CAPÍTULO 1

Exercícios Resolvidos

1. Manutenção preventiva de computadores

Os principais defeitos que causam problemas em um computador são: Mau-contato nas memórias (D1); Mau-contato nas placas de expansão: vídeo, som, rede (D2); Aquecimento, devido ao excesso de poeira (D3); e Outros (D4). Uma manutenção preventiva diminui o risco de seu computador apresentar esses defeitos. Ela consiste em se fazer uma limpeza geral do computador e procurar falhas de hardware e de software.

Admita que:

- sem manutenção preventiva, seu computador pode apresentar os defeitos D1, D2, D3 e D4 ao longo de um ano com probabilidades 4%, 4%, 6% e 6%, respectivamente.
- se for feita uma manutenção preventiva, as probabilidades do seu computador apresentar os defeitos D1, D2, D3 e D4 ao longo de um ano caem para 2,8%, 2,8%, 4,2% e 4,2%, respectivamente.
- as eventuais ocorrências dos problemas D1, D2, D3 e D4 são eventos independentes, com ou sem manutenção preventiva.

(a) Qual é a probabilidade de que o seu computador apresente algum defeito ao longo de um ano, se você não fizer manutenção preventiva?

(b) E se você fizer manutenção preventiva?

Solução:

(a) Sem manutenção preventiva temos P(D1) = P(D2) = 0,04 e P(D3) = P(D4) = 0,06.

Portanto, $P(D1^C) = 0{,}96$, $P(D2^C) = 0{,}96$, $P(D3^C) = 0{,}94$, $P(D4^C) = 0{,}94$

Como os Di's são independentes entre si, temos:

P(algum defeito) = $P(D1 \cup D2 \cup D3 \cup D4)$

$$= 1 - P(D1^C \cap D2^C \cap D3^C \cap D4^C) = 1 - P(D1^C)P(D2^C)P(D3^C)P(D4^C) =$$

$$= 1 - 0{,}96^2 \times 0{,}94^2 = 0{,}186 \quad \text{ou } 18{,}6\%.$$

(b) Com manutenção preventiva, P(D1) = P(D2) = 0,012 e P(D3) = P(D4) = 0,018.

Portanto, $P(D1^C) = 0{,}988$, $P(D2^C) = 0{,}988$, $P(D3^C) = 0{,}982$, $P(D4^C) = 0{,}982$.

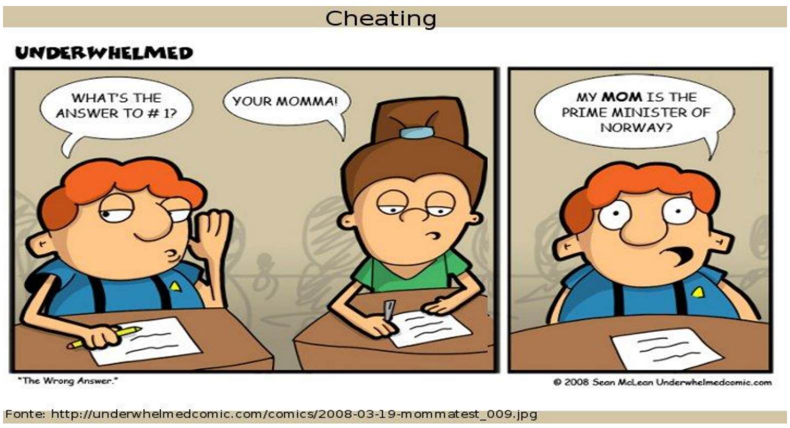
Como os Di's são independentes entre si, temos:

P(algum defeito) = $P(D1 \cup D2 \cup D3 \cup D4)$

$$= 1 - P(D1^C \cap D2^C \cap D3^C \cap D4^C) = 1 - P(D1^C)P(D2^C)P(D3^C)P(D4^C) =$$

$$= 1 - 0{,}988^2 \times 0{,}982^2 = 0{,}059 \quad \text{ou } 5{,}9\%.$$

2. Suspeita de cola em concurso público



Em um concurso público uma das provas constava de 80 questões de múltipla escolha, sendo que cada questão admitia 5 opções possíveis de resposta. Os candidatos X e Y marcaram exatamente a mesma opção de resposta em 70 dessas questões, sendo que entre essas apenas 60 estavam corretas. Admita que:

- Qualquer candidato só erra uma determinada questão quando ele realmente não sabe resolvê-la;
- Qualquer candidato que não pratique a "cola", ao não saber resolver uma questão, escolhe aleatoriamente uma das 5 opções de resposta.

Sabemos que em 10 das 70 questões acima citadas as respostas de X e Y estavam iguais, embora erradas.

(a) Calcule a probabilidade de coincidência entre as respostas dos dois candidatos a essas 10 questões, supondo que não tenha havido fraude (cola).

(b) Na sua opinião houve ou não cola entre os dois candidatos? Por que?

(c) E se o número de questões em que as respostas de X e Y coincidiram fosse 60, das quais apenas 50 estivessem corretas?

Solução:

(a) Digamos que a resposta correta a uma certa questão seja a letra "a". A probabilidade de que, por não saber resolvê-la, X e Y respondam ambos por acaso a letra "b" é de $\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$. Isso vale também para coincidências entre X e Y nas letras "c", "d" e "e". Assim, a probabilidade de coincidência no erro entre X e Y nessa questão é de $\frac{4}{25}$. Então, devido à independência, a probabilidade de coincidência no erro entre eles em 10 questões é $\left(\frac{4}{25}\right)^{10}=1{,}09951\times 10^{-8}$.

(b) Vimos que, se não tivesse havido cola, a probabilidade de respostas coincidentes no erro entre X e Y em 10 questões seria muito baixa. Como isso de fato aconteceu, tudo indica que houve cola.

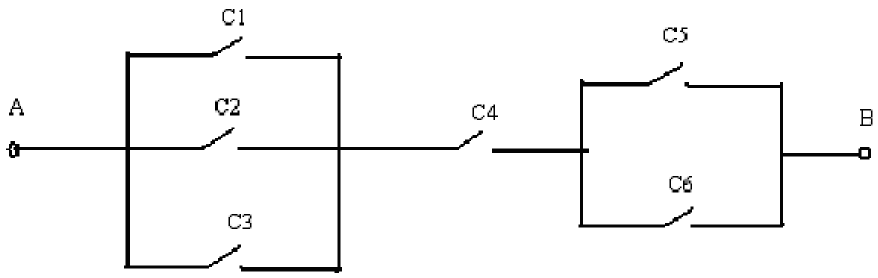
(c) A argumentação e a conclusão seriam exatamente as mesmas neste caso, já que o número de respostas erradas comuns a X e Y continuaria sendo 10.

> *"Impossibilidades prováveis são preferíveis a possibilidades improváveis."*
> Aristóteles, filósofo

3. Passagem de corrente elétrica

A figura abaixo mostra um trecho de um circuito elétrico conectando os pontos A e B, sendo que:

- Há 6 chaves nesse trecho e cada uma delas pode estar fechada (permitindo a passagem de corrente elétrica) ou aberta (impedindo essa passagem).
- As chaves estão ligadas ora em série, ora em paralelo.
- A probabilidade de estar fechada é igual a 0,8, para cada uma das 6 chaves.
- As chaves atuam independentemente entre si



(a) Calcule a probabilidade de que possa haver passagem de corrente elétrica entre A e B.
(b) Calcule a probabilidade condicional de que possa haver passagem de corrente entre A e B, dado que pelo menos uma das 6 chaves está aberta.

<u>Solução:</u>

Sejam F_i = a chave Ci está fechada, i = 1,2,...,6
S = há passagem de corrente entre A e B
T = pelo menos uma das 6 chaves está aberta

Conseqüentemente,
T^C = todas as 6 chaves estão fechadas

(a) A partir da figura, conclui-se que

$$S = (F_1 \cup F_2 \cup F_3) \cap F_4 \cap (F_5 \cup F_6).$$

Devido à independência, temos:

$$P(S) = P\,(F_1 \cup F_2 \cup F_3) \cdot P(F_4) \cdot P(F_5 \cup F_6).$$

Por outro lado, podemos também afirmar que

$$P(F_1 \cup F_2 \cup F_3) = 1 - P(F_1^C \cap F_2^C \cap F_3^C) = 1 - P(F_1^C) \cdot P(F_2^C) \cdot P(F_3^C) = 1 - 0{,}2^3 = 1 - 0{,}008 = 0{,}992$$

$P(F_4) = 0{,}8$ e

$$P(F_5 \cup F_6) = 1 - P(F_5^C \cap F_6^C) = 1 - P(F_5^C) \cdot P(F_6^C) = 1 - 0{,}2^2 = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$$

Logo, $P(S) = 0{,}992 \times 0{,}8 \times 0{,}96 = 0{,}762$.

(a) $P(S \mid T) = \dfrac{P(S \cap T)}{P(T)} = \dfrac{P(S) - P(S \cap T^C)}{P(T)} = \dfrac{P(S) - P(T^C)}{P(T)}$,

porque $T^C \subset S$ e $S = (S \cap T) \cup (S \cap T^C)$.

Por outro lado, $P(T^C) = 0{,}8^6 = 0{,}262$, o que implica que $P(T) = 1 - 0{,}262 = 0{,}738$

Então, $P(S \mid T) = \dfrac{0{,}762 - 0{,}262}{0{,}738} = 0{,}677$.

4. Dopping no futebol

Antes de um jogo de futebol entre as equipes A e B, 3 dos 11 jogadores da equipe A e 4 dos 11 jogadores da equipe B ingeriram drogas estimulantes cujo consumo não é permitido pelas regras. O regulamento prevê que 2 jogadores serão sorteados aleatoriamente de cada uma das duas equipes e serão encaminhados ao exame anti-doping.

- Caso o exame não acuse a presença de drogas proibidas no material colhido dos 4 jogadores sorteados, vale o resultado do jogo.

- Caso o exame acuse a presença de drogas proibidas no material colhido de pelo menos um dos 2 jogadores de uma determinada equipe, essa equipe é considerada derrotada (independente de qual tenha sido o resultado do jogo), desde que o exame não detecte nada de irregular com os 2 jogadores sorteados da outra equipe.
- Caso o exame acuse a presença de drogas proibidas no material colhido de pelo menos um dos 2 jogadores sorteados de ambas as equipes, a partida é considerada empatada (independente de qual tenha sido o resultado do jogo).

Quanto ao jogo, os especialistas estimam: a chance de vitória de A em 50%, a chance de vitória de B em 40% e a chance de empate em 10%.

Admitindo que há independência entre o resultado do jogo e os resultados dos exames, calcule a probabilidade de que:

(a) Nenhum dos jogadores de A selecionados para o antidoping esteja dopado?
(b) Nenhum dos jogadores de B selecionados para o antidoping esteja dopado?
(c) Ao final A seja considerado vencedor da partida.
(d) Ao final B seja considerado vencedor da partida.
(e) Ao final a partida seja considerada empatada.

Solução:
(a) Isso é o mesmo que dizer que nenhum dos jogadores de A que estavam dopados será sorteado para o antidoping, o que ocorrerá com probabilidade $\frac{8}{11}\times\frac{7}{10}=0{,}509$.

(b) Isso é o mesmo que dizer que nenhum dos jogadores de B que estavam dopados será sorteado para o antidoping, o que ocorrerá com probabilidade $\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}=0{,}382$.

(c) Para que A seja considerado o vencedor devemos ter:
(A limpo no antidoping e B apanhado no antidoping) ou (Ambos aprovados no antidoping e vitória de A)
Então, como há independência entre o resultado do jogo e os resultados dos exames:
P(A considerado vencedor) = $0{,}509\times(1-0{,}382)+0{,}509\times0{,}382\times0{,}5=0{,}412$

(d) Para que B seja considerado o vencedor devemos ter:
(B limpo no antidoping e A apanhado no antidoping) ou (Ambos aprovados no antidoping e vitória de B)
Então, como há independência entre o resultado do jogo e os resultados dos exames:
P(B considerado vencedor) = $0{,}382\times(1-0{,}509)+0{,}509\times0{,}382\times0{,}4=0{,}265$

(e) Para que o jogo seja considerado empatado devemos ter:
(Ambos A e B apanhados no antidoping) ou (Ambos limpos no antidoping e empate no jogo)
Então, como há independência entre o resultado do jogo e os resultados dos exames:
P(Jogo considerado empatado) = $(1-0{,}509)\times(1-0{,}382)+0{,}509\times0{,}382\times0{,}1=0{,}323$

Checando: 0,412 + 0,265 + 0,323 = 1   OK!

5. Rendimento e Poluição

No processo produtivo de uma empresa são utilizados diariamente 4 unidades de um certo insumo. Ocorre que as diferentes formulações desse insumo podem afetar o rendimento do processo bem como o nível de poluição ambiental. Num determinado dia a empresa possui 40 unidades desse insumo em estoque e elas podem ser classificados segundo a tabela a seguir:

	Polui o ambiente?		
Acelera o processo produtivo?	Sim	Não	Total
Sim	8	12	20
Não	2	18	20
Total	10	30	40

Admita que as 4 unidades a serem usadas nesse dia serão sorteadas aleatoriamente do estoque. Qual a probabilidade de que:

(a) Não seja usado nenhum insumo que polui o ambiente?
(b) Seja usado pelo menos um insumo que acelera o processo produtivo?
(c) Seja usado pelo menos um insumo que acelera o processo produtivo, dado que não foi usado nenhum insumo que polui o ambiente?
(d) Não seja usado nenhum insumo que polui o ambiente, dado que foi usado pelo menos um insumo que acelera o processo produtivo?

Solução:

Sejam A_i = A i-ésima unidade selecionada acelera o processo produtivo
P_i = A i-ésima unidade selecionada polui o ambiente
R = Não é usado nenhum insumo que polui o ambiente
S = É usado pelo menos um insumo que acelera o processo produtivo
S^C = Não é usado nenhum insumo que acelera o processo produtivo

Então $R = P_1^C \cap P_2^C \cap P_3^C \cap P_4^C$ e
$S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \left(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C\right)^C$

A partir do que se sabe sobre a composição do estoque, temos:

(a) $P\left(P_1^C\right) = \frac{30}{40}$; $P\left(P_2^C \middle| P_1^C\right) = \frac{29}{39}$; $P\left(P_3^C \middle| P_1^C \cap P_2^C\right) = \frac{28}{38}$; $P\left(P_4^C \middle| P_1^C \cap P_2^C \cap P_3^C\right) = \frac{27}{37}$

Então, $P(R) = \frac{30}{40} \times \frac{29}{39} \times \frac{28}{38} \times \frac{27}{37} = 0{,}2999$.

Ou seja, a probabilidade de que não seja usado nenhum insumo que polui o Ambiente é 29,99%.

(b) $P\left(A_1^C\right) = \frac{20}{40}$; $P\left(A_2^C \middle| A_1^C\right) = \frac{19}{39}$; $P\left(A_3^C \middle| A_1^C \cap A_2^C\right) = \frac{18}{38}$; $P\left(A_4^C \middle| A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C\right) = \frac{17}{37}$

Então, $P(S) = 1 - \frac{20}{40} \times \frac{19}{39} \times \frac{18}{38} \times \frac{17}{37} = 1 - 0{,}0530 = 0{,}9470$.

Ou seja, a probabilidade de que seja usado pelo menos um insumo que acelera o processo produtivo é 94,70%.

(c) Como $R \cap S$ e $R \cap S^C$ formam uma partição de R, temos:

$P(R) = P(R \cap S) + P(R \cap S^C)$.

De maneira análoga, $P(R \cap S^C) = \frac{18}{40} \times \frac{17}{39} \times \frac{16}{38} \times \frac{15}{37} = 0{,}0335$

Temos então, $P(R \cap S) = P(R) - P(R \cap S^C) = 0{,}2999 - 0{,}0335 = 0{,}2664$.

Portanto, $P(S \middle| R) = \frac{P(R \cap S)}{P(R)} = \frac{0{,}2664}{0{,}2999} = 0{,}8883$.

Ou seja, a probabilidade de que seja usado pelo menos um insumo que acelera o processo produtivo, dado que não foi usado nenhum insumo que polui o ambiente é 88,83%.

(d) Finalmente, $P(R \middle| S) = \frac{P(R \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}2664}{0{,}9470} = 0{,}2813$.

Ou seja, a probabilidade de que não seja usado nenhum insumo que polui o ambiente, dado que foi usado pelo menos um insumo que acelera o processo produtivo é 28,13%.

6. Quatro eventos

Os eventos A, B, C e D de um mesmo espaço amostral são tais que:

- $P(A|B) = P(B|C) = P(C|D) = P(D|A) = 0,4$ (I)
- $P(A \cup B) = P(B \cup C) = P(C \cup D) = P(D \cup A) = 0,4$ (II)
- $P(A \cap C) = P(B \cap D) = 0$ (III)

Calcule P(A), P(B), P(C), P(D) e $P(A \cup B \cup C \cup D)$.

Solução:

De (I), temos $0,4 = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, o que implica que $P(A \cap B) = 0,4 \cdot P(B)$.

Por outro lado, de (II):

$0,4 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 0,4 \cdot P(B) = P(A) + 0,6 \cdot P(B)$

Então, de forma análoga, podemos também concluir que:

$0,4 = P(B) + 0,6 \cdot P(C)$, $0,4 = P(C) + 0,6 \cdot P(D)$, $0,4 = P(D) + 0,6 \cdot P(A)$.

Essas 4 igualdades em conjunto nos permitem escrever o seguinte sistema de equações lineares:

$$0,4 = P(A) + 0,6 \cdot P(B) \qquad (*)$$
$$0,4 = P(B) + 0,6 \cdot P(C)$$
$$0,4 = P(C) + 0,6 \cdot P(D)$$
$$0,4 = P(D) + 0,6 \cdot P(A)$$

Seja $m = 0,6$

O sistema de equações pode então ser re-escrito na forma matricial como a seguir:

$$\begin{bmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ m & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(A) \\ P(B) \\ P(C) \\ P(D) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-m \\ 1-m \\ 1-m \\ 1-m \end{bmatrix}, \quad \text{ou seja,}$$

$$\Sigma \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}, \qquad \text{onde } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ m & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} P(A) \\ P(B) \\ P(C) \\ P(D) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = (1-m) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ora, a solução desse sistema é $\mathbf{x} = \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{y}$. (IV)

Temos então que obter a matriz Σ^{-1}.

Usando propriedades da Álgebra Linear, pode ser deduzido que

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{1-m^4} \begin{bmatrix} 1 & -m & m^2 & -m^3 \\ -m^3 & 1 & -m & m^2 \\ m^2 & -m^3 & 1 & -m \\ -m & m^2 & -m^3 & 1 \end{bmatrix}$$

Para se convencer da validade desta afirmação, basta verificar que o produto das duas matrizes Σ e Σ^{-1} acima é igual à matriz identidade 4x4.

Da relação (IV), vemos que cada coordenada do vetor $\mathbf{x}$ é igual ao produto interno de uma linha da matriz Σ^{-1} pelo vetor $\mathbf{y}$, que, por sua vez, é um múltiplo do vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Então todas as 4 coordenadas do vetor $\mathbf{x}$ são proporcionais à soma dos elementos de uma linha da matriz Σ^{-1}. Por outro lado, vemos também que a soma dos elementos de qualquer linha dessa matriz é sempre constante e proporcional a $1 - m + m^2 - m^3$.

Concluímos portanto que P(A) = P(B) = P(C) = P(D).

Fazendo então P(B) = P(A) na equação (*) acima, obtemos:

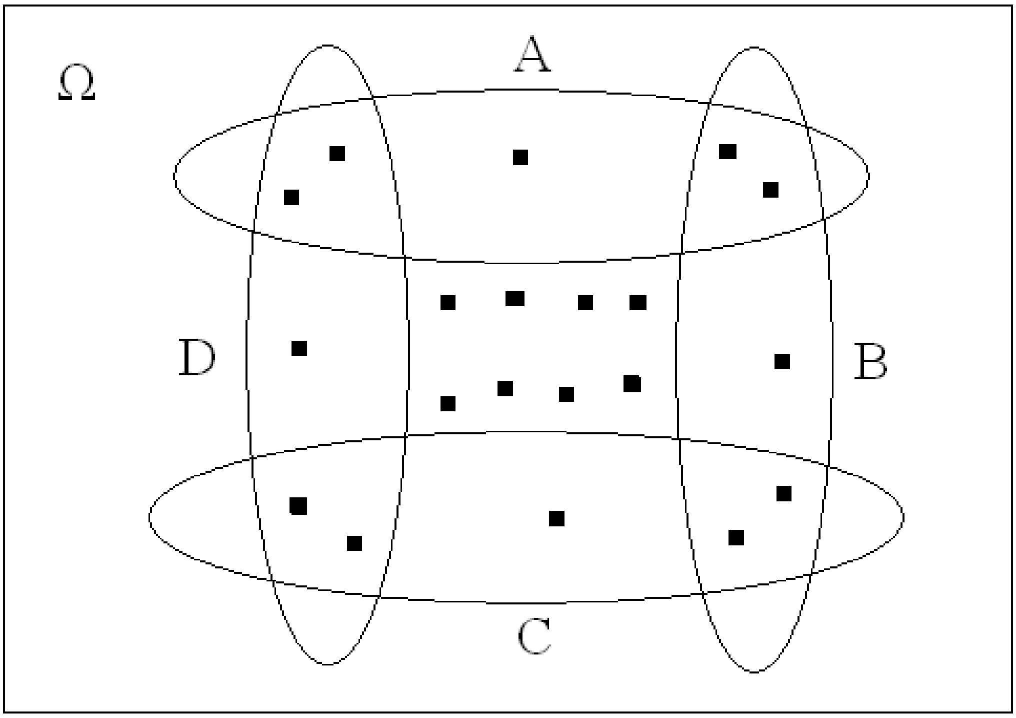
0,4 = 1,6 P(A), de onde se conclui que P(A) = 0,25.

Temos, portanto, $P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = 0{,}25$.
Por outro lado, também pode ser demonstrado que:

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$$
$$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(A \cap D) - P(B \cap C) - P(B \cap D) - P(C \cap D)$$
$$+ P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D)$$
$$- P(A \cap B \cap C \cap D).$$

Ora, $P(A \cap B) = 0{,}4 \cdot P(B) = 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}1$.
Da mesma forma, concluímos também que $P(B \cap C) = P(C \cap D) = P(D \cap A) = 0{,}1$.
De (III), temos que $P(A \cap C) = P(B \cap D) = 0$.
É claro também que todos os eventos a seguir:
$A \cap B \cap C$, $A \cap B \cap D$, $A \cap C \cap D$, $B \cap C \cap D$ e $A \cap B \cap C \cap D$
estão contidos em $A \cap C$ ou em $B \cap D$. Logo todos eles tem probabilidade nula.
Resumindo, podemos escrever:
$P(A \cup B \cup C \cup D) = 4 \times 0{,}25 - (4 \times 0{,}1 + 2 \times 0) + 4 \times 0 - 1 \times 0 = 0{,}6$.

A figura a seguir exibe um espaço amostral Ω finito uniforme com 20 elementos, onde os eventos A, B, C e D satisfazem todas as condições aqui colocadas.



7. Semelhanças entre senhas

Suponha que cada um dos 100 usuários de um determinado serviço recebe uma senha, composta por 2 dígitos entre 0 e 9.
Se A e B são dois desses usuários escolhidos ao acaso, qual a probabilidade de que:

(a) Suas senhas contenham exatamente os mesmos 2 dígitos, com diferença apenas na ordem?
(b) Não haja nenhuma coincidência entre os 2 dígitos da senha de A e os 2 dígitos da senha de B?
(c) Os segundos dígitos das duas senhas sejam iguais?

Obs.: Note que A e B não podem receber a mesma senha.
Resolva o problema por simulação, usando o R, e também analiticamente. Compare os resultados obtidos.

Solução por simulação:
Serão sorteados aleatoriamente 100000 pares de senhas: A e B, ambas entre 00 e 99, sendo que A ≠ B.

- Se A[1] = B[2] e A[2] = B[1], está satisfeita a condição do item (a).
- Se A[1] ≠ B[1] e A[1] ≠ B[2] e A[2] ≠ B[1] e A[2] ≠ B[2], está satisfeita a condição do item (b).
- Se A[2] = B[2], está satisfeita a condição do item (c).

Programa em R:
```
> N=10000        #N número de simulações
>  item.a=numeric(N)
>  item.b=numeric(N)          # vetores que armazenam resultados
>                             # dos  itens a, b e c:
>  item.c=numeric(N)          # inicia com zeros, depois
>                             # 1=favorável  0=desfavorável
>
>  for(i in 1:N){
+    A=sample(0:9, 2, rep=T) # senha de A
+    B=sample(0:9, 2, rep=T) # senha de B
+    while(B[1]== A[1] & B[2]==A[2]) B=sample(0:9, 2, rep=T)
+                             # senha de B diferente da senha de A
+    #
+    if(A[1]==B[2] & A[2] ==B[1]) item.a[i]=1
+    if(A[1]!=B[1] & A[1]!=B[2] & A[2]!=B[1] & A[2]!=B[2]) item.b[i]=1
+    if(A[2]==B[2]) item.c[i]=1
+  }
```

Respostas:
```
>  sum(item.a)/N; sum(item.b)/N; sum(item.c)/N
```
a. 0.00944
b. 0.66296
c. 0.09041

Solução analítica:
O espaço amostral Ω é o conjunto de todos os pares de senhas (A,B), tais que A ≠ B. Sejam A = xy e B = uv. Então, se (A,B) está em Ω, x ≠ u ou y ≠ v. Por exemplo,

Estão em Ω:	A	B	Não estão em Ω:	A	B
	85	74		34	34
	22	37		06	06

Como há 100 possibilidades para A e, para cada uma delas, há 99 possibilidades para B, temos $\#(\Omega) = 100 \times 99 = 9900$.

(a) Seja M o conjunto dos pares (A,B) tais que os dois dígitos de cada senha são os mesmos, porém invertidos. Ou seja, se A = xy (com x ≠ y), então B = yx. Por exemplo,

Estão em M:	A	B	Não estão em M:	A	B
	85	58		33	33
	73	37		06	61

Temos então 10 escolhas possíveis para x: 0 1 2 ... 9.
Para cada uma delas, já que y ≠ x, temos 9 escolhas possíveis para y.

Para cada par A = xy, para que (A,B) esteja em M, devemos ter B = yx. Isso quer dizer que os valores de u e v já estarão determinados: u = y e v = x.

Temos então, #(M) = 10 $\times$ 9 = 90 e P(M) = $\frac{\#(M)}{\#(\Omega)} = \frac{90}{9900}$ = 0,009091.

(b) Seja N o conjunto dos pares (A,B) nos quais não há nenhuma coincidência entre os 2 dígitos da senha de A e os 2 dígitos da senha de B. Ou seja, se A = xy e B = uv, então x ≠ u, x ≠ v, y ≠ u e y ≠ v. Por exemplo,

Estão em N:	A	B	Não estão em M:	A	B
	85	37		38	93
	73	22		00	01

Temos 10 escolhas possíveis para A = xy em que x = y: 00 11 22 ... 99.

Para cada uma delas, se B = uv, tanto u como v podem ser escolhidos de 9 maneiras (porque x = y ≠ u e x = y ≠ v), o que significa que B pode ser escolhida de 9 $\times$ 9 = 81 maneiras.

Temos também 90 = 100 – 10 escolhas possíveis para A = xy em que x ≠ y.

Para cada uma delas, se B = uv, tanto u como v podem ser escolhidos de 8 maneiras (porque x ≠ u, y ≠ u, x ≠ v e y ≠ v), o que significa que B pode ser escolhida de 8 $\times$ 8 = 64 maneiras.

Temos então, #(N) = 10 $\times$ 81 + 90 $\times$ 64 = 6570 e P(N) = $\frac{\#(N)}{\#(\Omega)} = \frac{6570}{9900}$ = 0,663636.

(c) Seja Q o conjunto dos pares (A,B) nos quais os segundos dígitos das duas senhas são iguais. Ou seja, se A = xy e B = uv, então x ≠ u e y = v. Por exemplo,

Estão em Q:	A	B	Não estão em Q:	A	B
	85	35		38	38
	72	22		45	46

Temos então 10 escolhas possíveis para y = v: 0 1 2 ... 9.

Para cada uma delas, x pode ser escolhido também de 10 maneiras: 0 1 2 ... 9.

E, para cada escolha de y (= v) e cada escolha de x, u pode ser escolhido de 9 maneiras (porque x ≠ u).

Temos então, #(Q) = 10 $\times$ 10 $\times$ 9 = 900 e P(Q) = $\frac{\#(Q)}{\#(\Omega)} = \frac{900}{9900}$ = 0,090909.

<u>Comparação entre as duas soluções</u>

Como era de se esperar, os resultados obtidos por simulação estão muito próximos dos resultados obtidos analiticamente.

8. Montando uma Lan House

Elton decide montar uma Lan House com 8 microcomputadores. Para isso equipa todos eles com placas de rede de uma determinada marca. O que ele desconhece é que 50% das placas de rede dessa marca conseguem ultrapassar uma duração de 5000 horas, 30% duram entre 2500 e 5000 horas, enquanto que 20% têm uma vida inferior a 2500 horas. Qual é a probabilidade de quatro das placas instaladas por Elton durarem mais do que 5000 horas, duas durarem entre 2500 e 5000 horas e as duas restantes durarem menos de 2500 horas?

Solução

Sejam os eventos:

A = {A placa dura mais do que 5000 horas}

B = {A placa dura entre 2500 e 5000 horas}

C = {A placa dura menos de 2500 horas}

Sabemos que: P(A) = 0,5; P(B) = 0,3; P(C) = 0,2.

Cada resultado do espaço amostral Ω pode ser expresso como uma seqüência de 8 letras que podem ser A, B ou C.
Seja D o evento "4 placas de rede duram mais do que 5000 horas, 2 duram entre 2500 e 5000 horas e 2 duram menos de 2500 horas".
Então D é formado por todos os resultados de Ω que contém quatro letras A, duas B e duas C. Um desses resultados favoráveis a D é AAAABBCC.
Considerando que as placas falham independentemente entre si, a probabilidade do resultado acima ocorrer pode ser calculada como
$0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,3 \times 0,3 \times 0,2 \times 0,2 = (0,5)^4 \times (0,3)^2 \times (0,2)^2$
Mas D tem outros resultados favoráveis. Qualquer permutação das 8 letras sendo 4 A's, 2 B's e 2C's é um resultado favorável a D. Por conseguinte, o número de resultados de D é igual ao número de permutações com repetição de oito letras das quais há: quatro iguais entre si, mais duas também iguais entre si e finalmente outras duas novamente iguais entre si. Isto é $\frac{8!}{4!2!2!} = 420$.
Desta maneira, $P(D) = \frac{8!}{4!2!2!} \times (0,5)^4 \times (0,3)^2 \times (0,2)^2 = 0,0945$.

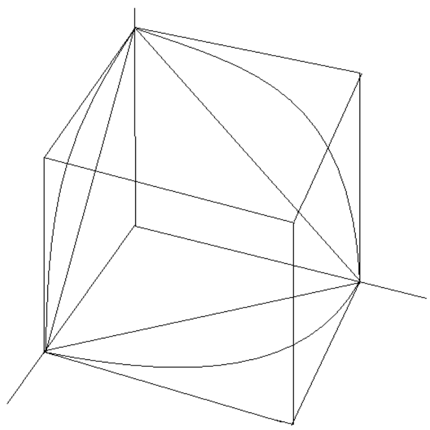
9. Probabilidade vista como volume

Considere como espaço amostral Ω o conjunto dos pontos de R^3 que estão no interior do cubo cujos vértices são os pontos: (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0) e (1,1,1). Qualquer sólido que esteja dentro desse cubo é um evento S e sua probabilidade coincide com seu volume, isto é, P(S) = Volume(S). Sejam A e B os eventos definidos por:

$$A = \{(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \Omega \text{ e } x + y + z > 1\}$$
$$B = \{(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \Omega \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

Deseja-se determinar P(A), P(B), $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(A^C)$ e $P(B^C)$.

(a) Resolva o problema inicialmente por simulação.
(b) Resolva o problema analiticamente.
(c) Compare os resultados obtidos em (a) e (b).



(a) <u>Solução por simulação:</u>

Serão sorteados 100000 pontos P = (x,y,z) aleatória e uniformemente no interior do cubo $[0;1]^3$.

- Se $x + y + z > 1$, ou seja, se na figura acima, P está acima do plano $x + y + z = 1$, que secciona o triedro segundo um triângulo, então P está em A.
- Se $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, ou seja, se na figura acima, P está abaixo da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, que secciona o triedro segundo três semicírculos, então P está em B.

- Se $x + y + z > 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, ou seja, se na figura acima, P está entre o plano $x + y + z = 1$ e a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, então P está em $A \cap B$.
- Se $x + y + z > 1$ ou $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, ou seja, se na figura acima, P está acima do plano $x + y + z = 1$ ou abaixo da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, então P está em $A \cup B$.
- Se P não está em A, P está em A^C.
- Se P não está em B, P está em B^C.

Basta então contar o número de vezes, entre as 100000, em que a condição considerada é atendida.

Programa em R:

```
N=100000                    # Tamanho de repetições
res.A=numeric(N)
res.B=numeric(N)            # Armazena os resultados de cada repetição
res.AeB=numeric(N)
res.AouB=numeric(N)

for ( i in 1:N) {
ponto = runif(3)                      #gera três valores entre 0 e 1
  if(sum(ponto)>1) res.A[i]=1         #Armazena 1 em cada ponto que satisfaz A
  if(sqrt(sum(ponto^2))<1) res.B[i]=1
  if(sum(ponto)>1 & (sum(ponto^2))<1 ) res.AeB[i]=1
  if(sum(ponto)>1 | (sum(ponto^2))<1 ) res.AouB[i]=1
}
sum(res.A)/N          # Calcula a probabilidade do evento A
sum(res.B)/N          # Calcula a probabilidade do evento B
sum(res.AeB)/N        # Calcula a probabilidade do evento A e B
sum(res.AouB)/N       # Calcula a probabilidade do evento A ou B
```

Respostas obtidas:

```
> sum(res.A)/N
[1] 0.83282
> sum(res.B)/N
[1] 0.52308
> sum(res.AeB)/N
[1] 0.3559
> sum(res.AouB)/N
[1] 1
```

(b) Solução analítica:

P(A) = 1 – P(Pirâmide) = 1 – Volume(Pirâmide) =

$$= 1 - \frac{\text{Área(Base). Altura}}{3} = 1 - \frac{\frac{1\text{x}1}{2}\text{x}1}{3} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0{,}833$$

$$\text{P(B)} = \text{P}\left(\frac{1}{8}\text{ da Esfera}\right) = \frac{1}{8}\text{Volume(Esfera)} = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\pi\text{x}1^3\right) = \frac{\pi}{6} = 0{,}524$$

$P(A \cap B)$ = Volume sob a superfície esférica e acima do plano

$$= \text{Volume}\left(\frac{1}{8}\text{ da Esfera}\right) - \text{Volume(Pirâmide)} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{6} = \frac{\pi - 1}{6} = 0{,}357$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{6} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi - 1}{6} = 1$$

(Aliás, não é difícil ver que $A \cup B$ é o próprio cubo Ω.)

$$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} = 0{,}167$$

$$P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{\pi}{6} = \frac{6 - \pi}{6} = 0{,}476$$

(c) Comparação dos resultados dos itens (a) e (b)

Como se pode observar, os resultados obtidos por simulação – onde foi usado o conceito freqüentista de probabilidade – estão bem próximos dos resultados obtidos analiticamente.

Exercícios Propostos

1. Lançamento de dois dados

Considere o experimento que corresponde a dois lançamentos consecutivos de um dado.

(a) Sejam A e B os eventos definidos por:
A = Obter 6 pontos no primeiro lançamento
B = Obter 6 pontos no segundo lançamento
Determine $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ e $P(A \cup B)$.

(b) Sejam C e D os eventos definidos por:
C = Obter no mínimo 7 no total de pontos dos 2 lançamentos
D = Obter no máximo 4 pontos em cada lançamento
Determine $P(C)$, $P(D)$, $P(C \cap D)$ e $P(C \cup D)$.

2. Questões conceituais

É verdade que obrigatoriamente:

(a) Dois eventos mutuamente exclusivos **não** são independentes entre si, desde que suas probabilidades sejam ambas estritamente positivas? Por que?

(b) $P(A|B) = P(B|A)$, para quaisquer dois eventos A e B? Por que?

(c) $P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$, para todo evento A, quando o espaço amostral Ω é finito? Por que?

3. Probabilidade vista como amplitude

Seja o intervalo $\Omega = [0;1]$ o nosso espaço amostral. Qualquer sub-intervalo $[a;b]$ contido em Ω é um evento e sua probabilidade coincide com sua amplitude $b - a$. Se A é um subconjunto de Ω formado pela união de n sub-intervalos disjuntos $I_1, I_2, \ldots, I_n$, então $P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(I_j)$.

Sejam $A = [0{,}2;\, 0{,}6]$, $B = [0{,}4; 0{,}7]$, $C = [0{,}6; 0{,}8]$. Determine:

(a) $P(A)$, $P(B)$ e $P(C)$.

(b) $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$, $P(A \cap B \cap C)$.

(c) $P(A \cup B), P(A \cup C), P(B \cup C), P(A \cup B \cup C)$.

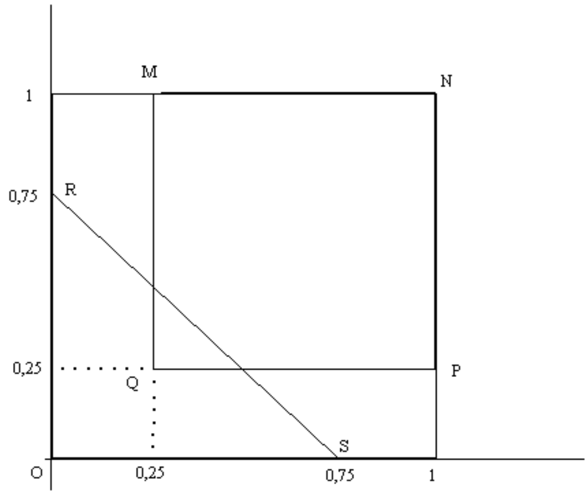
4. Probabilidade vista como área

No desenho abaixo, o quadrado de vértices (0;0), (0;1), (1;0) e (1,1) representa o espaço amostral Ω. Qualquer figura que esteja dentro desse quadrado é um evento F e sua probabilidade coincide com sua área, isto é, P(F) = Área(F). Sejam:

A = quadrado MNPQ

B = triângulo ORS

Determine P(A), P(B), $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(A^C)$ e $P(B^C)$.



5. Dança das cadeiras

A dança das cadeiras é um jogo onde:

- Na 1ª rodada, enquanto toca uma música, n pessoas circulam em torno de n – 1 cadeiras;
- Quando a música pára de tocar, cada uma das n pessoas procura uma das cadeiras para se sentar;
- Como há mais pessoas do que cadeiras, uma das pessoas não consegue se sentar e é eliminada da brincadeira;
- Na 2ª rodada, retira-se uma das cadeiras, e a música volta a tocar enquanto as n – 1 pessoas restantes circulam em torno das n – 2 cadeiras remanescentes;
- Quando a música pára de tocar, cada uma das n – 1 pessoas procura uma das cadeiras para se sentar;
- E assim por diante...
- Aquele que conseguir se sentar em todas as rodadas é o vencedor.

Suponha que no início do jogo há 4 cadeiras para 5 pessoas, uma das quais é Mauricio. Calcule a probabilidade de que Mauricio:

(a) seja eliminado na 1ª rodada;
(b) seja eliminado na 2ª rodada;
(c) seja eliminado na 3ª rodada;
(d) seja eliminado na 4ª rodada;
(e) seja o vencedor.
(f) Quais seriam essas probabilidades se houvesse n – 1 cadeiras para n pessoas?

6. Quem vai viajar?

Ao final de determinado ano, na cerimônia de formatura da Escola de Engenharia havia 10 formandos de Elétrica, 8 de Mecânica e 7 de Civil. Estava disponível uma verba para premiar com uma viagem 3 desses 25 formandos a serem selecionados por sorteio. Calcule a probabilidade de que:

(a) Todos os 3 sorteados foram da área de Elétrica.
(b) Nenhum dos sorteados era da área de Elétrica.
(c) Foi sorteado um formando de cada uma das 3 áreas.

7. Bens duráveis e não duráveis

Para promover as vendas de uma loja, a sua gerência resolveu oferecer um brinde para o consumidor que fizesse a maior compra em valor ao longo do dia. Para isso a loja disponibilizou um total de 30 itens, dos quais 10 são bens de consumo duráveis e 20 são não duráveis. O consumidor premiado terá direito a sortear 6 entre esses 30 itens. Qual a probabilidade de que, entre os itens sorteados:

(a) todos sejam duráveis?
(b) todos sejam não duráveis?
(c) seja mantida a proporção original entre duráveis e não duráveis, isto é, 2 duráveis e 4 não duráveis?

8. Máquinas e operários

Em uma certa empresa prestadora de serviços há cinco operários e três máquinas. Cada vez que alguém contrata essa empresa para realizar um serviço, é designado para isso um dos cinco operários e ele deverá operar uma das três máquinas. Entre os cinco operários, dois são experientes e três são iniciantes. Entre as três máquinas, uma é moderna e as outras duas são antigas. Quando o serviço é realizado por:

- um operário experiente usando a máquina moderna, o resultado costuma ser bom;
- um operário experiente usando uma máquina antiga, o resultado costuma ser regular;
- um operário iniciante usando a máquina moderna, o resultado costuma ser regular;
- um operário iniciante usando uma máquina antiga, o resultado costuma ser ruim.

Suponha que essa empresa foi contratada para realizar um determinado serviço. Admitindo que ambas as escolhas, do operário e da máquina, foram feitas ao acaso, calcule a probabilidade de que:

(a) O resultado do serviço tenha sido bom.
(b) O resultado do serviço tenha sido regular.
(c) Tenha sido usada a máquina moderna, dado que o resultado do serviço foi regular.

9. Propriedades das Probabilidades

Dados os eventos A, B e C do mesmo espaço amostral, sabe-se que $P(A|C) = 1/3$, $P(B|C) = 5/9$, $P(C) = 1/2$, $P(A \cap B|C) = 2/9$, $P(B|C^C) = 4/9$, $P(A|B) = 4/9$, $P(B|A) = 2/3$. Determine:

(a) P(A) e P(B)
(b) $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ e $P(B \cap C)$
(c) $P(A \cap B \cap C)$ e $P(A \cup B \cup C)$

10. Mistura de frações de óleo diesel

Em 11 frações de óleo diesel, 5 delas são do tipo LCO (light cycle oil). Considere o seguinte experimento: Sorteiam-se ao acaso e sem reposição 3 dessas frações para extrair uma amostra de cada uma delas e compor uma mistura de óleo diesel.

(a) Qual a probabilidade de que nessa mistura pelo menos um dos componentes seja LCO?

(b) Admita agora que o experimento acima é realizado 20 vezes. Em média, em quantos desses experimentos se pode esperar que pelo menos um dos componentes da mistura seja LCO?

11. Critérios para escolha de um apartamento

Julio está à procura de um apartamento para compra. As qualidades que ele mais aprecia em um apartamento são: que esteja localizado em um andar alto, que seja silencioso e que receba o sol da manhã.

Ao longo de um fim de semana, um corretor de imóveis mostrou a Julio 20 apartamentos, sendo que:

- 10 deles recebem o sol da manhã e, quanto aos outros dois itens, se distribuem assim:

	Silencioso	Barulhento	Total
Andar alto	3	4	7
Andar baixo	2	1	3
Total	5	5	10

e

- 10 deles recebem o sol da tarde e, quanto aos outros dois itens, se distribuem assim:

	Silencioso	Barulhento	Total
Andar alto	2	3	5
Andar baixo	4	1	5
Total	6	4	10

Todos esses 20 imóveis estavam sendo oferecidos por preços um pouco acima do que Julio podia pagar. Mas, na 2ª feira seguinte o corretor ligou para Julio com uma boa notícia: o proprietário de um desses 20 apartamentos tinha acabado de reduzir expressivamente o preço de venda do seu imóvel, por estar com muita urgência de fechar o negócio. Só que, antes que o corretor pudesse dizer de qual dos 20 imóveis se tratava, caiu a ligação.

Qual a probabilidade de que o referido imóvel:

(a) receba o sol da manhã?
(b) seja silencioso?
(c) esteja em andar alto?
(d) atenda a todos os 3 atributos que Julio procura?
(e) receba o sol da manhã, dado que é silencioso?
(f) seja silencioso, dado que está em um andar alto?
(g) esteja em andar alto, dado que recebe o sol da manhã?

12. Perfil dos empregados de uma empresa

(d) Prove que se A, B e C são eventos do mesmo espaço, então

$$P(A|B)P(B|C)P(C|A) = P(B|A)P(C|B)P(A|C).$$

(e) Em uma determinada empresa:

- entre os empregados com formação técnica, 50% têm mais de 10 anos de casa;
- entre os empregados com cargo gerencial, 50% têm formação técnica;
- entre os empregados com mais de 10 anos de casa, 40% ocupam cargo gerencial;

- entre os empregados com cargo gerencial, 50% têm mais de 10 anos de casa;
- entre os empregados com mais de 10 anos de casa, 60% têm formação técnica.

Qual a probabilidade condicional de que um determinado empregado dessa empresa ocupe um cargo gerencial, dado que ele tem formação na área técnica?

(f) Um brinde será oferecido a todos os empregados dessa empresa que satisfizerem a pelo menos uma das três condições aqui consideradas: ocupar cargo gerencial, ter formação técnica ou ter mais de 10 anos de casa. Sabendo que:

- os gerentes representam 20% de todos os empregados da empresa; e
- entre os gerentes, 25% têm, ao mesmo tempo, formação técnica e mais de 10 anos de casa;

calcule o percentual dos empregados da empresa que não terão direito a receber esse brinde.

13. Estoque de carros de uma revendedora

Em uma revendedora de automóveis, 70% dos veículos são novos e 30% são usados. Entre os novos: 80% são da marca A, 10% da marca B e 10% da marca C. Já entre os usados: 60% são da marca A, 30% da marca B e 10% da marca C. Se for sorteado ao acaso um carro do estoque dessa revendedora:

(a) Qual a probabilidade de que ele seja da marca A? E da marca B? E da marca C?
(b) Supondo que ele é da marca A, qual a probabilidade de ser um carro novo? E de ser um carro usado?

14. Efeito corrosivo

A empresa X utiliza em seu processo produtivo um determinado insumo. Ela costuma receber esse insumo na forma de galões que provem de 4 fornecedores A, B, C e D, nas proporções de 40%, 30%, 20% e 10%, respectivamente. Ocorre que o conteúdo desses galões às vezes apresenta uma característica corrosiva prejudicial à produção. Admita que esse problema ocorre em 5% dos galões provenientes de A e de B e em 3% dos galões provenientes de C e de D. Suponha agora que foi aberto um galão desse insumo retirado ao acaso do estoque da empresa X.

(a) Qual a probabilidade de que o seu conteúdo apresente esse efeito corrosivo?
(b) Dado que o efeito corrosivo está presente, qual a probabilidade de que o galão tenha vindo do fornecedor A? E de B? E de C? E de D?

15. Mudança de emprego

Admita que o primeiro emprego de qualquer engenheiro poderá ser em uma empresa estatal, multinacional ou privada nacional com probabilidades 20%, 30% e 50%, respectivamente. Suponha também que, cada vez que um engenheiro muda de emprego, ele o faz segundo as probabilidades de transição a seguir:

	Probabilidade de mudança para o setor		
Setor do Emprego atual	estatal	multinacional	privado nacional
estatal	0,60	0,20	0,20
multinacional	0,30	0,50	0,20
privado nacional	0,25	0,35	0,40

Para um determinado engenheiro, selecionado aleatoriamente:

(a) Qual a probabilidade de que o seu segundo emprego seja em uma estatal?
(b) Qual a probabilidade de que o seu primeiro emprego tenha sido em uma multinacional, dado que o seu terceiro emprego é em uma empresa privada nacional?

16. Risco Geológico

Na área de prospecção de petróleo, diz-se que há sucesso geológico associado à decisão de se procurar óleo em uma determinada região, se cada uma das quatro condições a seguir forem atendidas neste local: Presença de rocha geradora com maturação, Presença de rocha reservatório, Presença de uma trapa ou armadilha, Dinâmica favorável do sistema petrolífero. Para efeito de modelagem, essas condições podem ser consideradas independentes entre si. Representaremos as probabilidades associadas a elas por $P_{geração}$, $P_{reservatório}$, P_{trapa}, $P_{dinâmica}$, respectivamente. Uma determinada companhia petrolífera pode optar entre procurar óleo na região R1 ou na região R2, para as quais essas probabilidades são as seguintes:

Região	$P_{geração}$	$P_{reservatório}$	P_{trapa}	$P_{dinâmica}$
R1	0,88	0,67	0,83	0,58
R2	0,66	0,50	0,92	0,81

Seja P_g a probabilidade de sucesso geológico numa determinada região. Considerando que:

- Se $P_g \geq 0{,}5$, temos uma região de Risco Muito Baixo;
- Se $0{,}25 \leq P_g < 0{,}5$, temos uma região de Risco Baixo;
- Se $0{,}125 \leq P_g < 0{,}25$, temos uma região de Risco Moderado;
- Se $0{,}063 \leq P_g < 0{,}125$, temos uma região de Risco Alto;
- Se $P_g < 0{,}063$, temos uma região de Risco Muito Alto;

Pergunta-se:

(a) Qual o nível de risco geológico relativo à região R1?
(b) Qual o nível de risco geológico relativo à região R2?
(c) Em qual das duas regiões é maior a chance de sucesso?

Obs.: Este exercício foi formulado com base no artigo "*A Process for Evaluating Exploration Prospects",* de *Otis & Schneidermann,* em *AAPG Bulletin, V. 81, No. 7 (July 1997), PP. 1087–1109.*

17. Será que ele recebe o recado?

Regina deseja transmitir um recado urgente para o seu chefe, avisando que a viagem dele, programada para o dia seguinte, foi adiada. Ocorre que o chefe está ocupado e por isso inacessível durante o dia. Sendo assim, Regina lhe manda três mensagens nesse sentido: via e-mail, via caixa postal do celular e via secretária eletrônica do telefone domiciliar. Admita que as probabilidades de que, depois de chegar em casa, o chefe: consulte os seus e-mails, verifique suas mensagens no celular, ouça os recados gravados na secretária eletrônica são de 50%, 60% e 70%, respectivamente.

(a) Qual a probabilidade de que o chefe receba o recado a tempo?

(b) Admita agora que o provedor do chefe está fora do ar. Nessas condições, qual a probabilidade de que ele receba o recado a tempo?

18. Falha na coleta de um dado estatístico

Quando ocorre um problema na coleta de um dado estatístico, algumas das possíveis explicações para isso são: queda de energia, falha do equipamento, erro de leitura, erro de digitação. Admita que:

- esses 4 fatores são as únicas causas possíveis de problema na coleta;
- cada um deles pode ocorrer com 5% de probabilidade;
- há independência entre eles.

Calcule a probabilidade de:

(a) um dado ser coletado sem problema;

(b) ter havido falha humana (ou seja, erro de leitura ou de digitação), dado que houve problema na coleta.

19. Insônia

Carlos vai viajar a serviço e terá de se hospedar em um quarto de hotel, que já foi reservado à sua revelia. Como às vezes ele sofre de insônia, deseja se prevenir quanto a essa possibilidade. Com base em experiências anteriores, Carlos conhece os fatores – independentes entre si – que podem prejudicar o seu sono, com suas respectivas probabilidades de ocorrência: excesso de barulho (20%), excesso de luminosidade (30%), falta de ventilação (40%) e ambiente empoeirado (50%). Qual a probabilidade de que:

(a) Nenhum desses problemas esteja presente?

(b) Pelo menos dois deles estejam presentes?

(c) Todos estejam presentes?

20. Processo de seleção

Uma empresa está promovendo um processo de seleção com o objetivo de contratar um novo técnico. O critério de seleção vai se basear em três instrumentos: prova de conhecimentos, análise do Curriculum Vitae e entrevista. Se um candidato tiver sucesso em pelo menos dois desses instrumentos será considerado aprovado no concurso. Suponha que:

- Um candidato preparado tem 90% de chance de sucesso na prova de conhecimentos;
- Um candidato despreparado tem 30% de chance de sucesso na prova de conhecimentos;
- Um candidato experiente tem 80% de chance de sucesso na análise do Curriculum Vitae;
- Um candidato inexperiente tem 40% de chance de sucesso na análise do Curriculum Vitae;
- Um candidato extrovertido tem 70% de chance de sucesso na entrevista;
- Um candidato introvertido tem 50% de chance de sucesso na entrevista.

O candidato A é preparado, inexperiente e introvertido; enquanto o candidato B é despreparado, experiente e extrovertido.

Admitindo que há independência entre os três instrumentos nos quais se baseia o processo de seleção, responda qual dos dois candidatos tem maior chance de ser aprovado no concurso. Justifique a sua resposta.

21. Monitoramento do processo produtivo

A planta de produção de uma empresa funciona 24 horas por dia, sem interrupção. A experiência mostra que a ocorrência de desregulagens no processo produtivo é mais freqüente em torno de 8:00 e em torno de 20:00. Para poder levantar dados de modo a investigar essa questão, a empresa precisa fazer um monitoramento minucioso do processo produtivo nesses momentos críticos. Ocorre que os aparelhos de transmissão de dados de que ela dispõe para fazer o monitoramento nem sempre funcionam adequadamente. Sejam:

p = probabilidade de falha no monitoramento, se feito em torno de 8:00;

q = probabilidade de falha no monitoramento, se feito em torno de 20:00.

Foram elaborados dois possíveis planos de coleta de dados:

	1ª coleta	2ª coleta	3ª coleta
PlanoA	7:00-9:00 em 15/09	19:00-21:00 em 15/09	7:00-9:00 em 16/09
Plano B	19:00-21:00 em 15/09	7:00-9:00 em 16/09	19:00-21:00 em 16/09

Suponha inicialmente que $p = 0{,}2$ e $q = 0{,}3$.

(a) Calcule a probabilidade de que a empresa disporá de dados confiáveis relativos a ambos os períodos de interesse, isto é, em torno de 8:00 e em torno de 20:00, se for usado o Plano A.

(b) Faça o mesmo, no caso de ser usado o Plano B.

(c) Em qual dos dois planos é maior a probabilidade de que a empresa disporá de dados confiáveis relativos a ambos os períodos de interesse?

Suponha agora que p e q são desconhecidos, mas sabe-se que $p < q$.

(d) Calcule, em função de p e q, a probabilidade de que a empresa disporá de dados confiáveis relativos a ambos os períodos de interesse, isto é, em torno de 8:00 e em torno de 20:00, se for usado o Plano A.

(e) Faça o mesmo, no caso de ser usado o Plano B.

(f) Em qual dos dois planos é maior a probabilidade de que a empresa disporá de dados confiáveis relativos a ambos os períodos de interesse? Por que?

<u>Sugestão:</u> Observe que, independente de ser escolhido o Plano A ou o Plano B, é fundamental para os objetivos da empresa que na 2ª coleta não ocorra uma falha no monitoramento.