CAPÍTULO 6
Exercícios Resolvidos

R6.1) Fabricação de uma peça

Na fabricação de uma peça, um eixo cilíndrico, com uma seção transversal circular deve-se encaixar num soquete circular. É sabido que as distribuições do diâmetro do eixo e do diâmetro do soquete são ambas Normais. Para o diâmetro do eixo a média é de 3,42 cm, com um desvio padrão de 0,01 cm. Para o diâmetro de soquete, a média é 3, 47 cm, com um desvio padrão de 0,02 cm.

Suponha que, para efeitos de montagem, as componentes das peças são selecionadas ao acaso, e que eles só se encaixam se a folga estiver entre 0,025 cm e 0,100 cm. Qual a probabilidade do eixo se encaixar no soquete?

Suponha independência entre os diâmetros do eixo e do soquete.

Solução:

Sejam X1 e X2 as v.a.'s que representam, respectivamente, os diâmetros do eixo e do soquete. Então

X1 ~ N(3,42 ; 0,012) e X2 ~N(3,47 ; 0,022) .

Seja Y =X2 – X1. Temos então:

μY = μ2 - μ1 = 3,47 – 3,42 = 0,05 e

$\sigma_Y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ = 0,012 + 0,022 = 0,0005 e

σ_Y= 0,0224

Portanto, Y ~N(0,05 ; 0,0005).

O eixo encaixará no soquete se 0,025 < Y < 0,100 . A probabilidade disto ocorrer é

P(0,025 < Y < 0,1) = $\varphi\left(\frac{0{,}1-0{,}05}{0{,}0224}\right) - \varphi\left(\frac{0{,}1-0{,}05}{0{,}0224}\right)$ = 0,856

Ou seja, em aproximadamente 85,6% dos casos os componentes conseguem se encaixar.

R6.2) Voluntários se quotizam para realizar uma obra

Uma instituição de caridade deseja realizar uma obra que custa R$3500,00 em sua sede. Entre os contribuintes habituais dessa instituição, cada um pode contribuir com algo em torno de R$120,00 ± um desvio padrão de R$50,00. Se 30 dessas pessoas se quotizarem para levantar fundos com essa finalidade, qual a probabilidade de que eles consigam o montante necessário?

Solução:

Seja X_i a quantia disponível da pessoa i, = 1, 2, ..., 30.

Queremos calcular P[$(X_1 + X_2 + ... + X_{30}) \geq 3500$], ou seja, $P\left[\sum_{i=1}^{30} X_i \geq 3500\right]$

Dividindo os 2 membros da desigualdade por 30, temos

$$P\left[\sum_{i=1}^{30} X_i \geq 3500\right] = P\left[\overline{X}_{30} \geq \frac{3500}{30}\right].$$

Admitamos que:

- Os 30 voluntários podem ser vistos como uma amostra aleatória extraída de um conjunto maior;
- n = 30 já é suficientemente grande para que se possa usar a aproximação dada pelo Teorema Central do Limite.

Sabemos que a distribuição de $\overline{X}_{30}$ se aproxima de uma Normal com média 120 e desvio padrão igual a $50/\sqrt{30}$. Então,

$$P\left[\sum X_i \geq 3500\right] = P\left[\overline{X}_{30} \geq \frac{3500}{30}\right] = P\left[\frac{\overline{X}_{30} - 120}{50/\sqrt{30}} \geq \frac{3500/30 - 120}{50/\sqrt{30}}\right] \cong P[Z \geq -0{,}365] = 0{,}64,$$

onde esta última probabilidade foi determinada a partir da distribuição Normal padronizada, recorrendo a um software adequado (ou tabela).
Isso significa que a chance da obra ser realizada com base nesses 30 donativos seria de aproximadamente 64%.

R6.3) Seguro de vida

Uma companhia de seguros emitiu apólices para 10000 pessoas, todas da mesma faixa etária. A probabilidade de morte durante um ano é de 0,006 para cada pessoa nessa faixa etária. Em um dia pré-fixado, todos os segurados depositam 12 u.m. e, se algum deles morrer dentro de 1 ano, seus beneficiários receberão 1000 u.m. da seguradora. Qual a probabilidade de que em 1 ano:
(a) A companhia tenha prejuízo?
(b) A companhia tenha um lucro de pelo menos 40000 u.m.? E 60000 u.m.? E 80000 u.m.?

Solução:
Seja L_i a contribuição para o lucro da seguradora em um ano correspondente ao segurado i, i = 1, 2, 3, ..., 10000

Então,

$$L_i = \begin{cases} 12, & \text{prob} = 0{,}994 \text{ (se ele não morrer)} \\ 12 - 1000 = -988, & \text{prob} = 0{,}006 \text{ (se ele morrer)} \end{cases}$$

O lucro total será então $L = \sum_{i=1}^{10000} L_i$.

Pelo Teorema Central do Limite, o lucro total L obedece a uma distribuição aproximadamente Normal.

Por outro lado, sabemos que,

$$E(L) = 10000 \times E(L_i) = 10000 \times (12 \times 0{,}994 + (-988) \times 0{,}006) = 10000 \times 6 = 60000$$

$$\text{var}(L) = 10000 \times \text{var}(L_i) = 10000 \times (12^2 \times 0{,}994 + (-988)^2 \times 0{,}006 - 6^2) = 10000 \times 5964 = 59640000$$

(a) P(Prejuízo) = $P[L < 0] = P\left[\frac{L-60000}{\sqrt{59640000}} < \frac{0-60000}{\sqrt{59640000}}\right] = P[Z < -7{,}77] \cong 0$

(b) $P[L \geq 40000] = P\left[\frac{L-60000}{\sqrt{59640000}} \geq \frac{40000-60000}{\sqrt{59640000}}\right] = P[Z \geq -2{,}59] = 0{,}9952$

(c) $P[L \geq 60000] = P\left[\frac{L-60000}{\sqrt{59640000}} \geq \frac{60000-60000}{\sqrt{59640000}}\right] = P[Z \geq 0] = 0{,}5000$

(d) $P[L \geq 80000] = P\left[\frac{L-60000}{\sqrt{59640000}} \geq \frac{80000-60000}{\sqrt{59640000}}\right] = P[Z \geq 2{,}59] = 0{,}0048$

"Oh não, o espelho não!
Isso significa sete anos de má sorte
para a nossa companhia de seguros."

R6.4) Hospedagem de congressistas em hotéis

O Comitê organizador de um congresso científico contratou 5 hotéis da cidade onde vai se realizar esse evento para hospedarem os 1000 congressistas inscritos. Cada um desses hotéis só têm quartos individuais e só poderá hospedar os participantes do congresso durante esse período. Admita que cada congressista escolherá de forma aleatória para qual dos 5 hotéis ele vai se dirigir. O Hotel X é um desses 5 hotéis e tem capacidade para acomodar 210 pessoas.

(a) Qual a probabilidade de que o Hotel X consiga acomodar todos os congressistas que o procurarem?

(b) Qual a probabilidade de que pelo menos p = 90% do total de quartos do Hotel X sejam ocupados?

(c) Para que no Hotel Y (outro dos 5):

- a probabilidade de que ele consiga acomodar todos os congressistas que o procurarem seja 0,95;

e

- a probabilidade de pelo menos π% do seu total de quartos serem ocupados seja 0,99;

qual deve ser o valor de p e qual deve ser a capacidade total desse hotel?

Solução:
Seja X (resp. Y) o número de congressistas que se dirigem para o Hotel X (resp. Y). Então X e Y têm ambas distribuição Binomial com n = 1000 e p = 1/5 = 0,2, que pode ser aproximada por uma Normal(1000x0,2; 1000x0,2x0,8).

(a) $P(X \le 210) = P\left[Z \le \dfrac{210{,}5 - 1000 \times 0{,}2}{\sqrt{1000 \times 0{,}2 \times 0{,}8}}\right] = P(Z \le 0{,}83) = 0{,}797$ ou 79,7%.

Logo, a probabilidade de que o Hotel X consiga acomodar todos os congressistas que o procurarem é 79,7%.

(b) $P(X \ge 0{,}9 \times 210) = P\left[Z \ge \dfrac{188{,}5 - 1000 \times 0{,}2}{\sqrt{1000 \times 0{,}2 \times 0{,}8}}\right] = P(Z \ge -0{,}91) = 0{,}818$ ou 81,8%.

Logo, a probabilidade de que pelo menos 90% das acomodações do Hotel X sejam preenchidas com os congressistas é 81,8%.

(c) Seja C a capacidade do hotel Y. Sabemos que:

$P(Y \le C) = 0{,}95$ (I) e $P\left(Y \ge \dfrac{\pi C}{100}\right) = 0{,}99$ (II).

Então, padronizando I, temos:

$P\left[Z \le \dfrac{C + 0{,}5 - 1000 \times 0{,}2}{\sqrt{1000 \times 0{,}2 \times 0{,}8}}\right] = 0{,}95$, o que implica que

$\dfrac{C - 199{,}5}{\sqrt{1000 \times 0{,}2 \times 0{,}8}} = 1{,}645$.

Logo, $C = 199{,}5 + 1{,}645 \times 12{,}649 \cong 220$ hóspedes.

Por outro lado, padronizando II, temos:

$P\left(Z \ge \dfrac{\dfrac{220\pi}{100} - 0{,}5 - 1000 \times 0{,}2}{\sqrt{1000 \times 0{,}2 \times 0{,}8}}\right) = 0{,}99$, o que implica que

$\dfrac{\dfrac{220\pi}{100} - 200{,}5}{\sqrt{1000 \times 0{,}2 \times 0{,}8}} = -2{,}326$.

Logo , operando algebricamente, chegamos a π =77,76%.

Então, para que o Hotel Y, ao mesmo tempo:

- acomode todos os congressistas que o procurarem com probabilidade 95%; e
- tenha π% das suas acomodações preenchidas com probabilidade 99%;

é preciso que :

1) Capacidade do Hotel Y = 220 hóspedes

2) percentual π = 77,76%

R6.5) Seleção de amostra via geração de números aleatórios

Um gerador de números aleatórios é uma rotina (programa de computador) que, quando chamada, fornece como resposta um número z, $0 \le z \le 1$, simulando o comportamento de uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo [0,1]. Deseja-se selecionar uma amostra aleatória com n elementos a partir de uma população com N elementos. O procedimento de seleção utilizado, que se baseia no uso de um gerador de números aleatórios, consiste em:

Para cada elemento i da população, $i = 1,2,...,N$, gerar um número aleatório z_i e incluir esse elemento i na amostra se e somente se $z_i < n / N$.

Ocorre que através desse procedimento não se pode garantir que a amostra resultante terá exatamente n elementos.

(a) Obtenha uma expressão matemática para a probabilidade de que a amostra terá k elementos, em função de N, n e k. Quais os valores possíveis de k?

(b) Obtenha expressões matemáticas para a esperança μ e para o desvio padrão σ do tamanho da amostra em função de n e N.

(c) No caso em que $n = 3$ e $N = 10$, qual a probabilidade de que a amostra tenha um tamanho diferente do desejado?

(d) O erro relativo obtido no tamanho da amostra é $ER = \frac{|X-n|}{n}$, onde X é o tamanho real da amostra. No caso em que $n = 500$ e $N = 10000$, determine o valor de um limitante superior c para esse erro relativo de modo a que $P[ER < c] \cong 0{,}95$. Como você interpreta esse resultado? Obs.: Neste item use o fato de que a distribuição do tamanho da amostra pode ser aproximada por uma Normal.

<u>Solução:</u>

(a) Devido á forma como foi formulado esse procedimento de seleção, a inclusão ou não do i-ésimo elemento da população na amostra pode ser representada por uma variável Y_i tal que

$$Y_i = \begin{cases} 1, \text{ se o elemento i é selecionado} & (\text{prob} = n/N) \\ 0, \text{caso contrário} & (\text{prob} = 1 - n/N) \end{cases}$$

Assim sendo, o número total de elementos que comporão a amostra é $X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$, sendo que os Y_i's são variáveis aleatórias iid e cada Y_i ~ Bernoulli(n/N). Logo X ~ Binomial(N;n/N). Então,

$$P[X = k] = \binom{N}{k} \left(n/N\right)^k \left(1 - n/N\right)^{N-k}, \text{ para todo } k = 0,1,2,...,N.$$

(b) $\mu = E(X) = N \cdot \left(n/N\right) = n$ e $\sigma = dp(X) = \sqrt{N\frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right)} = \sqrt{\frac{n(N-n)}{N}}$.

(c) Se N =10 e n = 3, $P[X \neq 3] = 1 - P[X = 3] = 1 - \binom{10}{3}\left(3/10\right)^3\left(7/10\right)^7 = 0{,}733$.

(e) Se $N = 10000$ e $n = 500$, queremos que $P\left[\frac{|X-n|}{n} < c\right] = 0{,}95$. Aproximando a Binomial por uma Normal, podemos padronizar como se segue:

$$P\left[\frac{|X-n|}{\sqrt{\frac{n(N-n)}{N}}} < \frac{c}{\sqrt{\frac{N-n}{Nn}}}\right] = P\left[|Z| < \frac{c}{\sqrt{\frac{N-n}{Nn}}}\right] = 0{,}95,$$ o que implica que $$\frac{c}{\sqrt{\frac{10000-500}{10000\times 500}}} = 1{,}96.$$ Conseqüentemente, $c = 1{,}96\sqrt{\frac{9500}{10000\times 500}} = 0{,}0854$. Ou seja, o erro relativo será em módulo menor que 8,54% com probabilidade 0,95. Isto quer dizer que o algoritmo funciona bem para grandes amostras.

R6.6) Pesquisa eleitoral no 2º turno

No 2º turno de uma eleição majoritária, há apenas os candidatos C1 e C2 e sabe-se que:

- A proporção populacional de eleitores que apóiam C1 é p_1.
- A proporção populacional de eleitores que apóiam C2 é p_2.
- A proporção populacional de eleitores que votariam em branco, anulariam seu voto ou estão indecisos (BNI) é p_3.

Se em uma pesquisa eleitoral for extraída da população de eleitores uma amostra aleatória simples com n eleitores e X_1, X_2, X_3 são, respectivamente, o número de elementos da amostra que vota em C1, em C2 ou BNI,

(a) Mostre que a distribuição conjunta de X_1, X_2, X_3 é uma multinomial de parâmetros n e p_1, p_2, p_3, isto é,

$$P(X_1=k_1, X_2=k_2, X_3=k_3) = \begin{cases} \dfrac{n!}{k_1!k_2!k_3!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}, & \text{se } k_1+k_2+k_3=n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde n é um inteiro positivo e p_1, p_2, p_3 são reais positivos tais que $p_1+p_2+p_3=1$.

(b) Mostre que X_i tem distribuição binomial com parâmetros n e p_i, para i = 1,2,3.

(c) Calcule $Cov(X_1,X_2)$ e $\rho(X_1,X_2)$, no caso em que

$n = 1000$ $\quad p_1 = 0{,}50$ $\quad p_2 = 0{,}40$ $\quad p_3 = 0{,}10$.

Sugestão: Lembre-se que $P(X_1+X_2+X_3 = n) = 1$.

Obs.: Dada uma população Ω, uma amostra aleatória simples de tamanho n dessa população é um subconjunto de n elementos sorteados de Ω, de tal forma a que todos os elementos da população tenham a mesma chance de serem selecionados.

Solução

(a) $P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3)$ é igual à soma das probabilidades de todas as n-uplas, onde cada elemento é C_1, C_2 ou BNI, de tal forma que C_1 aparece k_1 vezes, C_2 aparece k_2 vezes e BNI aparece k_3 vezes, com $k_1 + k_2 + k_3 = n$.

A probabilidade de ocorrência de cada uma de tais n-uplas é $p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}$, devido à independência.

O número dessas n-uplas é $\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$, conforme foi visto no Capítulo 1 quando abordamos em Análise Combinatória as Permutações com elementos repetidos.

Logo,

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3) = \begin{cases} \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}, & \text{se } k_1 + k_2 + k_3 = n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Essa probabilidade é necessariamente nula se $k_1 + k_2 + k_3 \neq n$, já que a soma das intenções de voto em C_1, C_2 e BNI tem que ser obrigatoriamente igual ao tamanho n da amostra.

(b) Tomemos o caso em que i = 1. Para os demais casos o raciocínio é análogo.

$$P(X_1 = k_1) = \sum_{k_2=0}^{n-k_1} P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = n - k_1 - k_2) =$$

$$= \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \frac{n!}{k_1!k_2!(n-k_1-k_2)!} p_1{}^{k_1} p_2{}^{k_2} p_3{}^{n-k_1-k_2} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} p_1{}^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} p_2{}^{k_2} p_3{}^{n-k_1-k_2}.$$

Observe que o último somatório acima, pela fórmula do Binômio de Newton, é igual a $(p_2 + p_3)^{n-k_1}$, e como $p_2 + p_3 = 1 - p_1$, substituindo acima, obtemos:

$$P(X_1 = k_1) = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} p_1{}^{k_1} (1 - p_1)^{n-k_1}, \text{ para todo } k_1 = 0,1, \dots, n$$

(c) Já que $P(X_1+X_2+X_3 = n) = 1$,

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(n - X_3) = \text{Var}(X_3) = np_3(1 - p_3)$$

Por outro lado, sabemos também que

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 2\text{Cov}(X_1, X_2)$$, e portanto,

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{\text{Var}(X_1 + X_2) - \text{Var}(X_1) - \text{Var}(X_2)}{2} =$$

$$= \frac{np_3(1 - p_3) - np_1(1 - p_1) - np_2(1 - p_2)}{2} =$$

$$= -np_1p_2 = -1000 \times 0{,}5 \times 0{,}4 = -20$$

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\text{Var}(X_2)}} = -\frac{np_1p_2}{\sqrt{np_1(1 - p_1)np_2(1 - p_2)}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}} = \sqrt{\frac{0{,}5\times0{,}4}{0{,}5\times0{,}6}} = 0{,}8165$$

(d) Raciocinando por analogia, obtemos então que:

O vetor de médias é $\begin{bmatrix} np_1 \\ np_2 \\ np_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 400 \\ 100 \end{bmatrix}$.

A matriz de covariâncias é

$$\begin{bmatrix} np_1(1-p_1) & -np_1p_2 & -np_1p_3 \\ -np_1p_2 & np_2(1-p_2) & -np_2p_3 \\ -np_1p_3 & -np_2p_3 & np_3(1-p_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 & -200 & -50 \\ -200 & 240 & -40 \\ -50 & -40 & 90 \end{bmatrix}$$

A matriz de correlações é

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{\frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}} & -\sqrt{\frac{p_1p_3}{(1-p_1)(1-p_3)}} \\ -\sqrt{\frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}} & 1 & -\sqrt{\frac{p_1p_2}{(1-p_2)(1-p_3)}} \\ -\sqrt{\frac{p_1p_3}{(1-p_1)(1-p_3)}} & -\sqrt{\frac{p_1p_2}{(1-p_2)(1-p_3)}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}8165 & -0{,}3333 \\ -0{,}8165 & 1 & -0{,}2722 \\ -0{,}3333 & -0{,}2722 & 1 \end{bmatrix}$$

R6.7) Faturamento diário de uma loja de móveis

Em uma determinada loja de móveis, o número de vendas feitas em um dia pode ser considerado uma variável aleatória com distribuição de Poisson cuja média é $\lambda = 20$. Sabe-se também que o valor de uma dessas vendas, escolhida ao acaso, se comporta segundo a lei de probabilidade Normal com média $\mu =$ R\$800,00 e desvio padrão $\sigma =$ R\$300,00. Calcule:

(a) a média e o desvio padrão do faturamento diário da loja.

(b) a probabilidade de que em um determinado dia o faturamento seja maior que $F_0 =$ R\$20.000,00.

(c) essa mesma probabilidade, admitindo que o faturamento diário segue uma distribuição Normal com a média e o desvio padrão calculados no item (a).

(d) Compare os resultados obtidos nos itens (b) e (c) e explique a razão pela qual eles são tão próximos entre si.

Solução:

Sejam N o número de vendas feitas em um dia e X_i o valor (em reais) da i-ésima venda feita nesse dia. Então o faturamento diário é $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Observe que neste caso o número de parcelas do somatório é também uma v.a.!

(a) $E(Y) = E\big(E(Y|N)\big) = E(\mu N) = \mu E(N) = \mu\lambda = 800 \times 20 = 16.000$ reais

$Var(Y) = E\big(Var(Y|N)\big) + Var\big(E(Y|N)\big) = E(N\sigma^2) + Var(\mu N) =$

$= \sigma^2 E(N) + \mu^2 Var(N) = \sigma^2 \lambda + \mu^2 \lambda = \lambda(\sigma^2 + \mu^2) = 20 \times (300^2 + 800^2) =$

$= 14.600.000$ reais^2

Logo $DP(Y) = \sqrt{14600000} = 3.821$ reais.

(b) $P(Y > F_0) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\sum_{i=1}^{n} X_i > F_0) \, . \, P(N = n)$.

Como $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$ e $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, temos:

$$P(Y > 20.000) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\Phi\left(\frac{F_0 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)\frac{\exp(-\lambda)\lambda^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\Phi\left(\frac{20000-800n}{300\sqrt{n}}\right)\right)\frac{\exp(-20)20^n}{n!} =$$

= 0,14754 ou 14,8% (Valor calculado através do Excel)

(c) Admitindo que Y é Normal com média 16.000 e desvio padrão 3.281, temos

$$P(Y > 20.000) = 1 - \Phi\left(\frac{20000-16000}{3821}\right) = 0{,}14759.$$

(d) Os resultados dos itens (b) e (c) são praticamente iguais. A diferença entre eles está apenas na 5ª casa decimal. A explicação para isso é claramente o Teorema Central do Limite, já que:

- Dado N = n, Y é uma soma de n Normais;
- A distribuição de N é uma Poisson(20), que, pelo TCL, se aproxima muito de uma N(20,20).

R6.8) Soma de Exponenciais iid

Sejam X_1, X_2 e X_3 v.a. independentes com a mesma distribuição Exp(λ), e seja $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$. Obtenha a função de densidade de Y_1.

A função de densidade marginal para cada X_i é a mesma :

$f_i(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$

$= 0$, $x \geq 0$

Temos $Y_1 = H_1(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3$

Escolhendo com variáveis auxiliares $Y_2 = H_2(X_1, X_2, X_3) = X_2$ e $Y_3 = H_3(X_1, X_2, X_3) = X_3$ podemos escrever as equações :

$y_1 = x_1 + x_2 + x_3$; $y_2 = x_2$; $y_3 = x_3$

Resolvendo para x_1, x_2 e x_3 temos : $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$; $x_2 = y_2$; $x_3 = y_3$

Procedendo de maneira análoga ao que foi feito no caso de 2 v. a.'s encontramos o Jacobiano

$$J(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dy_1} & \frac{dx_1}{dy_2} & \frac{dx_1}{dy_3} \\ \frac{dx_2}{dy_1} & \frac{dx_2}{dy_2} & \frac{dx_2}{dy_3} \\ \frac{dx_3}{dy_1} & \frac{dx_3}{dy_2} & \frac{dx_3}{dy_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

A densidade conjunta de Y_1, Y_2 e Y_3 é

$g(y_1, y_2, y_3) = f_1(y_1 - y_2 - y_3).f_2(y_2).f_3(y_3).1 > 0$ se $y_1 - y_2 - y_3 > 0$, $y_2 > 0$, $y_3 > 0$

ou seja se $0 < y_2 < y_1 - y_3$, $y_3 < y_1$

Assim sendo,

$g(y_1, y_2, y_3) = \lambda e^{-\lambda(y_1 - y_2 - y_3)} \lambda e^{-\lambda y_2} \lambda e^{-\lambda y_3} = \lambda^3 e^{-\lambda y_1}$

A densidade marginal de Y_1 é , então :

$f_1(y_1) = \int_0^{y_1}\int_0^{y_1 - y_3} \lambda^3 e^{-\lambda y_1} dy_2 dy_3 = \frac{\lambda^3 y_1^2 e^{-\lambda y_1}}{2}$, $y_1 > 0$

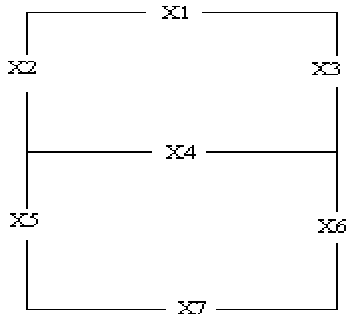
ou seja , $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$ tem a distribuição Gama (3, λ) .

Obs.: Este resultado pode ser generalizado no sentido de que a soma de r variáveis aleatórias Exp(λ) tem distribuição Gama(r, λ).

Exercícios Propostos

P6.1) Relógio digital

Em um relógio digital, todos os dez dígitos (de “zero” a “nove”) são representados por figuras como abaixo:



onde cada uma das sete “luzes” X1, X2, X3, X4, X5, X6, X7 pode estar acesa (= 1) ou apagada (= 0). Por exemplo:

- se todas as luzes estão acesas exceto X4, temos o dígito “zero”;
- se todas estão apagadas exceto X3 e X6, temos o dígito “um”;
- se todas estão acesas exceto X2 e X6, temos o dígito “dois”;
- e assim por diante...

Tudo isso pode ser resumido em uma tabela, como abaixo:

Dígito	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**X7**
Zero	1	1	1	0	1	1	1
Um	0	0	1	0	0	1	0
Dois	1	0	1	1	1	0	1
Três	1	0	1	1	0	1	1
Quatro	0	1	1	1	0	1	0
Cinco	1	1	0	1	0	1	1
Seis	1	1	0	1	1	1	1
Sete	1	0	1	0	0	1	0
Oito	1	1	1	1	1	1	1
Nove	1	1	1	1	0	1	1

Admitindo que os dez dígitos são igualmente prováveis, calcule:

(a) P(X5 = 0)
(b) P(X2 = 0, X3 =1)
(c) P(X4 = 1|X6 = 1)
(d) P(Dígito = “Um”|X7 = 0)
(e) P(Dígito é par|X1 = 1)

P6.2) Variáveis aleatórias iid

Sejam X, Y e Z três variáveis aleatórias iid tais que:

$P(X = -1) = P(Y = -1) = P(Z = -1) = ½$ e $P(X = 1) = P(Y = 1) = P(Z = 1) = ½$.

e seja W a v.a. definida por W = XY + Z.

(a) Qual a função de probabilidade de W?
(b) Calcule E(W) e Var(W).

P6.3) Teoria da Binomial

Considere uma população infinita Ω que contem uma subpopulação Γ também infinita. A subpopulação Γ corresponde a uma fração p da população Ω. Uma amostra aleatória com n elementos é extraída da população e conta-se o número X de elementos da amostra que pertencem à subpopulação Γ. Mostre que:

(a) $X \sim \text{Binomial}(n;p)$
(b) $E(X) = np$
(c) $\text{Var}(X) = np(1-p)$

Sugestão: Para cada elemento i da amostra construa uma variável aleatória U_i tal que $U_i = \begin{cases} 1, \text{se } i \in \Gamma \\ 0, \text{se } i \notin \Gamma \end{cases}$. Então $U_i \sim \text{Bernoulli}(p)$, $U_1, U_2, ..., U_n$ são independentes e $X = \sum_{i=1}^{n} U_i$.

P6.4) Gerador de n^{os} aleatórios com distribuição aproximadamente Normal padrão

Às vezes, para gerar n^{os} aleatórios com distribuição Normal padrão usa-se a expressão

$$Z = \sum_{i=1}^{12} U_i - 6,$$

onde $U_1, U_2, ..., U_{12}$ é uma amostra aleatória da distribuição Uniforme no intervalo [0,1]. Por que a distribuição da variável aleatória Z se aproxima de uma Normal padrão?

P6.5) Despesas previstas

Claudio acaba de comprar um apartamento e sabe que, mesmo antes de vir a ocupá-lo, terá que arcar com algumas despesas iniciais. Com base em um levantamento feito ao longo do último mês:

- A documentação deve custar em média 3000 u.m. com um desvio padrão de 1000 u.m.;
- A pintura do apartamento deve custar em média 2.000 u.m. com um desvio padrão de 800 u.m.;
- O laqueamento (calafetação) do assoalho deve custar em média 1000 u.m. com um desvio padrão de 300 u.m.;
- Os móveis novos devem custar em média 4500 u.m. com um desvio padrão de 1500 u.m.;
- O transporte da mudança deve custar em média 800 u.m. com um desvio padrão de 100 u.m.

Ele dispõe no momento de um total de 10000 u.m. para custear essas despesas. Admitindo que todas as despesas previstas são v.a.'s com distribuição Normal:

(a) Calcule a probabilidade de que os seus recursos sejam suficientes.
(b) Refaça o cálculo dessa probabilidade, dado que nos últimos dias Claudio apurou que:
    - A documentação não deve custar menos de 4000 u.m.
    - A pintura não deve custar menos de 1800 u.m.
    - O laqueamento não deve custar menos de 900 u.m.
    - Os móveis novos não devem custar menos de 5000 u.m.
    - A mudança não deve custar menos de 700 u.m.

Sugestão: Resolva por Simulação.

P6.6) Será que a receita líquida do taxista compensa?
Um taxista costuma arrecadar, por dia de trabalho, um valor cuja média é de 150 reais e cujo desvio padrão é de 100 reais. Esse valor corresponde à soma do que ele recebe em todas as corridas daquele dia, já descontados os seus gastos com combustível. Tanto a licença (a chamada autonomia) como o carro que ele usa pertencem a uma outra pessoa, que arca com todas as demais despesas necessárias a essa atividade (manutenção do veículo, licenciamento, etc.). Essa pessoa cobra do taxista uma quantia fixa de 2500 reais por mês, pelo uso do carro e da licença. Se o taxista roda durante 25 dias por mês, qual a probabilidade de que em um certo mês ele terá uma receita líquida de pelo menos 1500 reais?

P6.7) Medidas para proteger o ecossistema
Em um determinado município a prefeitura está considerando a possibilidade de adotar um pacote de medidas que visam proteger o ecossistema da região. Foram sorteadas ao acaso 30 habitantes desse município para compor uma Comissão que irá examinar esse assunto. O critério de decisão é adotar o pacote se pelo menos K membros da Comissão se manifestarem favoravelmente. Admita que 75% dos habitantes do município são favoráveis ao pacote.

(a) Calcule a probabilidade de que ele seja aprovado, se K = 25.
(b) E se K = 20?

Sugestão: Aproximar Binomial por Normal.

P6.8) Pesquisa de mercado
Uma empresa estuda a possibilidade de lançar no mercado um novo detergente, por um preço um pouco mais alto do que o dos produtos similares, mas supostamente de qualidade muito superior. Para isso ela encomendou uma pesquisa de mercado onde 200 consumidores escolhidos aleatoriamente serão ouvidos sobre sua intenção de adquirir o novo produto. A empresa só pretende lançá-lo de fato no mercado se pelo menos 40 entre os consumidores consultados responderem favoravelmente. Seja p a verdadeira proporção populacional dos consumidores dispostos a usar o novo produto.

(a) Calcule a probabilidade de que o lançamento ocorrerá, se p = 0,15.
(b) Idem, se p = 0,25.

Sugestão: Aproximar Binomial por Normal.

P6.9) Distribuição de verbas para o Ensino Básico
O governo de um certo estado do Brasil decidiu adotar um critério para a distribuição de verbas ligadas à área de Ensino Básico entre os municípios daquele estado. Em cada município são sorteadas 25 escolas de 1º grau para serem inspecionadas com relação a diversos aspectos que procuram medir a qualidade da sua administração (bom uso dos recursos disponíveis, assiduidade e pontualidade dos professores, nível do ensino, etc.):

- Se o número de escolas consideradas aprovadas nessa inspeção for pelo menos igual a 20, o município recebe uma dotação alta;
- Se o número de escolas consideradas aprovadas nessa inspeção estiver entre 14 e 19 (incluindo os extremos do intervalo), o município recebe uma dotação média;
- Se o número de escolas consideradas aprovadas nessa inspeção for no máximo igual a 13, o município recebe uma dotação baixa;

Qual a probabilidade de que um município onde 65% das escolas são bem administradas:

(a) receba uma dotação alta?

(b) receba uma dotação média?

(c) receba uma dotação baixa?

Sugestão: Use a aproximação da Binomial pela Normal.

P6.10) Conserto de instrumentos musicais

Um técnico especializado no conserto de instrumentos musicais de teclado trabalha em casa, como autônomo. Se ele tiver vários serviços a fazer, trabalha em um teclado de cada vez, até que o defeito esteja sanado. Sua rotina é trabalhar todos os dias uteis, 8 horas por dia. Admita que o tempo necessário para ele consertar um teclado varia segundo uma distribuição exponencial com média de 1,5 dias = 12 horas de trabalho. Se uma loja encomendou a esse técnico o conserto de 5 teclados, calcule a probabilidade de que ele completará todo esse serviço em 1 semana, ou seja, 5 dias uteis.

P6.11) Projetando o nível de precipitação de chuva para os anos vindouros

Sabe-se que a precipitação anual de chuva em uma determinada região é uma variável aleatória Normalmente distribuída com média de 26,8 cm e desvio padrão de 2,6 cm. Determine a probabilidade de que em cada um dos três próximos anos a precipitação anual ultrapasse 28 cm.

P6.12) No *check-in* do aeroporto.

Eunice chega ao *check-in* de um aeroporto carregando uma mala que contém 10 pacotes de café, 5 latas de leite em pó e 7 latas de azeite. Suponha que os pesos desses itens são todos v.a.'s independentes com distribuição Normal e com as seguintes médias e desvios padrão:

- Para os pacotes de café, a média é 1000 g e o desvio padrão 15 g;
- Para as latas de leite em pó, a média é 450 g e o desvio padrão 8 g;
- Para as latas de azeite, a média é 600 g e o desvio padrão 12 g.

Supondo que o peso da mala é de 1,5 kg e que, além disso, Eunice ainda carrega exatos 2,0 kg de roupas, determine a probabilidade de que o peso total de sua bagagem ultrapasse os 20 kg permitidos para o embarque.

P6.13) Os gastos podem exceder os ganhos?

Para uma certa pessoa, os gastos mensais (em reais) de com diversas categorias de bens e serviços podem ser considerados v.a.'s independentes, com distribuições Normais e com as seguintes médias e desvios-padrão:

Item	Média	D Padrão
Alimentação	1500,00	200,00
Transporte	1000,00	300,00
Luz, Gás, Telefone	500,00	100,00
TV a cabo	150,00	30,00
Plano de Saúde	450,00	50,00
Vestuário	300,00	100,00
Lazer	400,00	100,00
Eletrodomésticos	300,00	100,00
Moradia	800,00	200,00
Remédios	400,00	100,00

Acontece que o salário mensal líquido desse indivíduo é da ordem de 6000,00 reais. Qual a probabilidade de que em determinado mês, ele gaste mais do que recebeu?

P6.14) Erro de raciocínio

Considere o problema a seguir:

Suponha que para uma população de adultos o peso seja uma variável aleatória Normalmente distribuída, com média 75 kg e desvio padrão 8 kg. Além disso, suponha que, para adultos praticantes de Sumô, a distribuição dos pesos, é também Normal, com média 110 kg e desvio padrão 5 kg. Sete adultos comuns e três praticantes adultos de Sumô estão prestes a entrar num elevador com a seguinte inscrição: "Capacidade máxima 10 pessoas ou 850 kg". Determine a probabilidade de que o peso dessas 10 pessoas ultrapasse a capacidade máxima do elevador.

Digamos que a solução apresentada tenha sido a seguinte:

Os 7 adultos comuns podem ser considerados como uma amostra aleatória da distribuição $N(75;\ 8^2)$, enquanto que os 3 praticantes de Sumô podem ser considerados como uma amostra aleatória da distribuição $N(110\ ;\ 5^2)$. Sejam $W = 7X$ e $T = 3Y$. Então:

$\mu_W = 7x75 = 525$; $\sigma_W = \sqrt{7^2 \times 8^2} = 56$; $\mu_T = 3x110 = 330$ e $\sigma_T = \sqrt{3^2 \times 5^2} = 15$.

Além disso, W e T são Normalmente distribuídos. Seja S = W + T. S é também Normalmente distribuída, com média $\mu_S = \mu_W + \mu_T = 855$ kg e desvio padrão $\sigma_S =$ $= \sqrt{56^2 + 15^2} = 57{,}97$kg.
Assim sendo,

$$P(S > 850) = P\left(Z > \frac{850-855}{57{,}97}\right) = P(Z > -0{,}086) = 0{,}534 \text{ ou } 53{,}4\%.$$

Portanto, a probabilidade de que a carga máxima do elevador seja ultrapassada é 53,4%.

(a) Foi cometido um erro em algum ponto desse raciocínio. Qual foi esse erro?
(b) Qual a solução correta?

P6.15) Engenharia de software

Considere novamente a situação descrita no Exemplo 6.6.

(a) Qual a probabilidade de que o serviço fique pronto em uma semana se a equipe for composta por 5 programadores mais experientes e 30 programadores menos experientes?
(b) Se fossem usados apenas os programadores mais experientes, quantos seriam necessários para que se pudesse afirmar que o serviço ficaria pronto em uma semana com pelo menos 90% de chance?
(c) E se fossem usados somente os menos experientes?

P6.16) Produto de lognormais

Sejam X_1, X_2, X_3, X_4 v.a.'s iid tais que $\ln(X_i)$ tem distribuição Normal padrão, i = 1,2,3,4. Se $Y = X_1X_2X_3X_4$, calcule E(Y) e Var(Y).
Sugestão: Use a teoria do Cap. 4.

P6.17) Força de compressão de uma estrutura de concreto

Considere duas propriedades mecânicas do concreto armado:

X = módulo secante (medida em 10^6 psi) e

Y = força de compressão (medida em 10^3 psi)

Admita que, para uma determinada estrutura:

- A variável aleatória X se comporta segundo uma distribuição Normal com média μ_X = = 3,52 e desvio padrão $\sigma_X = 0{,}15$.
- A variável aleatória Y pode ser expressa como a soma de duas parcelas:
  1. uma função linear de X do tipo $\beta_0 + \beta_1 X$, onde $\beta_0 = -20{,}69$ e $\beta_1 = 7{,}96$.
  2. uma variável aleatória erro E (também medida em 10^3 psi), cuja distribuição é uma Normal com média $\mu_E = 0{,}00$ e desvio padrão $\sigma_E = 0{,}77$, e que representa o erro na relação de dependência entre X e Y.
- X e E são v.a.'s independentes.

Resumindo, podemos então dizer que:

- $X \sim N(3{,}52; 0{,}15^2)$; e
- $Y = -20{,}69 + 7{,}96\, X + E$, onde $E \sim N(0{,}00; 0{,}77^2)$
- X e E são independentes

No caso em que o módulo secante é $X = 3{,}5 \times 10^6$ psi:

(a) Calcule a média e o desvio padrão da força de compressão Y.
(b) Calcule a probabilidade P(Y > 8,00) de que a força de compressão seja maior que $8,00 \times 10^3$ psi.

Quando não se sabe o valor exato do módulo secante X:
(c) Calcule a média e o desvio padrão da força de compressão Y.
(d) Calcule a probabilidade P(Y > 8,00) de que a força de compressão seja maior que $8,00 \times 10^3$ psi.

P6.18) Expressando o peso em função da altura e da circunferência da cintura

Considere três atributos de uma mulher idosa:
X = altura (cm) Y = circunferência da cintura (cm) Z = peso (kg)
Admita que, para uma determinada mulher idosa:

- O par de variáveis aleatórias $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ se comporta como uma binormal com vetor de médias $\begin{bmatrix} 156 \\ 86 \end{bmatrix}$ e matriz de covariâncias $\begin{bmatrix} 16 & 23 \\ 23 & 164 \end{bmatrix}$.
- A variável aleatória Z pode ser expressa como uma soma do tipo $Z = \alpha + \beta X + \gamma Y + E$, onde:
  1. $\alpha = -27$, $\beta = 0{,}30$ e $\gamma = 0{,}45$.
  2. a variável aleatória erro E (também medida em kg) tem distribuição Normal com média $\mu_E = 0$ e desvio padrão $\sigma_E = 3$, e representa o erro na relação de dependência entre Z e o par $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$.
- X e Y são v.a.'s independentes da v.a. E.

Para uma mulher idosa que tenha X = 160 cm de altura e Y = 78 cm de cintura:

(a) Qual é a média e qual é o desvio padrão do seu peso Z?
(b) Qual a probabilidade P(Z > 68) de que ela pese mais de 68 kg?

Para as mulheres idosas em geral:
(c) Qual é a média e qual é o desvio padrão do seu peso Z?
(d) Qual a probabilidade P(Z > 68) de pesar mais de 68 kg?

P6.19) Movimento de uma partícula sobre o eixo dos x

Uma partícula se move sobre o eixo dos x de tal forma que:

- No instante i = 0 ela está na origem, ou seja, x = 0.
- Se no instante i (onde i = 0,1,2,3) ela está na origem; no instante i+1, ela se move de uma unidade para a direita (com probabilidade 1/2) ou de uma unidade para a esquerda (com probabilidade 1/2).
- Se no instante i (onde i = 0,1,2,3) ela está a uma distância d da origem (d > 0); no instante i+1, ela se move de uma unidade afastando-se da origem (com probabilidade 1/(d+2)) ou de uma unidade aproximando-se da origem (com probabilidade (d+1)/(d+2)).

Por exemplo:
Se em $i = 2$, a partícula está em $x = -2$ (portanto, a uma distância $d = 2$ da origem);
Então, em $i = 3$, ela se moverá para $x = -3$ (com probabilidade ¼) ou para $x = -1$ (com probabilidade ¾).
Seja X_i a abscissa do ponto em que essa partícula se encontra no instante i, $i = 0,1,2,3,4$.
Sabemos que $P(X_0 = 0) = 1$, o que implica que $E(X_0) = 0$ e $Var(X_0) = 0$.
É fácil ver também que $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = ½$, o que implica que:

- $E(X_1) = 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$ e
- $Var(X_1) = (1-0)^2 \times \frac{1}{2} + (-1-0)^2 \times \frac{1}{2} = 1$.

Calcule $E(X_2)$, $Var(X_2)$, $E(X_3)$ e $Var(X_3)$.