CAPÍTULO 9
Exercícios Resolvidos

R9.1) Diâmetro de esferas de rolamento

Os dados a seguir correspondem ao diâmetro, em mm, de 30 esferas de rolamento produzidas por uma máquina.

137	154	159	155	167	159	158	159	152	169
154	158	140	149	145	157	160	155	155	143
157	139	159	139	129	162	151	150	134	151

a) Construa um intervalo de confiança, a 95%, para a média da população de todas as possíveis esferas produzidas pela máquina.

b) Suponha que, para satisfazer as especificações do consumidor, as peças devem estar compreendidas entre 140 e 160 mm. Determine um intervalo de confiança de 98% para a verdadeira proporção de peças fabricadas pela máquina satisfazendo as especificações.

Solução:

a) Calculando, obtemos $\bar{x} = 151{,}9$ mm e s = 9,7 mm.

Para $1 - \alpha = 0{,}95$ e 29 g.l., temos $t_{0,975} = 2{,}045$.

Daí, $d = t_{0,975} \frac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}045 \times \frac{9{,}7}{\sqrt{30}} = 3{,}6$

Portanto, os limites de confiança pedidos são:

$LI = \bar{x} - d = 151{,}9 - 3{,}6 = 148{,}3$

$LS = \bar{x} + d = 151{,}9 + 3{,}6 = 155{,}5$

b) Organizando os dados em ordem crescente, temos:

129	134	137	139	139	140	143	145	149	150
151	151	152	154	154	155	155	155	157	157
158	158	159	159	159	159	160	162	167	169

Há 22 observações entre 140 e 160 mm. Logo a proporção amostral de peças dentro das especificações é 22/30 = 0,73. Para $1 - \alpha = 0{,}98$, temos $z_{0,99} = 2{,}33$.

Daí, $d = z_{0,99} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2{,}33 \sqrt{\frac{0{,}73 \times 0{,}27}{30}} = 0{,}08$. Assim, os limites de confiança são:

$LI = \hat{p} - d = 0{,}73 - 0{,}08 = 0{,}65$

$LS = \hat{p} + d = 0{,}73 + 0{,}08 = 0{,}81$

Com o nível de confiança de 98%, espera-se que a proporção de peças produzidas pela máquina satisfazendo a especificação desejada esteja entre 65% e 81%.

R9.2) Intervalo de Confiança para o Índice Cardíaco Médio

Foi realizada uma pesquisa envolvendo uma amostra de 600 pacientes de um certo hospital. Cada um desses pacientes foi submetido a uma série de exames clínicos e, entre outras coisas, mediu-se o Índice Cardíaco (em litros/min/m^2) de todos eles. Os 600 pacientes foram então classificados, de forma aleatória, em 40 grupos de 15 pacientes cada. Para um desses grupos os valores medidos do Índice Cardíaco foram: 405, 348, 365, 291, 135, 260, 300, 155, 34, 294, 758, 472, 559, 143, 172.

(a) Com base nos valores acima, construa um Intervalo de Confiança para o valor médio μ do Índice Cardíaco ao nível de 95%.

(b) Se para cada um desses 40 grupos de 15 pacientes fosse construído um Intervalo de Confiança para μ ao nível de 95%, quantos desses intervalos se espera que não conteriam a verdadeira média populacional no seu interior? Por que?

Solução:

(a) A média e o desvio padrão amostrais calculados a partir dos dados acima são $\bar{x} = 312{,}73$ e s = 185,80. Por outro lado, o quantil da t de *Student* com (15 – 1) = 14 graus de liberdade correspondente a $1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975$ é 2,145. Os extremos do intervalo de confiança para o Índice Cardíaco médio, a 95% de confiança, são portanto:

$312{,}73 \pm 2{,}145 \times \frac{185{,}80}{\sqrt{15}}$, ou seja, o intervalo é (209,84; 415,63), sendo esses valores expressos em litros/min/m^2.

(b) Como o valor de α adotado no caso foi 0,05, cerca de 5%, ou seja, 2 dos 40 intervalos de confiança assim obtidos não conteriam em seu interior a verdadeira média populacional.

R9.3) Comparando métodos de ensino de Matemática

Os 36 alunos de uma turma são divididos ao acaso em dois grupos de 18. Para o primeiro grupo o ensino de Matemática é feito usando elementos de multimídia. Enquanto isso, no segundo grupo o ensino é feito pelo método tradicional (quadro negro e giz). No final do período é aplicado um teste, comum aos dois grupos, com os seguintes resultados:

Grupo 1:	7,3	8,2	6,0	7,7	8,0	6,1	5,6	5,3	5,9
	5,8	5,8	7,1	5,1	8,0	7,6	8,3	4,9	6,5
Grupo 2:	7,5	6,2	5,7	4,4	4,7	5,8	5,0	6,0	6,5
	5,8	4,5	5,1	5,5	6,0	5,8	5,8	5,7	7,5

Considerando os dois grupos como amostras aleatórias de duas populações independentes e Normalmente distribuídas, determine um intervalo de confiança de 95% para a verdadeira diferença das médias populacionais dos dois grupos.

Solução:

Sejam X e Y as variáveis aleatórias representando as notas nos grupos 1 e 2, respectivamente. Denotemos as correspondentes médias populacionais por μ_X e μ_Y.

Então temos: n = m = 18 ; $\bar{x} = 6{,}622$; $s_X = 1{,}151$; $\bar{y} = 5{,}744$; $s_Y = 0{,}860$.

Estamos supondo Normalidade para as distribuições de notas nos dois grupos. Como os desvios padrões são desconhecidos e os tamanhos amostrais são pequenos usaremos a distribuição t de *Student*. Além disso, os desvios padrões amostrais são relativamente próximos. Por isso usamos a estimativa combinada:

$$s_c = \sqrt{\frac{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}{n+m-2}} = \sqrt{\frac{17\times 1{,}151^2 + 17\times 0{,}860^2}{18+18-2}} = 1{,}016$$

Para $1 - \alpha = 0{,}95$ e $\nu = 34$ graus de liberdade, $t_{1-\frac{\alpha}{2}} = t_{0{,}975} = 2{,}032$.

Daí, $d = t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_c\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = 2{,}032\times 1{,}016 \times \sqrt{\frac{1}{18} + \frac{1}{18}} = 0{,}688$

Desta maneira, os limites do intervalo de confiança de 95% para $\mu_X - \mu_Y$ são:

$L_{inf} = (\overline{X} - \overline{Y}) - d$ = (6,622 – 5,744) – 0,688 = 0,289 ≅ 0,29

$L_{sup} = (\overline{X} - \overline{Y}) + d$ = (6,622 – 5,744) + 0,688 = 1,566 ≅ 1,57

Notemos que o intervalo inclui apenas valores positivos, indicando uma tendência no sentido de que a média do primeiro grupo é maior do que a média do segundo grupo para um nível de confiança de 95%. Então podemos afirmar que o método que usa multimídia tende a produzir notas superiores às do método tradicional, ao nível de confiança dado.

R9.4) O desempenho dos alunos piorou da 1ª prova para a 2ª prova?

A tabela a seguir contem as notas na 1ª prova (x) e na 2ª prova (y) de uma amostra de alunos de uma determinada disciplina. Deseja-se construir um intervalo de confiança a 95% para a diferencias entre as médias populacionais das notas da 1ª e da 2ª provas. Os dados são os seguintes:

Tabela 8.2 – Notas da 1ª e 2ª provas para um grupo de alunos

1ª Pr (x)	6,3	1,5	5,9	6,4	5,5	5,4	5,4	8,0	5,9	8,0	6,5	2,0	3,6	6,0	9,8	6,8	5,3
2ª Pr (y)	3,6	3,8	3,0	6,0	4,3	4,6	6,4	5,5	6,0	4,3	4,3	5,2	3,4	2,8	8,3	7,1	5,5
1ª Pr (x)	8,7	6,5	6,4	7,7	8,5	5,3	6,9	8,0	8,2	7,1	8,4	6,0	5,5	7,2	6,4	5,5	6,4
2ª Pr (y)	8,2	3,8	5,5	6,7	6,7	4,4	3,4	5,9	6,0	5,9	6,8	5,0	6,2	5,4	4,7	3,6	5,2

(a) Que suposições deveriam ser feitas? O método estatístico a ser usado neste caso deve considerar amostras pareadas ou amostras independentes? Por que?
(b) Use o método que você considera o mais adequado para obter o Intervalo de Confiânça pedido.
(c) Pode-se concluir com base nessa análise que, em média, o desempenho dos alunos piorou da 1ª prova para a 2ª prova?

Obs.: Para simplificar os cálculos são fornecidos os seguintes valores:

	x	y	x – y
Média	6,37	5,21	1,16
Desvio Padrão	1,73	1,40	1,54

<u>Solução:</u>

(a) Devemos considerar os 34 alunos como sendo uma amostra aleatória da população de todos os alunos que poderiam fazer essas duas provas. Além disso, devemos considerar as notas de ambas as provas como Normalmente distribuídas. Como o desvio padrão populacional das diferenças das duas notas é desconhecido usaremos a distribuição t de *Student*. Dado que neste caso as amostras **não** são independentes, porque se trata de observar um mesmo aluno em 2 momentos diferentes, claramente devemos usar o método para amostras pareadas.
(b) Δ = Nota na 1ª Prova – Nota na 2ª Prova.
Temos então n = 34 pares de dados, implicando que o nº de graus de liberdade = 34 – 1 = 33 e

$$\overline{\Delta}_{obs} = 1{,}16 \qquad \text{e} \qquad (S_\Delta)_{obs} = 1{,}54 \quad \Rightarrow \quad d = t_{1-\alpha/2}\frac{s_\Delta}{\sqrt{n}} = 2{,}03\frac{1{,}54}{\sqrt{34}} = 0{,}54$$

Assim, $L_{sup} = \overline{\Delta}_{obs} + d = 1{,}16 + 0{,}54 = 1{,}70$ e $L_{inf} = \overline{\Delta}_{obs} - d = 1{,}16 - 0{,}54 = 0{,}62$

Para verificar se a premissa de Normalidade está sendo atendida aqui, você pode construir, por exemplo, um gráfico de probabilidade Normal (ver Capítulo 12).

Como o tamanho da amostra é relativamente grande, uma solução alternativa (aproximada) seria trabalharmos com a própria distribuição Normal padrão (já que, para valores altos do n^o de graus de liberdade, a t de *Student* praticamente se confunde com a Normal padrão). Neste caso, o desvio padrão amostral $s_\Delta = 1{,}54$ seria usado como se fosse igual ao desvio padrão populacional σ_Δ. Como $z_{0,975} = 1{,}96$, resulta

$$d = z_{0,975}\frac{\sigma_\Delta}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \times \frac{1{,}54}{\sqrt{34}} = 0{,}52$$

Assim, os limites de confiança aproximados são:

$L_{sup} = \overline{\Delta}_{obs} + d = 1{,}16 + 0{,}52 = 1{,}68$ e $L_{inf} = \overline{\Delta}_{obs} - d = 1{,}16 - 0{,}52 = 0{,}64$.

Podemos observar que os limites obtidos são muito semelhantes em ambos os casos.

(c) Como o intervalo de confiança obtido não inclui o zero no seu interior, tudo leva a crer que em média o desempenho dos alunos de fato piorou da 1ª para a 2ª prova.

Exercícios propostos

P9.1) Estimação da resistência média de um material

Um pesquisador está estudando a resistência de um certo material sob determinadas condições. Ele sabe que essa variável é Normalmente distribuída com variância igual a 4 unidades^2.

Foi extraída uma amostra aleatória de tamanho 10 obtendo-se os seguintes valores:

7,9 6,8 5,4 7,5 7,9 6,4 8,0 6,3 4,4 5,9

(a) Calcule a estimativa pontual da média populacional, com base nesta amostra.

(b) Determine o intervalo de confiança para a resistência média com um coeficiente de confiança de 90%.

(c) Qual o tamanho da amostra necessário para que o erro cometido, ao estimarmos a resistência média, não seja superior a 0,3 unidades com probabilidade 0,90? E se quiséssemos um erro máximo de 0,1 unidades com a mesma probabilidade?

(d) Suponha que no item (b) não fosse conhecido o desvio padrão. Como você procederia para determinar o intervalo de confiança para a média populacional, e que suposições você faria para isso?

P9.2) Novamente os Implantes mamários

Vamos trabalhar aqui novamente com o conjunto de dados do Exercício P7.4, referentes à tensão de ruptura de n = 20 implantes mamários fabricados com gel de Silicone:

72,2	80,1	70,4	67,8	70,9	72,1	75,1	73,0	59,4	77,2
65,1	66,5	64,1	79,0	70,6	70,3	63,1	64,4	74,9	75,3

Com base nesses dados obtenha:

(a) um intervalo de confiança a 95% para a média populacional da tensão de ruptura desses implantes.

(b) um intervalo de confiança a 95% para a proporção de implantes com tensão de ruptura superior a 70.

P9.3) Vida média de pneus

Pneus de uma determinada marca foram colocados aleatoriamente nas rodas traseiras de 10 carros com os seguintes resultados:

Percurso médio amostral até desgaste total = 45.300 km

Desvio Padrão amostral = 6.150 km

(a) Obtenha um intervalo de confiança a 99% para a vida média μ dos pneus dessa marca.

(b) Qual deveria ser o tamanho de uma nova amostra para que, com base nela, pudéssemos também construir um intervalo de confiança a 99% para μ, porém 4 vezes menor em termos de amplitude?

Observações:

- Admita que os dados obedecem a premissa de Normalidade.
- Note que estimativas do mesmo parâmetro σ obtidas com base nessas duas amostras devem estar próximas entre si. E lembre-se que, se ν é suficientemente grande, a t de Student com ν graus de liberdade praticamente se confunde com a Normal(0;1).

P9.4) TV a cabo

Uma operadora de TV a cabo realizou uma pesquisa de mercado junto aos seus assinantes visando, entre outras coisas, estimar a proporção p dessas pessoas que estariam dispostas a contratar um *upgrade* no serviço que lhes é atualmente oferecido, em troca de um certo desconto no preço.

(a) Se for ouvida uma amostra de 30 assinantes, qual a probabilidade de que o erro absoluto na estimativa de p através da proporção amostral observada seja inferior a 0,1?

(b) Com base nessa amostra, obtenha um intervalo para p a 95% de confiança, admitindo que 9 entre os 30 respondentes manifestaram-se propensos a aderir a essa oferta.

(c) Qual o tamanho de uma nova amostra suficiente para garantir que a proporção p de assinantes dispostos a contratar o *upgrade* possa ser estimada com um erro absoluto menor que 0,08 com probabilidade 0,95? Admita que nada se sabe sobre o valor de p.

(d) E se é sabido que p está entre 20% e 35%?

P9.5) O impacto de uma observação adicional sobre o Intervalo de Confiança

Deseja-se estimar a média μ de peso das pessoas de uma determinada população através de um intervalo de confiança. Foi obtida uma amostra com n = 20 pessoas e, com base nos dados obtidos, calcularam-se a média amostral $\bar{x}_1 = 68{,}7\,\text{kg}$ e o desvio padrão amostral $s_1 = 5{,}36\,\text{kg}$.

(a) Admitindo que nessa população o peso segue uma distribuição Normal, obtenha um intervalo I_1 a 95% de confiança para μ com base nessa amostra.

(b) Suponha agora que foi agregado a essa amostra mais um indivíduo cujo peso w é igual a 82 kg. Obtenha um novo intervalo I_2 a 95% de confiança para μ com base na nova amostra, agora composta de 21 pessoas.

Obs.: Pode ser provado que se a nova média e o novo desvio padrão são, respectivamente, $\bar{x}_2$ e s_2, então $\bar{x}_2 = \frac{n\bar{x}_1 + w}{n+1}$ e $s_2 = \sqrt{\frac{n-1}{n}s_1^2 + \frac{1}{n+1}(\bar{x}_1 - w)^2}$. Por que?

P9.6) Significado do Intervalo de Confiança para o Índice de satisfação médio do cliente

Levando em conta simultaneamente as respostas dadas por 200 clientes de uma empresa a todos os itens de um questionário, foi calculado um índice de satisfação global correspondente a cada entrevistado. Ele pode variar desde 0 (totalmente insatisfeito) até 100 (totalmente satisfeito). Com respeito a esse índice de satisfação, foi construído um Intervalo de Confiança a 95% para a sua média populacional, que vai desde 43,5 até 63,9. Quais das seguintes afirmações estão corretas e quais não estão? Por que?

(a) A probabilidade de que a verdadeira média populacional do índice de satisfação esteja entre 43,5 e 63,9 é 95%.

(b) Se fosse extraída uma outra amostra, também com 200 clientes, a probabilidade da média (amostral) dos índices de satisfação correspondentes a essa nova amostra estar entre 43,5 e 63,9 seria de 95%.

(c) Se fossem extraídas 100 amostras, todas elas com 200 clientes, e (usando o mesmo procedimento que deu origem ao intervalo de 43,5 a 63,9) fosse construído um Intervalo de Confiança a 95% para cada uma delas, cerca de 95 desses intervalos conteriam dentro de si a verdadeira média populacional.

(d) O desvio padrão populacional do índice de satisfação é aproximadamente igual a 5,1.

(e) Todos os entrevistados têm seus índices de satisfação entre 43,5 e 63,9.

P9.7) Teor de Glicose antes e depois de um tratamento

Um tratamento a base de cloridrato de Metformina é aplicado a doze pacientes diabéticos. Os teores de glicose antes e depois de duas semanas de tratamento estão apresentados na tabela seguir:

Antes	129	132	139	132	148	126	128	137	131	118	136	116
Depois	122	127	134	126	144	128	122	138	125	110	130	113

Determine Intervalos de confiança de 99% para:

a) Os níveis de Glicose antes do tratamento;

b) Os níveis de Glicose depois do tratamento;

c) A diferença entre os teores de glicose antes e depois do tratamento.

P9.8) Ajustando um processo produtivo

O exame de uma amostra de 50 peças vindas de uma linha de produção mostrou que 8 delas eram defeituosas. Como este número foi considerado alto pelo engenheiro responsável, foi feito um ajuste no processo afim de melhorar a qualidade. Uma amostra de 60 peças fabricadas pelo novo processo apresentou 3 defeituosas. Determine um intervalo de confiança, a 95%, para:

a) a verdadeira proporção de peças defeituosas em cada um dos processos;
b) a verdadeira diferença de proporções de peças defeituosas nos dois processos
c) A partir do resultado do item (b) podemos afirmar que houve melhora significativa na qualidade do segundo processo em relação ao primeiro?

P9.9) Comparando dietas

Um grupo de 40 animais é alimentado com uma determinada dieta e um segundo grupo de 50 animais é alimentado com uma dieta diferente. Depois de um certo período de tempo, o aumento médio no peso para o primeiro grupo foi de 124,7 g, com um desvio padrão de 9 g. Já para o segundo grupo, aumento médio no peso foi de 130,8g, com um desvio padrão de 12 g. Obtenha um Intervalo de confiança de 90% para a diferença entre as médias populacionais dos aumentos de peso nos dois grupos.

P9.10) Médicos afiliados a Planos de Saúde

Pretende-se estimar o número total de médicos que trabalham em uma certa cidade e estão associados a planos de saúde. Para isso foi coletada uma amostra aleatória com n = 300 médicos dessa cidade e se apurou que entre eles m = 216 se enquadram nessa condição. Obtenha um intervalo de confiança a 98% para a sua estimativa, sabendo que o número total de médicos na cidade é 28000.

P9.11) Duração de pilhas elétricas

Foi obtida uma amostra com 20 pilhas elétricas da marca A. Todas elas foram examinadas e sua duração, em horas, foi medida. O mesmo foi feito com uma amostra de 18 pilhas do mesmo tipo, porém da marca B. Pede-se determinar um intervalo de confiança de 98% para a diferença entre as médias populacionais da duração da pilha referentes às duas marcas. Suponha que essa variável (duração da pilha) segue uma distribuição Normal, tanto para a marca A como para a marca B. Aqui estão os dados:

Marca A:	176	162	153	137	140	139	165	128	149	148
	159	134	173	171	142	142	173	155	157	139
Marca B:	183	196	157	180	188	172	159	184	152	180
	169	163	191	151	172	192	121	146		