid (x_1, ..., x_{m-1}, t) \in \Lambda \text{ pour } t \gg 0\}, \\ K_\infty(x_1, ..., x_{m-1}) &:= \operatorname*{Lim}_{t \to +\infty} K(x_1, ..., x_{m-1}, t), \end{aligned}$$

et on dit que K est de type **fini** si K_∞ est finie en tout point, et qu'elle est de type **infini** sinon. En fait, lorsque K est de type infini, il suit de la concavité que K_∞ est aussi infinie en tout point. Le résultat d'existence de Cafferelli, Nirenberg & Spruck ne concerne que des fonctions de type infinie. Ainsi, tout en montrant l'existence de solutions au problème de Plateau pour toutes les k-courbures, σ_k - qui sont toutes de type infini - il laisse ouvert, entre autres, le problème de Plateau pour des quotients de courbure, $\sigma_{k,l}$, ainsi que pour la courbure spéciale Lagrangienne, qui sont toutes de type fini.

Pour le problème dit **paramétrique**, qui concerne des hypersurfaces qui ne sont pas nécessairement des graphes, très peu de résultats existent dans le cas général. Pourtant, en se restreignant au cas des fonctions de courbure de type **convexe**, c'est-à-dire, des fonctions de courbure dont le cône de définition coïncide avec le cône positif, Λ_+, il est possible de résoudre le problème de Plateau paramétrique dans une grande généralité. En effet, après quelques résultats partiels, dans [22], [23] et [64], Guan & Spruck et Trudinger & Wang montrent indépendement l'existence des solutions au problème de Plateau paramétrique dans $\mathbb{R}^{m+1}$ pour toute fonction de courbure convexe de type infini, et dans [43], Sheng, Urbas & Wang étendent ce résultat au cas particulier des quotients de courbure de type convexe, c'est-à-dire, $\sigma_{m,k}$ pour $1 \leq k < m$.

Il faut souligner pourtant que, malgré les apparences, les résultats [22], [23] et [64] ne disent presque rien sur le problème de Plateau dans des variétés ambiantes à courbure sectionnelle non-constante. En effet, pour appliquer la méthode de Perron - qui joue un rôle centrale dans leurs preuves - il faut que l'espace ambiant porte une abondance d'hypersurfaces totalement géodésiques, ce qui, en plus d'être rarement le cas, est aussi instable pour de petites perturbations de la métrique. Ils laissent alors ouvert le problème de Plateau paramétrique même dans des espaces très simples tels que $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{CH}^2$, etc.

Pourtant, dans [32], en utilisant des techniques complètement différentes, Labourie montre l'existence de solutions au problème de Plateau pour la courbure gaussienne, c'est-à-dire σ_2, dans le cas des *surfaces* immergées dans des variétés d'Hadamard de dimension 3. Par contre, puisque les techniques qu'il emploie consistent en une application ingénieuse de la théorie des courbes pseudo-holomorphes, il n'est pas clair comment les généraliser en dimension plus grande (mais c.f. Section 1.3).

Pour résumer, dans l'étude du problème de Plateau paramétrique pour les fonctions de courbure convexes, il restait alors trois problèmes ouverts, qui sont, en ordre d'intérêt : premièrement, de généraliser le résultat de Guan & Spruck, Trudinger & Wang et Labourie à des espaces ambiants généraux de dimension quelconque ; deuxièmement, d'étendre ces résultats au cas des fonctions de courbure générales, y-compris des fonctions de courbure de type fini ; et, troisièmement de montrer l'unicité (ou pas) des solutions ainsi obtenues. C'est une réponse très générale à ces trois questions qui fait l'objet de mes travaux [48], [51] et [55], et on y obtient des résultats comme

Theorem 1.4.1

Soit $(K, \Lambda) = (\sigma_3, \Lambda_+)$ et soit $k > 0$. Pour toute hypersurface immergée lisse, Σ, dans $\mathbb{CH}^2$, compacte, à bord non-trivial, LSC, générique, et à K-courbure en tout point minorée par k, il existe une hypersurface immergée lisse, Σ, compacte, LSC et à K-courbure en tout point égale à k telle que $\partial\Sigma = \partial\hat{\Sigma}$.

Au lieu d'obtenir l'unicité, on peut montrer que le nombre de solutions, comptées avec parité algébrique, est toujours égal à 1 (c.f. Section 1.5). En particulier, dans certains cas très particuliers, on peut montrer que la parité de chaque solution est positive, et on obtient alors l'unicité dans ces cas-ci. Par exemple,

Theorem 1.4.2

Soit $(K, \Lambda) = (\sigma_{3,2}, \Lambda_+)$ et soit $0 < k < 1/4$. Pour toute hypersurface immergée lisse, Σ, dans $\mathbb{CH}^2$, compacte, à bord non-trivial, LSC, générique, et à K-courbure en tout point minorée par k, il existe une unique hypersurface immergée lisse, Σ, compacte, LSC et à courbure en tout point égale à k telle que $\partial\Sigma = \partial\hat{\Sigma}$.

Ces deux théorèmes-ci sont des cas particuliers d'un résultat d'existence très général. D'abord, pour une fonction de courbure, (K, Λ), on définit

$$\mu_\infty(K) = \operatorname*{LimInf}_{\|x\|=1, x\to\partial\Lambda} DK_x(1, ..., 1).$$

La valeur $\mu_\infty(K)$ est strictement plus grande que 1 pour toute fonction de courbure, K, et est infinie pour toute fonction de courbure de type infini. On obtient

Theorem 1.4.3, Problème de Plateau général.

Soit (K,Λ_+) une fonction de courbure convexe, soit M une variété d'Hadamard de dimension $(d+1)$, soit $\kappa : M \rightarrow]0,\infty[$ une fonction lisse, et soit $\hat{\Sigma}$ une hypersurface immergée, lisse, LSC, à bord non-trivial telle que

(1) $K(\hat{\Sigma}) > \kappa$ en tout point ; et

(2) $\partial\hat{K}$ soit générique.

Supposons en plus qu'il existe $p \in M$ et $R > 0$ tels que

(3) $\hat{\Sigma} \subseteq B_R(p)$; et

(4) $R\kappa(q) < \mu_\infty(K)$ pour tout $q \in B_R(p)$.

Alors, il existe une hypersurface, Σ, lisse et LSC, telle que

(5) $K(\Sigma) = \kappa$ en tout point ; et

(6) $\partial\Sigma = \partial\hat{\Sigma}$.

1.5 - Topologie différentielle des espaces d'immersions. Soit $M := M^{d+1}$ une variété riemannienne compacte et orientée de dimension $(d+1)$ et soit $\Sigma := \Sigma^d$ une variété compacte et orientée de dimension d. On développe une théorie du degré topologique pour des familles d'immersions de Σ dans M afin d'étudier l'existence et, dans une certaine mesure, l'unicité d'immersions à courbure constante ou préscrite. Soit $\hat{\mathcal{I}}$ l'espace de toutes les immersions lisses, $i : \Sigma \rightarrow M$, qui sont simples au sens où pour toute paire de points p et q dans Σ, et pour toute paire de voisinages U et V suffisament petits de p et de q respectivement,

$$i(U) \neq i(V).$$

On munit $\hat{\mathcal{I}}$ de la topologie de la convergence C^∞. Le groupe, $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$, des difféomorphismes de Σ qui préservent l'orientation, agit sur $\mathcal{I}$ par composition. Soit $\mathcal{I}$ le quotient de $\hat{\mathcal{I}}$ par cette action muni de la topologie quotient. Dans la suite, on identifie souvent la classe d'équivalence, $[i]$, avec l'élément représentatif, i.

Il convient de préciser tout d'abord dans quel sens l'espace $\mathcal{I}$ est une variété lisse. En effet, si $[i]$ est une immersion de $\mathcal{I}$, alors toute autre immersion $[i']$ suffisament proche de $[i]$ est le graphe au dessus de $[i]$ d'une unique fonction lisse $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dans le sens où il existe un unique difféomorphisme $\alpha : \Sigma \rightarrow \Sigma$ tel que

$$(i' \circ \alpha)(x) = \mathrm{Exp}_x(f(x)N_i(x)),$$

où Exp est l'application exponentielle de M et N_i est le champ de vecteurs normaux unitaires sur i qui est compatible avec l'orientation. On obtient alors un *homéomorphisme*, Φ, d'un ouvert, $\mathcal{U}$, de $\mathcal{I}$ dans un ouvert, $\mathcal{V}$, de $C^\infty(\Sigma)$, et on appelle le triplet $(\Phi,\mathcal{U},\mathcal{V})$ **carte graphique** de $\mathcal{I}$. Ainsi, l'espace $\mathcal{I}$ porte une structure naturelle de variété *topologique* modelée sur $C^\infty(\Sigma)$.

Pourtant, le problème de comment munir cet espace d'une structure de variété lisse n'est pas complètement trivial, surtout du point de vue pédagogique. En effet, d'un côté, la théorie relativement simple des fonctions lisses entre des variétés de Banach est trop restrictive puisque les applications de transition entre des cartes graphiques ne sont pas lisses au sens de Banach. De l'autre côté, par contre, tout en nous convenant du point de vue analytique, la théorie des variétés de Frechet lisses et sages (c.f. [25]) est, à notre avis, tellement chère du point de vue technique qu'on préfère nous en servir le moins possible.

On introduit alors la théorie des applications faiblement lisses qui, à notre avis, donne un formalisme à la fois assez simple à comprendre, et suffisament général pour traiter les objets qui nous intéressent. Soit X, Y_1 et Y_2 alors des variétés compactes et lisses. On dit que l'application $\phi : X \to C^\infty(Y_i)$ est **fortement lisse** lorsque l'application $(x, y) \mapsto \phi(x)(y)$ est lisse et, pour des ouverts $\mathcal{U}_1$ dans $C^\infty(Y_1)$ et $\mathcal{U}_2$ dans $C^\infty(Y_2)$, on dit que l'application $\Phi : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ est **faiblement lisse** lorsqu'elle envoie par composition des applications fortement lisses continûment en des applications fortement lisses. En choisissant $X := \{x_0\}$ la variété consistant d'un seul point, on voit que toute application faiblement lisse est, en particulier, continue.

Même si elle n'admet pas de théorème d'inversion locale, la théorie des applications faiblement lisses admet par ailleurs une théorie tout-à-fait satisfaisante de variétés différentielles. En effet, toute application faiblement lisse admet une dérivée qui est aussi faiblement lisse, et toute variété faiblement lisse admet un fibré tangent (à savoir, l'ensemble des classes d'équivalence des courbes fortement lisses dans cette variété) dont l'espace total est aussi une variété faiblement lisse. Ainsi elle nous fournit tous les outils requis pour l'étude de la topologie différentielle de $\mathcal{I}$, sauf de rares moments où on fait appel au théorème des fonctions implicites pour des espaces de Banach lorsque cela devient nécéssaire.

Comme les applications de transition entre des cartes graphiques sont faiblement lisses, $\mathcal{I}$ porte naturellement la structure d'une variété faiblement lisse. Étant donné une immersion $[i]$ dans $\mathcal{I}$, et une fonction lisse $f \in C^\infty(\Sigma)$, on définit la courbe fortement lisse $c :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathcal{I}$ par

$$c(t)(x) = \mathrm{Exp}_x(f(x)N_i(x)),$$

et on note $[i, f]$ son vecteur tangent au point $t = 0$. De cette manière, on identifie $C^\infty(\Sigma)$ avec l'espace tangent $T_{[i]}\mathcal{I}$ de $\mathcal{I}$ en $[i]$. Remarquons, en particulier, que pour tout $\alpha \in \mathrm{Diff}^+(\Sigma)$, le vecteur $[i \circ \alpha, f \circ \alpha]$ s'identifie avec le vecteur $[i, f]$.

Soit maintenant (K, Λ) une fonction de courbure (c.f. Section 1.4). Dans ce qui suit, il est fondamental qu'on suppose que (K, Λ) soit **elliptique** au sens de la Section 1.4. On montre que K définit un champ de vecteurs faiblement lisse sur un ouvert de $\mathcal{I}$. En effet, soit $\mathcal{U}$ un sous-ensemble **ouvert** de $\mathcal{I}$ ne comprenant que des éléments strictement K-convexes. Pour $[i] \in \mathcal{U}$, soit $K_i \in C^\infty(\Sigma)$ sa K-courbure, c'est-à-dire

$$K_i(x) := K(A_i(x)),$$

où A_i est l'opérateur de Weingarten de l'immersion i. Comme pour tout $[i] \in \mathcal{U}$ et pour tout $\alpha \in \mathrm{Diff}^+(\Sigma)$, $K_{i\circ\alpha} = K_i \circ \alpha$, la paire $[i, K_i]$ définit en tout point un vecteur tangent à $\mathcal{I}$ nous fournissant ainsi le champ de vecteurs désiré.

Il existe une dérivée covariante naturelle, D, qui agit sur les champs de vecteurs sur $\mathcal{I}$. En particulier, l'action de cette dérivée covariante sur K redonne l'opérateur de Jacobi de K, c'est-à-dire

$$D_iK[i,f] = [i, J_if],$$

où J_i est l'opérateur de Jacobi de la K-courbure autour de l'immersion i. Rappelons que $J_i : C^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ est un opérateur à dérivées partielles linéaire d'ordre 2. En plus, comme la fonction de courbure (K, Λ) est elliptique, et comme $\mathcal{U}$ ne comprend que des éléments strictement K-convexes, J_i est aussi en tout point un opérateur elliptique, ce qui joue un rôle essentiel dans ce qui suit.

Soit maintenant $\mathcal{D}$ un sous-ensemble ouvert de $C^\infty(M)$ et soit $\Pi : \mathcal{D} \times \mathcal{U} \to \mathcal{D}$ la projection sur la première composante. Définissons $\hat{K} : \mathcal{D} \times \mathcal{U} \to T\mathcal{U}$ par

$$\hat{K}(f, [i]) = [i, K_i - f \circ i].$$

Voyons que $\hat{K}$ définit une famille faiblement lisse de champs de vecteurs sur $\mathcal{U}$ paramétrée par $\mathcal{D}$. Soit $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{U}$ l'ensemble des solutions, c'est-à-dire

$$\mathcal{Z} := \left\{ (f, [i]) \mid \hat{K}(f, [i]) = 0 \right\}.$$

En d'autres termes, $\mathcal{Z}$ est l'ensemble de toutes les paires $(f, [i])$ où la K-courbure de l'immersion, i, est prescrite en tout point par la fonction, f. Tous nos résultats dépendent de la supposition fondamentale que la restriction de la projection, Π, à l'espace des solutions, $\mathcal{Z}$, est **propre**.

On peut maintenant concevoir le degré topologique de deux manières complémentaires. D'abord, en fixant $f \in \mathcal{D}$, et en étudiant la restriction de $\hat{K}$ à $\{f\} \times \mathcal{U}$, on obtient un degré topologique des champs de vecteurs, qui suit la tradition de Elworthy & Tromba et Schneider (c.f. [12], [62], [41] et [42]). En particulier, cette interprétation permet l'identification heuristique de ce degré topologique avec la caractéristique d'Euler de la variété $\mathcal{U}$. Par contre, en considérant la restriction de Π au sous-espace $\mathcal{Z}$, on obtient un degré d'application compatible avec les constructions [65] et [66] de White. Tout en étant complètement équivalentes, ces deux interprétations suggèrent des approches différentes, et, étant un peu plus directe, c'est l'approche de White qu'on suivra dans la suite.

On définit **l'opérateur de Jacobi** de $\hat{K}$ tel que

$$D_{2,(f,[i])}\hat{K}[i, f] = [i, J_{i,f}g],$$

où $D_{2,(f,[i])}$ est la dérivée partielle de $\hat{K}$ respectivement à la seconde composante au point $(f, [i])$. Disons qu'un élément $(f, [i])$ de $\mathcal{Z}$ est **non-dégeneré** lorsque son operateur de Jacobi, $J_{f,i}$, est non-dégénéré. Ensuite, disons que la fonction $f \in \mathcal{D}$ est une **valeur régulière** de Π lorsque tout element $(f, [i])$ de $\mathcal{Z}_f := (\Pi|_{\mathcal{Z}})^{-1}(\{f\})$ est non-dégénéré. Dans ce cas-ci, l'ensemble $\mathcal{Z}_f$ ne comprend que des éléments isolés et est donc, par proprété, un ensemble fini. En analysant le spectre de $J_{f,i}$ on détermine ensuite une parité de chaque élément de $\mathcal{Z}_f$. En effet, lorsque $(f, [i])$ est non-dégénéré, on montre que le spectre de $J_{f,i}$ ne contient qu'un nombre fini de valeurs propres réelles et strictement négatives qui sont toutes de multiplicité finie. Ainsi, on définit $\mathrm{Sig}(f, [i])$ comme étant la parité de la somme des multiplicités de ces valeurs propres, et on définit le degré de toute valeur régulière, f, de Π par

$$\mathrm{Deg}(\Pi|f) := \sum_{(f,[i]) \in \mathcal{Z}_f} \mathrm{Sig}(f, [i]).$$

On obtient (c.f. [39])

Theorem 1.5.1, Le degré topologique.

$\mathrm{Deg}(\Pi|f)$ *est indépendant du choix de la valeur régulière* f *de* Π.

Lorsque Σ est la sphère euclidienne, en étudiant le comportement asymptotique des immersions à courbure préscrite par f lorsque f tend vers $+\infty$, on montre que dans plusieurs cas qui nous intéressent, le degré est égale à (-1) fois la caractéristique d'Euler de la variété ambiante. Ainsi, en montrant - ou en s'en servant - des résultats de compacité appropriés, on obtient plusieurs résultats de comptage de solutions, dont voici ci-dessous quelques exemples.

Premièrement, soit

$$H_0 := 4\mathrm{Max}\left(\|R\|^{1/2}, \|\nabla R\|^{1/3}\right),$$

où R et ∇R sont respectivement le tenseur de courbure de Riemann de M et sa dérivée covariante, et soit

$$\mathcal{D} := \left\{ f \in C^\infty(M) \;\middle|\; \begin{array}{c} f > H_0,\ \text{et} \\ \|D^2 f\| < \dfrac{3n}{3n-2} H_0^2. \end{array} \right\}.$$

On rappelle qu'un plongement d'Alexandrov est une immersion $i : S^m \to M$ qui s'étend à une immersion de la boule unité fermée, $\overline{B}^{m+1}$, dans M. On obtient (c.f. [39]),

Théorème 1.5.2, Hypersphères à courbure moyenne prescrite.

Si $\Sigma := S^m$ *est la sphère euclidienne, alors, pour* $f \in \mathcal{D}$ *générique, il existe au moins* $\chi(M)$ *plongements d'Alexandrov* $i : \Sigma \to M$ *à courbure moyenne prescrite par* f.

Ensuite, rappelons qu'une surface minimale à bord libre dans une variété à bord M est une surface minimale qui rencontre ∂M orthogonalement. En adaptant les techniques introduites ici au cas des surfaces à bord libre, et en se servant du résultat de compacité [15] de Fraser & Li, on obtient (c.f. [35]),

Théorème 1.5.3, Cylindres minimaux à bord libre.

Soit $M := B^3$ *la boule unité fermée de dimension* 3. *Soit* $\Sigma := S^1 \times [0,1]$ *un cylindre de dimension* 2. *Soit* g *une métrique sur* M *à courbure de Ricci non-négative et telle que* ∂M *soit strictement concave. Alors, il existe au moins un plongement* $i : \Sigma \to M$ *minimale à bord libre.*

Enfin, rappelons qu'une variété à courbure sectionnelle positive est dite 1/4-pincée lorsque le supremum de sa courbure sectionnelle est strictement moins que 4 fois l'infimum de sa courbure sectionnelle. Dans ce cas-ci, on obtient (c.f. Section 1.3),

Théorème 1.5.4, Hypersphères à courbure spéciale lagrangienne constante.

Soit $m \geq 3$, *soit* $\Sigma := S^m$ *la sphère euclidienne de dimension* m, *et soit* M^{m+1} *une variété* 1/4*-pincée. Alors, pour* $f : M \to]0,\infty[$ *générique, le nombre algébrique des plongements*

LSC, $i : \Sigma \to M$, à courbure spéciale lagrangienne prescrite par f est égale à (-1) fois $\chi(M)$.

En particulier, en modifiant légèrement les hypothèses du Théorème 1.5.4, et en appliquant un simple argument de dualité, on obtient le théorème suivant, de type Weyl, sur des plongements à courbure scalaire prescrite.

Théorème 1.5.5, Hypersphères à courbure scalaire constante.

Soit S^3 et S^4 les sphères euclidiennes de dimension 3 et 4 respectivement. Alors, pour toute $f : S^4 \to]1, \infty[$ lisse il existe au moins un plongement LSC, $i : \Sigma^3 \to \Sigma^4$ à courbure scalaire prescrite en tout point par f. En plus, pour f générique, il existe au moins 2 telles sphères.

2 - Selected Research Projects.

My research is largely focused on the study of the non-linear elliptic PDEs that arise in geometric analysis. In recent years, I have become interested in the Morse theoretical questions related to these problems. Together these lead to many interesting open questions across a broad range of mathematics, and below is a summary of what I consider to be the two most interesting projects that I am currently working on.

2.1 - Differential Topology and Morse/Floer Theory. This project aims to investigate the relationship between the theory of constant curvature surfaces and hypersurfaces on the one hand, and infinite dimensional differential topology and Morse/Floer theory on the other.

Historical Background

The area functional: Let $M := M^{n+1}$ be a compact, $(n+1)$-dimensional Riemannian manifold, let $S := S^n$ be a compact n-dimensional manifold, and let $\mathcal{E}$ be the space of reparametrisation equivalence classes of smooth embeddings (or immersions) $e : S \to M$. We conceive of $\mathcal{E}$ as an infinite-dimensional manifold, and we view minimal surfaces as critical points of the area functional $\mathcal{A} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$. Starting from this perspective, it has proven fruitful to investigate the relationship between infinite dimensional differential topology on the one hand, and existence and uniqueness problems for minimal surfaces on the other. Indeed, various differential topological degree theories have been developed which count the number of solutions (always with algebraic sign!) for generic data. A non-zero degree then yields existence and some measure of uniqueness. Thus in [65] and [66], White develops a degree theory for embedded minimal submanifolds inside certain 3-manifolds. He then uses this degree theory to prove a remarkable existence result for embedded minimal tori inside these manifolds by showing that the number of such embedded tori is generically equal to 1. Likewise, in [35], in collaboration with Davi Máximo and Ivaldo Nunes, we extend White's differential topological degree theory to the case of embedded free boundary minimal submanifolds. In like manner, we use this to prove existence of embedded free boundary minimal annuli inside these manifolds by showing that the degree is, again, generically equal to 1.

The Dirichlet energy: Now let $S := S^2$ be a surface, and let $H^{1,2}(S, M)$ be the Sobolev space of $H^{1,2}$ mappings from S into M. A complementary and more-studied approach has been to view minimal surfaces instead as critical points of the Dirichlet energy functional $\mathcal{D} : H^{1,2}(S, M) \to \mathbb{R}$, and a number of impressive results have been obtained. Thus, for example, in [4], Böhme & Tromba develop a powerful degree theory for immersed minimal disks, which Tromba uses in [63] to prove that the number of immersed minimal disks spanning a curve in $\mathbb{R}^3$ is generically equal to 1. At the same time, in [60], Struwe develops a similar degree theory, which he applies in [61] to show that the number of immersed minimal annuli spanning a pair of curves in $\mathbb{R}^3$ is generically equal to 0. In particular, the number of such annuli is therefore generically even, and since Shiffman proves in [44] the existence of at least one solution, it follows from Struwe's result that there exists another, which is also unstable.

Zeroes of vector fields: More recently, by studying zeroes of certain vector fields over $\mathcal{E}$ instead of critical points of functions, more general notions of curvature have been treated. Thus, in [41] and [42], Schneider uses this approach to develop degree theory for curves of constant geodesic curvature inside certain closed surfaces. In particular, he proves that in many cases the number of solutions is generically equal to the Euler characteristic of the surface, which therefore yields existence when the surface has genus different to 0. In [39], in collaboration with Harold Rosenberg, we construct a far more general degree theory for closed constant curvature hypersurfaces for various notions of curvature inside various ambient spaces. Furthermore, by determining the degree in [56], we show that in many cases the number of solutions is again generically equal to the Euler characteristic of the ambient space, which again yields various new existence results. Likewise, in [51] and [55], we use this approach to construct a $\mathbb{Z}_2$-valued degree theory for constant extrinsic curvature hypersurfaces with prescribed boundary in general Hadamard manifolds. By showing that the number of solutions is generically equal to 1, not only do we prove existence, but we also obtain a partial answer to the problem of uniqueness left open by Guan & Spruck in [22] and Trudinger & Wang in [64].

Morse/Floer theory and mean curvature flow: Returning to the case of the area functional, a hitherto largely unexploited approach lies in the development of a Morse/Floer theory for this functional. The theory of Morse/Floer homology is aleady well known for its revolutionary impact in the field of symplectic geometry (c.f. [14] and [36] for a broad survey), and in the present setting, it would yield lower bounds for the number of minimal or constant mean curvature surfaces in terms of the Betti numbers of the ambient space. This would constitute a considerable improvement on existing results, and even on the Morse inequalities obtained by Jost and Struwe in [29]. In particular, the natural gradient flow to be studied in this case is the well-known mean curvature flow, allowing us to import many ideas from this already highly developed theory (c.f. [33] for a good review). Indeed, in recent work, [53], by obtaining a compactness result for families of eternal (that is, defined for all time) mean curvature flows, we have already shown the feasability of this approach in a restricted setting.

This is a promising new field which, even without the certainty of complete success, presents many new ideas ripe for study.

Review of Author's Contributions to the Field

Degree theory of immersed hypersurfaces: In [48], [51], [35], [39] and [55] we develop various new degree theories for immersed and embedded hypersurfaces of constant and prescribed curvature in various settings and for various notions of curvature, and these allow us to prove various new existence results. In [48] and [51], we develop a new $\mathbb{Z}_2$-valued degree theory for locally strictly convex immersed hypersurfaces of constant extrinsic curvature inside Hadamard manifolds. This allows us to extend the existence results [22] of Guan & Spruck and [64] of Trudinger & Wang for solutions to the Plateau problem in Euclidean space to a far more general class of ambient spaces, and to go some measure towards proving uniqueness, which is a problem left completely open by the techniques of Guan & Spruck and Trudinger & Wang. Furthermore, in [55] we extend this degree theory to more general curvature functions, yielding existence results inside a large class of ambient spaces for a larger class of curvature functions than has hitherto been considered.

In [39], by developing a new non-variational extension of the approach [67] of White, we obtain a new $\mathbb{Z}$-valued degree theory for closed constant curvature immersed hypersurfaces for various notions of curvature. In particular, we extend the results developed by Schneider in [41] and [42] for constant geodesic curvature curves inside surfaces to more general notions of curvature inside higher dimensional ambient spaces. Furthermore, in [56], by refining the work [68] of Ye, we develop a perturbation argument which allows us to calculate this degree. We thus show that in many cases this degree is equal to the Euler Characteristic of the ambient space, yielding new existence results in various settings.

In [35], taking our inspiration again from White's approach we develop a $\mathbb{Z}$-valued degree theory for free boundary minimal surfaces inside certain 3-manifolds with locally strictly convex boundary. This proves in particular a new existence result for free boundary minimal annuli inside strictly convex subsets of $\mathbb{R}^3$ with smooth boundary.

Morse Theory: In [53], we prove a new compactness result modulo broken trajectories for families of eternal (that is, defined for all time) forced mean curvature flows of hyperspheres inside compact hyperbolic manifolds. Our aim is to use the theory of mean curvature flows together with Morse/Floer homology theory to obtain new lower bounds on the number of constant curvature immersed hypersurfaces inside general manifolds for various notions of curvature. The results of [53] allow us to develop a toy Morse-homology theory for certain prescribed mean curvature hyperspheres inside hyperbolic manifolds. In particular, they allow us to obtain refinements of existence results developed in [39]. Finally, in [57], we use Morse homology to prove a bifurcation result for the sets of solutions to the Allen-Cahn Equation, showing how the number of solutions tends to infinity as the parameter tends to 0.

Proposed Research Topics

Orbifolds and the problem of immersions: The space $\mathcal{E}$ introduced above is the quotient by the reparametrisation group of the space of smooth embeddings (or immersions) of S into M. This quotient structure remains relatively simple when we are required only to work with embeddings, but when non-embedded immersions are admitted, the orbifold points of $\mathcal{E}$ play a non-trivial rôle. A satisfactory treatment of these points should yield a $\mathbb{Q}$-valued degree theory, and, in particular, stronger existence results than those developed in [39].

Perturbation of solutions of parabolic equations: In [68], Ye uses a perturbation argument to prove the existence of foliations of constant mean curvature hypersurfaces near any critical point of the scalar curvature functional of the ambient manifold M. In [56], we use this to show that the degree is in many cases equal to the Euler characteristic of the ambient space. The complete development of a Morse homology as outlined above would require analogous perturbation results for eternal forced mean curvature flows in M. This involves perturbing solutions of parabolic operators, but is otherwise similar to the elliptic case studied by Ye, although the technical challenges are greater. Various other perturbation approaches also exist which are yet to be exploited.

Compactness results: All infinite-dimensional differential topology relies on compactness results, be it for solutions to the elliptic problem (that is, fixed points), or to the parabolic problem (that is, trajectories). Developing new compactness results is a central aim of our research, and any new compactness result applied to the machinery will yield interesting new existence results. This is discussed more thoroughly below.

Two conjectures: One long term focus for our research will be the application of Morse homology theory towards the resolution of the following two conjectures:

Conjecture 2.1.1, White Conjecture

For almost every (in the sense of Baire) metric of positive Ricci curvature on S^3, there exist at least 9 distinct embedded minimal tori.

Conjecture 2.1.2

For almost every (in the sense of Baire) metric of positive Ricci curvature on B^3 (the closed unit ball in $\mathbb{R}^3$) with strictly concave boundary, there exist at least 3 distinct free boundary minimal annuli.

Another conjecture: The results already obtained in [39] lead us to formulate the following simpler conjecture:

Conjecture 2.1.3

For any Riemannian manifold, (M, g), denote:

$$H_0(M, g) = 4\mathrm{Max}(\|R\|^{1/2}, \|\nabla R\|^{1/3}),$$

where R is the Riemann curvature tensor of (M, g) and ∇R its covariant derivative. For almost every (in the sense of Baire) Riemannian manifold, and for all $H > H_0(M, g)$, the number of Alexandrov embedded hyperspheres in M of constant mean curvature equal to H is bounded below by the sum of the Betti numbers of M.

Existing results suggest that this conjecture may be within relatively close reach. Indeed, there exists a dual version which asks instead for Alexandrov embedded hypersurfaces of prescribed mean curvature. Our recent result [53] should suffice to construct a Morse/Floer homology that would allow us to prove this dual conjecture in the case where M is almost hyperbolic and $H_0 > 8$.

The Hölder theoretic framework: A Hölder theoretic framework for Morse-Homology would be better adapted to the study of the area functional than the more usual Sobolev theoretic framework. The Hölder theoretic framework has largely been overlooked as the spaces involved are non-separable. However, with the new but straightforward concept of σ-properness which we introduced in [57], this non-separability no longer presents a problem. As there are various respects in which the Hölder theoretic framework simplifies the formal construction of Morse-Homology theory, it becomes worthy of study in its own right. and would form the content of a good review paper.

Other applications: The techniques developed in understanding the Morse/Floer theory of immersed hypersurfaces readily adapt to other Morse-theoretic problems. For example, in [57], we use these techniques to prove a simple bifurcation result for the set of solutions to the Allen-Cahn equation. Morse/Floer theory remains to this day a rich theory with boundless applications.

2.2 - Compactness Results in Submanifold Theory. This project aims to develop new compactness results for families of solutions to the non-linear elliptic and parabolic PDEs that arise in geometric analysis.

Historical Background

The general principle of a compactness: As a general principle, a large part of geometric analysis reduces to proving compactness results (or, equivalently, a-priori estimates) for families of solutions to certain PDEs. For example, compactness results for families of integral currents of bounded area form the basis of geometric measure theory (c.f. [13]); compactness results form the basis of the continuity technique and the Perron method, which are common approaches to the proof of the existence of solutions of non-linear PDEs, and in particular the Dirichlet and Plateau problems (c.f. [18] for a general treatment); and compactness results also underlie all infinite-dimensional differential topological degree theories, including Gromov-Witten theory (c.f. [36]), Seiberg-Witten theory (c.f. [37]), Floer homology theory (c.f. [14]), and so on.

Plateau and Minkowski problems: We recall that the Plateau and Minkowski problems ask for the existence of constant or prescribed curvature surfaces or hypersurfaces in various settings for various notions of curvature subject to various constraints. The linear Plateau and Minkowski problems treat minimal and constant mean curvature surfaces and hypersurfaces. The non-linear Plateau and Minkowski problems treat more general notions of curvature.

Compactness results for families of solutions often play an important rôle in solving these problems. Thus, in [31], Labourie uses Gromov's compactness theory for pseudo-holomorphic curves (c.f. [19]) to prove a remarkable compactness result for families of locally strictly convex immersed surfaces of constant extrinsic curvature. He applies this result in [32] to prove the existence of solutions to a general asymptotic Plateau problem inside 3-dimensional Hadamard manifolds. In particular, this forms the basis of the Weierstrass-type representation for such surfaces in terms of holomorphic data which we develop in [52], [45] and [58] (see below).

However, by far the most widespread approach to the non-linear Plateau problem begins with the work [7] of Caffarelli, Nirenberg & Spruck, which applies the powerful barrier techniques developed by these authors in [5] to obtain a-priori estimates for solutions to non-linear Plateau problems which are graphs over convex subsets of $\mathbb{R}^n$ and which allows them to obtain strong existence results in this case. The remarkable success of this technique has led to its extension in various different directions, most notably to more general Plateau problems, for example, by Guan & Spruck in [21] and by Ivochkina & Tomi in [28], and to asymptotic Plateau problems in hyperbolic space, for example, by Rosenberg & Spruck in [40], to quote but a few. However, by far the most impressive of these extensions is obtained simultaneously by Guan & Spruck in [22] and Trudinger & Wang in [64]. By proving in addition a-priori Lipschitz estimates for locally strictly convex immersed hypersurfaces in Euclidean space, these authors obtain a beautiful and general existence result for solutions to the non-linear Plateau problem for locally strictly convex hypersurfaces of constant extrinsic curvature in Euclidean space. This was later extended by Guan & Spruck in [23] and Sheng, Urbas & Wang in [43] to treat more general notions of curvature. The techniques used in these papers nonetheless have the limitation of not allowing extensions to more general ambient spaces (see below). However, in [51], [48] and [55] by developing a new totally geometric approach to Caffarelli, Nirenberg and Spruck's barrier technique in conjunction with a new degree theoretic argument, we extend the results of Guan & Spruck and Trudinger & Wang to a very large class of ambient spaces, whilst treating at the same time a much larger class of curvature functions.

Differential topology and Morse theory: Compactness results also often yield interesting differential topological theories. Whilst these are motivated by existence results they also constitute interesting objects of study in their own right. For example, the compactness result [9] of Choi & Schoen is used by White in [67] to develop a differential topological degree theory for embedded minimal surfaces in ambient 3-dimensional manifolds of positive Ricci curvature; in [39], we develop various novel compactness results in order to construct differential topological degree theories for various notions of curvature, including mean curvature, extrinsic curvature and special Lagrangian curvature; in [35], we use the compactness result [15] of Fraser & Li to develop a differential topological degree theory for embedded free boundary minimal surfaces in ambient 3-dimensional manifolds of positive Ricci curvature and strictly convex boundary; and so on. Although we have mostly been concerned with proving compactness results for families of solutions to non-linear elliptic PDEs, more recently we have begun to study the case of non-linear parabolic PDEs. Thus, in [53] we prove a compactness result for families of mean curvature flows in hyperbolic manifolds, which allows us to construct a Morse homology theory for constant mean curvature spheres in these manifolds.

Review of Author's Contributions to the Field

Plateau problems: In [51], [48] and [55], we develop a novel approach to the study of the non-linear Plateau problem which yields new existence results for locally strictly convex hypersurfaces of constant or prescribed curvature inside a large class of manifolds. We recall that since the 1980's, the non-linear Plateau problem in its various forms has attracted the interest of numerous mathematicians, including Caffarelli, Nirenberg & Spruck (c.f. [7]), Guan (c.f. [20]), Ivochkina & Tomi (c.f. [28]), Rosenberg & Spruck (c.f. [40]), Sheng, Urbas & Wang (c.f. [43]), and so on. Of these results, by far the most general were the beautiful existence theorems [22] of Guan & Spruck and [64] of Trudinger & Wang for hypersurface solutions to the Plateau problem in Euclidean spaces (though c.f. also [32] for the case of 3-dimensional ambient spaces and [23], [28] and [43] for more general curvature functions). However, as the techniques used by these authors rely heavily on the existence of large families of totally geodesic submanifolds, they do not extend to more general ambient spaces. In [51] and [48], by developing new totally parametric techniques along with new degree theoretic arguments, we fill this gap thereby extending the results of Guan & Spruck and Trudinger & Wang to a much greater class of ambient spaces. In addition, these new techniques yield partial information concerning the uniqueness of solutions, which is a problem left completely unsolved by the techniques of Guan & Spruck and Trudinger & Wang. Furthermore, in [55], by developing a novel, fully geometric approach to Caffarelli, Nirenberg and Spruck's barrier technique (c.f. [5], [6] and [7]), we extend our existence results further to a larger class of curvature functions than has hitherto been considered inside an equally large class of ambient spaces.

The Perron method: In [50] and [54], we use the special properties of special Lagrangian curvature (developed by the author in [49]) to prove new existence results for constant curvature hypersurfaces inside general manifolds of non-positive curvature. Indeed, as indicated above, the Perron method used by Guan & Spruck in [22] and Trudinger & Wang in [64] does not, in general, extend to more general ambient spaces. However, the unique properties possessed by constant special Lagrangian curvature hypersurfaces (c.f. [49]) do in fact allow a suitable extension to be carried out in this case. Thus, in [50] and [54], we obtain new existence results for solutions to the non-linear Plateau and Minkowski problems in a variety of settings. In particular, when the ambient manifold is 4-dimensional, this technique yields locally strictly convex hypersurfaces whose extrinsic curvature is a constant multiple of the mean curvature. By a duality argument, we show in [47] how this yields spacelike hypersurfaces of constant scalar curvature inside $(3+1)$-dimensional de-Sitter spacetimes, which are of particular interest in the study of General Relativity (c.f. [8]).

Duality: In [10], inspired by ideas developed by Harvey & Lawson in [27], we study a new concept of duality for the Plateau problem for general curvature functions. Using the Perron method, this yields a simple proof of existence of solutions to the Plateau problem for extrinsic curvature inside Euclidean space.

Weierstrass-type Representations: In [52] and [45], we prove new existence results for locally strictly convex surfaces of constant extrinsic curvature inside hyperbolic space, yielding in particular a new Weierstrass-type representation in terms of holomorphic data for such surfaces. Indeed, in [31], Labourie develops a compactness result for locally strictly convex surfaces of constant extrinsic curvature which he applies in [32] to prove various new existence results for such surfaces inside 3-dimensional Hadamard manifolds. In [52], we develop a refinement of Labourie's compactness result which allows us to prove a general existence result in the case where the ambient space is 3-dimensional hyperbolic space. In [45] and [58] by studying the asymptotic behaviour at infinity of these surfaces we obtain a new Weierstrass-type representation in terms of holomorphic data for locally strictly convex properly immersed surfaces of constant extrinsic curvature inside hyperbolic space whose ends are geometrically finite, which generalises in a certain sense the Weierstrass-type representation for flat surfaces in hyperbolic space developed by Galvez in [17].

Algebraic constraints: In [46], we use the result of [52] to prove the existence inside compact negatively curved 3-dimensional manifolds of locally strictly convex constant extrinsic curvature immersed surfaces subject to certain algebraic constraints on the fundamental groups. This is closely related to the work [16] of Gallo, Kapovich and Marden.

Proposed Research Topics

The Caffarelli, Nirenberg, Spruck Technique: In [51], [48] and [55], by developing a fully geometric approach to the barrier technique introduced by Caffarelli, Nirenberg and Spruck in [5], [6] and [7], we prove existence of solutions to the Plateau problem for general convex curvature functions in a large class of ambient spaces. Numerous open problems remain to be studied. Indeed, it is only in the final stage of the proof of the compactness result underlying [51], [48] and [55] that we require the ambient space to be simply connected. Yet we know in the case of special Lagrangian curvature that the non-linear Plateau problem can be solved in general manifolds. This leads us to hope that the same result may also be proven for more general notions of curvature. However, the required extension of the key compactness result to solutions of the non-linear Plateau problem inside ambient spaces of non-trivial topology continues to present a hard and interesting challenge. Furthermore, the corresponding compactness results for non-convex notions of curvature remain to be proven in the same generality. This even includes the case, for example, of σ_2-curvature, the sum of products of all pairs of principle curvatures, which is closely related to the scalar curvature. Even the special case of asymptotic Plateau problems in hyperbolic space, as recently studied by Guan & Spruck in [24], remains to be solved in complete generality. For these reasons and more, the field of non-linear Plateau problems continues to be a very active domain of study.

Special Lagrangian curvature: In [49], we introduce the concept of special Lagrangian curvature which extends the geometric properties of Bryant surfaces to higher dimensional ambient spaces. The geometric applications of this curvature notion have still to be fully developed. For example, as indicated above, the simple problem of proving existence of locally strictly convex immersed hyperspheres inside manifolds of positive sectional curvature should be accessible with a suitable modification of the techniques of [39]. Furthermore, in the semi-Riemannian setting, the concept of special Lagrangian curvature allows us to construct complete spacelike surfaces of constant scalar curvature inside de-Sitter spacetimes, which are useful in general relativity (c.f. [8]). A complete generalisation of the techniques of [49] to the semi-Riemannian setting remains to be developed and should have interesting applications in general relativity. In addition, the results of [49] are closely related to the "almost-Calabi-Yau" structure of the cotangent bundle. However, as Harvey & Lawson show in [26], this represents only one of many possible calibrations. The geometric applications of other calibrations remain to be studied.

Parabolic problems: Compactness results for families of solutions to parabolic PDEs are fundamental to the development of Morse homology theories. Various interesting cases present themselves. A compactness result for the gradient flow of the Length-Area functional should be fairly straightforward. This would yield a Morse homology for families of constant curvature curves in surfaces, leading to an improvement of the results [41] and [42] of Schneider. We believe the non-collapsing techniques [2] of Andrews may be used to prove compactness result for the gradient flow of the Area-Volume functional. This would yield a corresponding Morse homology for CMC surfaces. Finally, a compactness results for eternal (that is, defined for all time) mean curvature flows would yield a Morse homology for minimal surfaces, leading to a proof of Conjecture 2.1.1.

3 - Bibliography.

[1] Altschuler S., Wu L. F., Translating surfaces of the non-parametric mean curvature flow with prescribed contact angle, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **2**, (1994), 101–111

[2] Andrews B., Non-collapsing in mean-convex mean curvature flow, arXiv:1108.0247

[3] Ballmann W., Gromov M., Schroeder V., *Manifolds of nonpositive curvature*, Progress in Mathematics, **61**, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, (1985)

[4] Böhme R., Tromba A. J., The index theorem for classical minimal surfaces, *Ann. Math*, **113**, 447–499

[5] Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J., The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations. I. Monge Ampère equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, **37**, no. 3, (1984), 369–402

[6] Caffarelli L., Kohn J. J., Nirenberg L., Spruck J., The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. II. Complex Monge-Ampère, and uniformly elliptic, equations., *Comm. Pure Appl. Math.*, **38**, no. 2, (1985), 209–252

[7] Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J., Nonlinear second-order elliptic equations. V. The Dirichlet problem for Weingarten hypersurfaces, *Comm. Pure Appl. Math.*, **41**, no. 1, (1988), 47–70

[8] Cheng Q. M., Ishikawa S., Spacelike hypersurfaces with constant scalar curvature, *manuscripta math.*, **95**, (1998), 499-505

[9] Choi H., Schoen R., The space of minimal embeddings of a surface into a three-dimensional manifold of positive Ricci curvature, *Invent. Math.*, **81**, (no. 3), (1985), 387–394

[10] Clarke A., Smith G., The Perron Method and the Non-Linear Plateau problem, *Geom. Dedicata*, **163**, no. 1, (2013), 159–165.

[11] Clutterbuck J., Schnürer O., Schulze F., Stability of translating solutions to mean curvature flow, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **29**, (2007), 281-293

[12] Elworthy K. D., Tromba A. J., Degree theory on Banach manifolds, in *Nonlinear Functional Analysis (Proc. Sympos. Pure Math.)*, **Vol. XVIII**, Part 1, Chicago, Ill., (1968), 86–94, Amer. Math. Soc. Providence, R.I.

[13] Federer H., *Geometric measure theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **153**, Springer-Verlag, New York (1969)

[14] Floer A., Proof of the Arnold conjecture for surfaces and generalizations to certain Kähler manifolds, *Duke Math. J.*, **53**, no. 1, (1986), 1–32

[15] Fraser A., Li M., Compactness of the space of embedded minimal surfaces with free boundary in three-manifolds with nonnegative Ricci curvature and convex boundary, to appear in *J. Differential Geom.*

[16] Gallo D., Kapovich M., Marden A., The monodromy groups of Schwarzian equations on closed Riemann surfaces, *Ann. Math.* **151** (2000), no. 2, 625–704

[17] Gálvez J. A., Martínez A., Milán F., Flat surfaces in the hyperbolic 3-space, *Math. Ann.*, **316**, no. 3, (2000), 419–435

[18] Gilbarg D., Trudinger N. S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **224**, Springer-Verlag, Berlin, (1983)

[19] Gromov M., Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.*, **82**, no. 2, (1985), 307–347

[20] Guan B., The Dirichlet problem for Monge-Ampère equations in non-convex domains and spacelike hypersurfaces of constant Gauss curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **350**, (1998), 4955–4971

[21] Guan B., Spruck J., Boundary value problems on S^n for surfaces of constant Gauss curvature, *Ann. of Math.*, **138**, (1993), 601–624

[22] Guan B., Spruck J., The existence of hypersurfaces of constant Gauss curvature with prescribed boundary, *J. Differential Geom.*, **62**, no. 2, (2002), 259-287

[23] Guan B., Spruck J., Locally convex hypersurfaces of constant curvature with boundary, *Comm. Pure Appl. Math.*, **57**, no. 10, (2004), 1311–1331

[24] Guan B., Spruck J., Hypersurfaces of constant curvature in hyperbolic space. II., *J. Eur. Math. Soc.* **12** (2010), no. 3, 797–817

[25] Hamilton R. S., The inverse function theorem of Nash and Moser, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **7**, no. 1, (1982), 65-222

[26] Harvey R., Lawson H. B. Jr., Calibrated geometries, *Acta Math.*, **148**, (1982), 47–157

[27] Harvey F. R., Lawson H. B. Jr., Dirichlet Duality and the Nonlinear Dirichlet Problem on Riemannian Manifolds, arXiv:0907.1981

[28] Ivochkina N. M., Tomi F., Locally convex hypersurfaces of prescribed curvature and boundary, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **7**, (1998), no. 4, 293–314

[29] Jost J., Struwe M., Morse-Conley theory for minimal surfaces of varying topological type, *Invent. math.*, **102**, (1990), 465–499

[30] Kulkarni R.S., Pinkall U., A canonical metric for Möbius structures and its applications, *Math. Z.*, **216**, no. 1, (1994), no.1, 89–129

[31] Labourie F., Problèmes de Monge-Ampr̀e, courbes pseudo-holomorphes et laminations (French), *G.A.F.A.*, **7**, (1997), 496–534

[32] Labourie F., Un lemme de Morse pour les surfaces convexes (French), *Invent. Math.*, **141**, no. 2, (2000), 239–297

[33] Mantegazza C., *Lecture Notes on Mean Curvature Flow*, Progress in Mathematics, **290**, Springer, Basel, (2011)

[34] Martín F., Savas-Halilaj A., Smoczyk K., On the topology of translating solitons of the mean curvature flow, arXiv:1404.6703

[35] Máximo D., Nunes I., Smith G., Free boundary minimal annuli in convex three-manifolds, arXiv:1312.5392

[36] McDuff D., Salamon D., *J-holomorphic curves and symplectic topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications, **52**, American Mathematical Society, Providence, RI, (2012)

[37] Moore J. D., *Lectures on Seiberg-Witten Theory*, Lecture notes in mathematics, **1629**, Springer, (2001)

[38] Nguyen X. H., Translating tridents, *Comm. Partial Differential Equations*, **34**, (2009), 257–280

[39] Rosenberg H., Smith G., Degree theory of immersed hypersurfaces, arXiv:1010.1879

[40] Rosenberg H., Spruck J., On the existence of convex hypersurfaces of constant Gauss curvature in hyperbolic space, J. Differential Geom. 40 (1994), no. 2, 379–409

[41] Schneider M., Closed magnetic geodesics on S^2, *J. Differential Geom.*, **87**, no. 2, (2011), 343-388

[42] Schneider M., Closed magnetic geodesics on closed hyperbolic Riemann surfaces, arXiv:1009.1723

[43] Sheng W., Urbas J., Wang X., Interior curvature bounds for a class of curvature equations, *Duke Math. J.*, **123**, no. 2, (2004), 235–264

[44] Shiffman M., Unstable minimal surfaces with several boundaries, *Ann. Math.*, **43**, (1942), 197–222

[45] Smith G., Pointed k-surfaces, *Bull. Soc. Math. France*, **134**, no. 4, (2006), 509557

[46] Smith G., Equivariant Plateau problems, *Geom. Dedicata*, **140**, no. 1, (2009), 95–135.

[47] Smith G., Moduli of Flat Conformal Structures of Hyperbolic Type, *Geom. Dedicata*, **154**, no. 1, (2011), 47–80

[48] Smith G., Compactness results for immersions of prescribed Gaussian curvature I - analytic aspects, *Adv. Math.*, **229**, (2012), 731–769

[49] Smith G., Special Lagrangian curvature, *Math. Annalen*, **335**, no. 1, (2013), 57–95

[50] Smith G., The non-linear Plateau problem in non-positively curved manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **365**, (2013), 1109-1124.

[51] Smith G., Compactness results for immersions of prescribed Gaussian curvature II - geometric aspects, *Geom. Dedicata*, **172**, no. 1, (2014), 303–350

[52] Smith G., Hyperbolic Plateau problems, *Geom. Dedicata*, **176**, no. 1, (2015), 31–44

[53] Smith G., Eternal forced mean curvature flows I - a compactness result, to appear in *Geom. Dedicata*

[54] Smith G., The non-linear Dirichlet problem in Hadamard manifolds, arXiv:0908.3590.

[55] Smith G., The Plateau problem for convex curvature functions, arXiv:1008.3545

[56] Smith G., Constant curvature hyperspheres and the Euler Characterstic, arXiv:1103.3235

[57] Smith G., Bifurcation of solutions to the Allen-Cahn equation, arXiv:.

[58] Smith G., On an Enneper-Weierstrass-type representation of constant Gaussian curvature surfaces in 3-dimensional hyperbolic space, arXiv:1404.5006

[59] Smith G., On complete embedded translating solitons of the mean curvature flow that are of finite genus, arXiv:1501.04149

[60] Struwe M., On a critical point theory for minimal surfaces spanning a wire in $\mathbb{R}^n$, *J. Reine Angew. Math.*, **349**, (1984), 1–23

[61] Struwe M., A Morse theory for annulus type minimal surfaces, *J. Reine. Angew. Math.*, **368**, (1986), 1–27

[62] Tromba A. J., The Euler characteristic of vector fields on Banach manifolds and a globalization of Leray-Schauder degree, *Adv. in Math.*, **28**, no. 2, (1978), 148–173

[63] Tromba A. J., Degree theory on oriented infinite dimensional varieties and the Morse number of minimal surfaces spanning a curve in $\mathbb{R}^n$, *Manuscripta Math.*, **48**, (1984), 139–161

[64] Trudinger N. S., Wang X., On locally locally convex hypersurfaces with boundary, *J. Reine Angew. Math.*, **551**, (2002), 11–32

[65] White B., The space of m-dimensional surfaces that are stationary for a parametric elliptic functional, *Indiana Univ. Math. J.*, **36**, no. 3, (1987), 567-602

[66] White B., Every three-sphere of positive Ricci curvature contains a minimal embedded torus, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **21**, no. 1, (1989), 71-75

[67] White B., The space of minimal surfaces for varying Riemannian metrics, *Indiana Univ. Math. J.*, **40**, (1991), no. 1, 161–200

[68] Ye R., Foliation by constant mean curvature spheres, *Pacific J. Math.*, **147**, (1991), no. 2, 381–396