

# Homologie de Morse et hypersurfaces à courbure moyenne prescrite



Graham Smith

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro

Défense d'HDR, Institut Fourier, 8 février 2017

# Résultats de comptage de surfaces minimales - I

## **Théorème, Simon, Smith (1982)**

Pour toute métrique riemannienne  $g$  sur  $M := S^3$ , il existe au moins 1 sphère minimale plongée dans  $(M, g)$ .

## **Théorème, Grüter, Jost (1986)**

Pour toute métrique riemannienne  $g$  à bord *strictement concave* sur  $M := B^3$ , il existe au moins 1 disque minimal plongé dans  $(M, g)$  qui rencontre  $\partial M$  orthogonalement.

## Résultats de comptage de surfaces minimales - II

### **Théorème, White (1989)**

Pour toute métrique riemannienne  $g$  à courbure de Ricci *strictement positive* sur  $M := S^3$ , il existe au moins 1 tore minimal plongé dans  $(M, g)$ .

### **Théorème, Máximo, Nunes, S. (2013)**

Pour toute métrique riemannienne  $g$  à courbure de Ricci *positive* et à bord *strictement concave* sur  $M := B^3$ , il existe au moins 1 anneau minimal plongé dans  $(M, g)$  qui rencontre  $\partial M$  orthogonalement.

## Résultats de comptage de surfaces minimales - III

### **Théorème (Incomplet), Jost (1989)**

Pour toute métrique riemannienne  $g$  sur  $M := S^3$ , il existe au moins 4 sphères minimales plongées dans  $(M, g)$ .

### **Théorème (Incomplet), Jost (1989)**

Pour toute métrique riemannienne  $g$  sur  $M := B^3$  à bord à *courbure moyenne strictement négative*, il existe au moins 3 disques minimaux plongés dans  $(M, g)$  qui rencontrent  $\partial M$  orthogonalement.

# Résultats de comptage de surfaces minimales - IV

## Conjecture, White

Pour une métrique riemannienne *générique* à courbure de Ricci *strictement positive* sur  $M := S^3$  il existe au moins 9 tores minimaux plongés dans  $(M, g)$ .

## Conjecture, White dans $B^3$

Pour une métrique riemannienne *générique* à courbure de Ricci *positive* et à bord *strictement concave* sur  $M := S^3$  il existe au moins 3 anneaux minimaux plongés dans  $(M, g)$  qui rencontrent  $\partial M$  orthogonalement.

## L'espace de plongements

Les surfaces minimales sont les points critiques de la fonctionnelle d'aire.

Une minoration du nombre de surfaces minimales est alors équivalent à une minoration du nombre de points critiques de cette fonctionnelle.

Il devrait découler de la théorie de Morse que ce nombre-ci est minoré par la somme des nombres de Betti de l'espace des plongements.

En particulier, ceci est (essentiellement) un *invariant topologique* de l'espace des plongements.

## La numérologie des sphères plongées

**Heuristiquement**, l'espace des sphères plongées dans  $S^3$  a la même topologie que l'espace des sphères *minimales* plongées dans  $S^3$ .

Les sphères minimales plongées dans  $S^3$  sont des équateurs.

Les équateurs sont paramétrés - à réflexions près - par leurs centres.

L'espace des équateurs dans  $S^3$  est alors homéomorphe à  $\mathbb{RP}^3$ .

La somme de ses nombres de Betti est alors égale à 4.

## La numérologie des disques plongés

**Heuristiquement**, l'espace des disques plongés dans  $B^3$  qui rencontrent le bord orthogonalement a la même topologie que l'espace des disques *minimaux* plongés dans  $B^3$  qui rencontrent le bord orthogonalement.

Les disques minimaux plongés dans  $B^3$  qui rencontrent le bord orthogonalement sont des plans équatoriaux.

Les plans équatoriaux sont paramétrés par leurs axes.

L'espace des plans équatoriaux dans  $B^3$  est alors homéomorphe à  $\mathbb{RP}^2$ .

La somme de ses nombres de Betti est alors égale à 3.



# La numérologie des tores plongés

**Heuristiquement**, l'espace des tores plongés dans  $S^3$  a la même topologie que l'espace des tores *minimaux* plongés dans  $S^3$ .

## **Théorème, Brendle (2012)**

*Les seuls tores plongés dans  $S^3$  sont les tores de Clifford.*

L'espace des tores de Clifford est homéomorphe à  $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$ .

La somme de ses nombres de Betti est alors égale à 9.

# La numérogie des anneaux plongés

**Heuristiquement**, l'espace des anneaux plongés dans  $B^3$  qui rencontrent le bord orthogonalement a la même topologie que l'espace des anneaux *minimaux* plongés dans  $S^3$  qui rencontrent le bord orthogonalement.

## Conjecture

*Les seuls anneaux minimaux dans  $\mathbb{B}^3$  qui rencontrent le bord orthogonalement sont symétriques par rotation.*

Les anneaux minimaux symétriques par rotation sont paramétrés par leurs axes.

L'espace des anneaux minimaux symétriques par rotation est alors homéomorphe à  $\mathbb{R}P^2$ .

La somme de ses nombres de Betti est alors égale à 3.

# L'homologie de Morse

Soit  $X$  une variété compacte de *dimension finie*.

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse de type Morse-Smale.

Pour tout  $k$ , notons  $\text{Crit}(f; k)$  l'ensemble des points critiques de  $f$  d'indice de Morse  $k$ .

Pour tout  $k$ , notons  $C_k$  le  $\mathbb{Z}_2$ -module

$$C_k := \{\phi : \text{Crit}(f, k) \rightarrow \mathbb{Z}_2\}.$$

Soit  $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$  l'unique application linéaire telle que, pour tout  $X \in C_k$  et pour tout  $Y \in C_{k-1}$ ,  $\langle \partial_k \delta_X, \delta_Y \rangle$  soit égal au nombre de flots de gradient de  $X$  à  $Y$  modulo 2.

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0.$$

Appelons l'homologie  $H_k$  de  $(C_k, \partial_k)$  **l'homologie de Morse** de  $(X, f)$ .

## Des résultats de compacité

Les espaces de surfaces plongées dans  $\mathbb{S}^3$  et  $B^3$  décrits en haut sont de dimension **infinie**.

Ce défaut-ci est compensé par des résultats de compacité.

### **Théorème, Choi, Schoen (1985)**

Pour toute métrique riemannienne  $g$  à courbure de Ricci *strictement positive* sur  $M := S^3$ , et pour tout entier non-négatif  $m$ , l'espace des surfaces minimales plongées de genre  $m$  dans  $M$  est compact.

### **Théorème, Fraser, Li (2015)**

Pour toute métrique riemannienne  $g$  à courbure de Ricci *non-négative* et à bord *strictement concave* sur  $M := S^3$ , et pour toute paire  $(m, n)$  d'entiers positifs, l'espace des surfaces minimales plongées de genre  $m$  dans  $M$  à  $n$  bouts qui rencontrent le bord orthogonalement est compact.

## Des flots de courbure moyenne

Un **flot de courbure moyenne** est une application  $e : [0, T[ \times \Sigma \rightarrow M$  telle que, pour tout  $t$ ,  $e_t := e(t, \cdot)$  soit un plongement, et

$$\langle \partial_t e_t, N_t \rangle = -H_t.$$

Les flots de courbure moyenne sont des flots de gradient  $L^2$  de la fonctionnelle d'aire.

Pour construire une théorie de Morse de l'espace des immersions lisses, il faut donc comprendre le comportement à long terme des flots de courbure moyenne.

# Des flots de courbure moyenne éternels

Un **flot de courbure moyenne éternel** est un flot de courbure moyenne qui est défini pour tout temps.

Une *théorie d'homologie de Morse* découlerait du résultat suivant.

## Conjecture

Pour toute métrique riemannienne  $g$  sur  $M := S^3$  à courbure de Ricci *strictement positive*, l'espace des flots de courbure moyenne éternels et d'aire bornée dans  $(M, g)$  est compact au sens  $C_{\text{loc}}^\infty$ .

## Des flots de courbure moyenne forcés et éternels

Pour une fonction lisse  $f : M \rightarrow [0, \infty[$ , un **flot de courbure moyenne forcé** est une application  $e : [0, T[ \times \Sigma \rightarrow M$  telle que, pour tout  $t$ ,  $e_t := e(t, \cdot)$  soit un plongement, et

$$\langle \partial_t e_t, N_t \rangle = f \circ e_t - H_t.$$

### Théorème, S. (2015)

Soit  $M := T^{d+1}$  un tore de dimension  $(d+1)$ . Pour toute  $f : M \rightarrow ]0, \infty[$  telle que

$$\sup_{\xi_x \in TM, \|\xi_x\|=1} \|D^2 f(x)(\xi_x, \xi_x)\| < (3 - 2\sqrt{2}) \inf_{x \in M} |f(x)|^3,$$

l'espace des flots de courbure moyenne forcés et éternels avec force  $f$  est compact au sens  $C_{\text{loc}}^\infty$ .

(à quelques hypothèses techniques près...)

## La fonctionnelle “aire-moins-volume”

Soit  $f : T^{d+1} \rightarrow ]0, \infty[$  une fonction lisse et strictement positive.

Soit  $e : S^d \rightarrow T^{d+1}$  une immersion localement strictement convexe.

Cette immersion se relève en un **plongement**  $\tilde{e} : S^d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ .

On définit la fonctionnelle “aire-moins-volume” par

$$\mathcal{F}(e) := \text{Area}(e) - \int_{\text{Int}(e)} f(x) d\text{Vol}_x.$$

Le flot de courbure moyenne forcé est le flot de gradient  $L^2$  de cette fonctionnelle.



Alors...

Les points critiques de la fonctionnelle “aire-moins-volume” sont les hypersurfaces à courbure moyenne prescrite par  $f$ .

### **Théorème (travaille en cours)**

Soit  $T^{d+1}$  un tore de dimension  $(d + 1)$  (où  $d \geq 2$ ). Alors, pour  $f : T^{d+1} \rightarrow ]0, \infty[$  lisse et générique telle que

$$\sup_{x \in T^{d+1}, \|\xi\|=1} \|D^2 f(\xi, \xi)\| < (3 - 2\sqrt{2}) \inf_{x \in T^{d+1}} |f(x)|,$$

il existe au moins  $2^{d+1}$  plongements au sens d’Alexandrov  $e : S^d \rightarrow T^{d+1}$  à courbure moyenne prescrite en tout point par  $f$ .

## La numérogie des sphères plongées

**Heuristiquement**, l'espace des sphères plongées dans  $\mathcal{T}^{d+1}$  a la même topologie que l'espace des sphères plongées à courbure moyenne constante dans  $\mathcal{T}^{d+1}$ .

Les sphères à courbure moyenne constante dans  $\mathcal{T}^{d+1}$  sont paramétrées par leur centres et leurs courbures.

L'espace des sphères plongées à courbure moyenne constante dans  $\mathcal{T}^{d+1}$  est alors homéomorphe à  $\mathcal{T}^{d+1} \times ]0, \infty[$ .

La somme des nombres de Betti de cet espace est alors égale à  $2^{d+1}$ .

## Le résultat de compacité - I

Pour  $C \geq 1$ , disons qu'un plongement localement strictement convexe  $e : S^d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  est **C-pincé** lorsque ses courbures principales satisfont en tout point

$$\kappa_d(x) < C\kappa_1(x).$$

Pour  $C \geq 1$ , disons qu'un plongement localement strictement convexe  $e : S^d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  est **C-non-effondré** lorsque, pour tout  $x \in S^d$ , l'hypersurface à courbure constante  $C\kappa_1(x)$  tangente intérieure de  $\text{Im}(e)$  en  $e(x)$  est contenue entièrement dans  $\text{Im}(e)$ .

## Le résultat de compacité - II

Considérons la fonction

$$\phi(t) := \frac{(t-1)}{t(t+1)}.$$

Cette fonction-ci a 2 inverses bien définies

$$\begin{aligned} \lambda &: ]0, (3 - 2\sqrt{2})[ \rightarrow ]1, (1 + \sqrt{2})[ \\ \Lambda &: ](3 - 2\sqrt{2}), +\infty] \rightarrow ]1, (1 + \sqrt{2})[ \end{aligned}$$

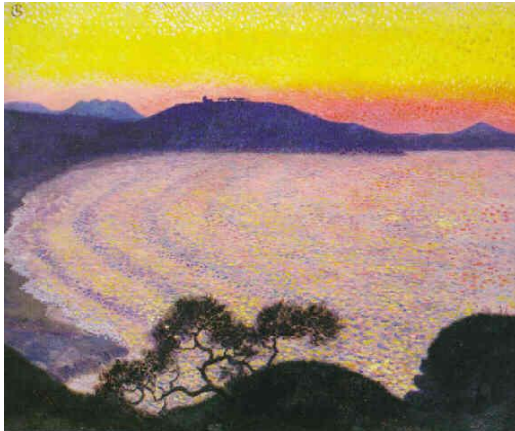
## Le résultat de compacité - III

Soit  $f : T^{d+1} \rightarrow ]0, \infty[$  strictement positive et lisse. Notons

$$\lambda_f = \lambda \left( \sup_{\xi_x \in T^{d+1}, \|\xi_x\|=1} D^2 f(\xi_x, \xi_x) / \inf_{x \in T^{d+1}} f(x)^3 \right)$$
$$\Lambda_f = \Lambda \left( \sup_{\xi_x \in T^{d+1}, \|\xi_x\|=1} D^2 f(\xi_x, \xi_x) / \inf_{x \in T^{d+1}} f(x)^3 \right)$$

### **Théorème, S. (2016)**

Soit  $e_t : \mathbb{R} \times S^d \rightarrow T^{d+1}$  un flot de courbure moyenne forcé et éternel de type "borné". Si  $e_t$  est  $\lambda_f$ -pincé et  $\lambda_f$  non-effondré pour tout  $t$ , alors  $e_t$  est  $\Lambda_f$ -pincé et  $\Lambda_f$ -non-effondré pour tout  $t$ .



Merci!