Notas em Geometria Complexa

Andrew Clarke

Fevereiro de 2022

Contents

1 Introdução **2**

2 Elementos de Várias Variáveis Complexas **3**
2.1 Primeiras definições 3
2.2 Resultados em uma variável 4
2.3 Os teoremas de Hartogs e de Weierstrass 5
2.4 Estrutura algébrica do anel de germes de funções holomorfas . . 9

3 Variedades Complexas **13**
3.1 Definições e Exemplos 13
3.2 O espaço tangente real e complexo 14
3.3 O teorema de função implícita e subvariedades complexas 16
3.4 Formas Diferenciais, a Derivada Exterior e Coholomologia 18
3.5 Métricas Hermitianas 24

4 Feixes e Cohomologia **29**
4.1 Primeiras Definições 29
4.2 Cohomologia de Čech 35
4.3 Sequências Exatas 39
4.4 Os isomorfismos de De Rham e de Dolbeault 42
4.5 Aplicações 46

5 Fibrados Vetoriais **48**
5.1 Um resumo rápido sobre fibrados vetoriais complexos 48
5.2 Fibrados vetoriais holomorfos 53
5.3 Conexões e Curvatura em Fibrados 57
5.4 Fibrados de Linha Holomorfos 68

6 A Teoria de Chern-Weil **71**
6.1 Polinômios Invariantes e Formas Fechadas 71
6.2 As Classes de Chern 76

7 Geometria Kähleriana **82**
7.1 Propriedades Locais de Métricas Kählerianas 82
7.2 A Decomposição de Hodge 91

1 Introdução

A área que chamaremos por Geometria Complexa intersecta diversas áreas diferentes de matemática. Os objetos principais que estudamos são de variedades complexas, que são variedades diferenciáiveis em que nós temos um conceito de holomorficidade de funções. Com isso, abrem aplicações e conexões com geometria algébrica, folhações e análise complexa, e também outras áreas de geometria diferencial a partir do estudo de métricas Riemannianas, formas simpléticas e outras estruturas geometrias que são compatíveis com a estrutura complexa.

Estudaremos, entre outras coisas,

- Elementos de várias variáveis complexas,
- Variedades complexas,
- Feixes e cohomologia de Čech,
- Fibrados vetoriais, conexões e curvatura,
- A teoria de Chern-Weil e classes características,
- A teoria harmônica em variedades compactas complexas,
- Variedades Kählerianas.

2 Elementos de Várias Variáveis Complexas

2.1 Primeiras definições

Começamos com a definição mais importante do curso.

Definição 2.1. Uma **variedade complexa** de dimensão complexa n é uma variedade diferenciável real M de dimensão real $2n$, equipada com um subatlas de cartas $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, com

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$$

tal que para todo $\alpha, \beta \in A$,

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é uma aplicação *holomorfa* de subconjuntos abertos de $\mathbb{C}^n$.

Para isso fazer mais sentido, reparemos os conceitos iniciais de análise complexa.

Para $z = (z^1, \ldots, z^n) \in \mathbb{C}^n$, onde $z^j = x^j + \sqrt{-1} y^j$, escrevemos

$$\begin{aligned} dz^j &= dx^j + i dy^j, \\ d\bar{z}^j &= dx^j - i dy^j, \end{aligned}$$

para os covetores complexos em $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Também definimos

$$\frac{\partial}{\partial z^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} - i \frac{\partial}{\partial y^j}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} + i \frac{\partial}{\partial y^j}\right),$$

que consideramos ou como operadores diferenciais

$$\frac{\partial}{\partial z^j} : C^\infty(U), \mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{C})$$

ou como campos vetoriais *complexos*, ou como vetores tangentes complexos em um ponto. Com essas definições nós temos $dz^j(\partial/\partial \bar{z}^k) = 0$ e

$$dz^j\left(\frac{\partial}{\partial z^k}\right) = \delta^j_k = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k, \\ 0 & \text{se } j \neq k. \end{cases}$$

Observação: Para $U \subseteq \mathbb{C}^n$ um subconjunto aberto e $f \in C^\infty(U, \mathbb{C})$, a derivada exterior escreve-se como

$$df = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial z^j} dz^j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j} d\bar{z}^j\right).$$

Definição 2.2. Uma função suave f é **holomorfa** em $U \subseteq \mathbb{C}$ se e somente se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j} = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Observamos que se $f = u + iv$, essa condição é equivalente às condições

$$\frac{\partial u}{\partial x^j} = \frac{\partial v}{\partial y^j}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y^j} = -\frac{\partial v}{\partial x^j}.$$

2.2 Resultados em uma variável

Lembramos o teorema de Cauchy para funções de uma variável complexa . Sejam $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ um disco em $\mathbb{C}$ e $f \in C^\infty(\overline{\Delta})$. Para todo $z \in \Delta$, nós temos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta}\frac{f(w)dw}{w-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta}\frac{\partial f}{\partial\bar{w}}\frac{1}{w-z}dw \wedge d\bar{w}.$$

Para demonstrar isso, considere $\Delta_\varepsilon = \overline{\Delta} \setminus \Delta(z,\varepsilon)$. Então, a 1-forma $\eta(w) = \frac{1}{2\pi i}\frac{f(w)}{w-z}dw$ é suave em Δ_ε e

$$\begin{aligned} d\eta &= \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\left(\frac{f(w)}{w-z}\right)d\bar{w}\wedge dw \\ &= \frac{-1}{2\pi i}\frac{1}{w-z}\frac{\partial f}{\partial\bar{w}}dw \wedge d\bar{w}. \end{aligned}$$

pois $dw \wedge dw = 0$. Pelo teorema de Stokes, temos $\int_{\Delta_\varepsilon} d\eta = \int_{\partial\Delta}\eta - \int_{\partial\Delta(z,\varepsilon)}\eta$. Portanto, a forma $d\eta$ pode ser integrada sobre o disco $\Delta(z,\varepsilon)$, e temos

$$\begin{aligned} \int_{\Delta(z,\varepsilon)} d\eta &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z|<\varepsilon}\frac{1}{w-z}\frac{\partial f}{\partial\bar{w}}d\bar{w}\wedge dw, \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial\bar{w}}2ie^{-i\theta}drd\theta, \\ &= O(\varepsilon) \longrightarrow 0, \text{ quando } \varepsilon \to 0. \end{aligned}$$

Isso significa em particular que $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Delta_\varepsilon} d\eta = \int_\Delta d\eta$. Para o termo de bordo, temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta(z,\varepsilon)} \eta &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon f(z+\varepsilon e^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta, \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+\varepsilon e^{i\theta})d\theta. \end{aligned}$$

Por continuidade, essa integral converge para o valor $f(z)$ quando $\varepsilon \to 0$. Assim, vemos que $\int_{\partial\Delta}\eta = f(z) + \int_\Delta d\eta$ como desejado.

Proposição 2.3. (sem demonstração) *Uma função $f \in C^\infty(U)$ é holomorfa se e somente se f é analítica, e se e somente se para todo $z_0 \in U$, $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$, o que é convergente em alguma vizinhança de z_0.*

Teorema 2.4. *Para $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, sejam $g \in C^\infty(\overline{\Delta})$ e*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \frac{g(w)}{w-z}dw \wedge d\bar{w}.$$

Então f é suave em Δ e satisfaz

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{z}} = g.$$

Demonstração: Para $z_0 \in \Delta$ fixado, veremos que $\partial f/\partial \bar{z}(z_0) = g(z_0)$. Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno que $\Delta(z_0, 2\varepsilon) \subseteq \Delta$. Usando uma função de corte, escreva g como $g(z) = g_1(z) + g_2(z)$ onde g_1 é identicamente nula fora do conjunto $\Delta(z_0, 2\varepsilon)$ e g_2 se anula dentro do disco $\Delta(z_0, \varepsilon)$. Em particular $g_2(z_0) = 0$. Então definimos

$$f_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \frac{g_j(w)}{w-z} dw \wedge d\bar{w},$$

tal que $f = f_1 + f_2$. Para $z \in \Delta(z_0, \varepsilon)$, não existe uma singularidade na integral de f_2 pois a função g_2 é identicamente nula em $\Delta(z_0, \varepsilon)$, e então podemos trocar a derivada $\partial/\partial\bar{z}$ e a integral sobre Δ:

$$\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Delta g_2(w)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{1}{w-z} dw \wedge d\bar{w} = 0,$$

que é dizer que f_2 é holomorfa em $\Delta(z_0, \varepsilon)$. Pelo outro lado,

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Delta g_1(w)\frac{1}{w-z} dw \wedge d\bar{w}, \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} g_1(w)\frac{1}{w-z} dw \wedge d\bar{w}, \\ &= \frac{-2i}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty g_1(z + re^{i\theta})e^{i\theta} dr d\theta. \end{aligned}$$

O integrando é suave e limitado em r, θ e z, então de novo podemos trocar a derivada e a integral e temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} &= \frac{-2i}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_1(z + re^{i\theta})e^{-i\theta} dr d\theta, \\ &= \frac{-2i}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \frac{\partial g_1}{\partial \bar{w}}(z + re^{i\theta})e^{-i\theta} dr d\theta, \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{w-z}\frac{\partial g_1}{\partial \bar{w}} dw \wedge d\bar{w}, \\ &= g_1(z_0), \end{aligned}$$

com a última igualdade seguindo pelo teorema de Cauchy acima. Concluimos que f é suave e $\partial f/\partial \bar{z} = g$.

2.3 Os teoremas de Hartogs e de Weierstrass

Agora supomos que $n \geq 2$ e que $U \subseteq \mathbb{C}^n$ é um subconjunto aberto. Seja $f \in C^\infty(U)$ uma função suave em U. Então,

$$\begin{aligned} df &= \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j + \frac{\partial f}{\partial y^j}dy^j\right), \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial z^j}dz^j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j}d\bar{z}^j\right). \end{aligned}$$

Dizemos que uam função suave $f \in C^\infty(U)$ é **holomorfa** se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j} = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$. O conjunto de funções holomorfas em U é denotado por $\mathcal{O}(U)$.

Proposição 2.5. 1. *Se f é holomorfa, então é analítica.*

2. *Se f e g são funções holomorfas num conjunto aberto e conexo U, e se $f \equiv g$ em algum subconjunto aberto, então $f \equiv g$ em U.*

3. *Se f é holomorfa num conjunto conexo e se $|f|$ assume o seu valor máximo num ponto de interior de U, então f é constante.*

Teorema 2.6. *(Hartogs) Em $\mathbb{C}^2$, sejam, para $0 < r < R$,*

$$\begin{aligned} U &= \Delta(R) = \{(z^1, z^2) \mid |z^1|, |z^2| < R\}, \\ V &= \Delta(r) = \{(z^1, z^2) \mid |z^1|, |z^2| < r\} \subseteq U. \end{aligned}$$

Então, toda função holomorfa numa vizinhança de $U \setminus V$ estende-se a uma função holomorfa em U.

Demonstração: Para z^1 fixado, o conconjunto $(U \setminus \overline{V}) \cap \{z^1 = \text{cst}\}$ tem a forma

- $\{|z^2| < R\}$ se $|z^1| > r$,
- $\{r < |z^2| < R\}$ se $|z^1| \leq r$.

Então definimos a função

$$F(z^1, z^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{f(z^1, w)}{w - z^2} dw.$$

Se $r < |z^1| < R$, então $f(z^1, \cdot)$ é definida no disco $\{|z^2| < R\}$ e pelo teorema de Cauchy, $F(z^1, z^2) = f(z^1, z^2)$. Também, por observação a função $F(z^1, z^2)$ é holomorfa em z^2 no disco $\{|z^2| < R\}$. Além disso, se $|w| = R$, $f(z^1, w)$ é holomorfa com respeito a z^1 em $\{|z^1| < R\}$. Isso é dizer que F é holomorfa no polidisco inteiro $\Delta(R) = U$. Ambas as duas funções F e f são definidas em $U \setminus \overline{V}$, que é um conjunto aberto e conexo e $F = f$ no subaberto $\{r < |z^1| < R\}$ então pela proposição anterior, $F = f$ em $U \setminus \overline{V}$. Logo,F é uma extensão holomorfa de f.

Uma aplicação canônica desse teorema é a afirmação de que singularidades sioladas são removíveis. Se $U \subseteq \mathbb{C}^n$ é aberto e $p \in U$. Seja f uma função holomorfa em $U \setminus \{p\}$. Então f extende a uma função holomorfa em U.

Agora nós viramos para o teorema de Weierstrass. Se $n = 1$, sejam $z_0 \in U \subseteq \mathbb{C}$ e f é uma função holomorfa em U tal que $f(z_0) = 0$. Então, existe um único inteiro positivo $k \geq 1$ e uma função holomorfa $g \in \mathcal{U})$ com $g(z_0) \neq 0$ tal que

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z).$$

Interpretamos o primeiro fator desse produto como um polinómio diferenciado e o segundo fator g um elemento invertível no ponto z_0. Queremos um resultado parecido em dimensões mais altas.

Supomos que $n \geq 2$. Escrevemos $z = (z', z_n)$, onde $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$. Supomos que $z^0 = 0 \in \mathbb{C}^n$ e que $f \in \mathcal{O}(U)$ com $f(0) = 0$. Também supomos que $f(0, z_n) \not\equiv 0$, que é dizer que f não é identicamente zero no eixo-z_n. Então, pelo caso de $n = 1$, temos $k \in \mathbb{N}$ tal que $f(0, z_n) = z_n^k g(z_n)$ para alguma função g holomorfa em uma variável com $g(0) \neq 0$.

Por continuidade de f no eixo-z_n, para $r > 0$ suficientemente pequeno, temos $|f(0, z_n)| \geq \delta > 0$ se $|z_n| = r$, e por continuidade em U, $|f(z', z_n)| \geq \delta/2$ se $|z_n| = r$ e se $\|z'\| < \varepsilon$ é suficientemente pequeno. Em particular, escolhemos $r > 0$ tal que $z_n = 0$ é o único zero de $z_n \mapsto f(0, z_n)$ no disco $\{|z_n| < r\}$. Então, pelo teorema de resíduo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} \ni k &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{1}{f(0,\xi)} \frac{\partial f}{\partial z_n}(0,\xi) d\xi, \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{1}{f(z',\xi)} \frac{\partial f}{\partial z_n}(z',\xi) d\xi
\end{aligned}$$

pela continuidade da expessão, que toma valores em $\mathbb{N}$. Logo, contando multiplicidade, para qualquer z' pequeno, a função $z_n \mapsto f(z', z_n)$ admite k zeros (não-ordenados) $b_1(z'), \ldots, b_k(z')$ dentro do disco $\{|z_n| < r\}$. Também, observamos que em $z' = 0$, $b_i(0) = 0$ pois $f(0, z_n) = z_n^k g(z_n)$. De novo, pelo teorema de resíduo,

$$\begin{aligned}
b_1(z') + \cdots + b_k(z') &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \xi \frac{1}{f(z',\xi)} \frac{\partial f}{\partial z_n}(z',\xi) d\xi, \\
&\vdots \qquad \vdots \\
b_1(z')^m + \cdots + b_k(z')^m &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \xi^m \frac{1}{f(z',\xi)} \frac{\partial f}{\partial z_n}(z',\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

As expressões a direita variam holomorficamente com z', porque quando $|\xi| = r$ a função $f(z', \xi)$ é holomorfa e não se anula. Consideramos a função

$$\begin{aligned}
g(z', z_n) &= (z_n - b_1(z'))(z_n - b_2(z')) \cdots (z_n - b_k(z')), \\
&= z_n^k - \left(\sum_{i=1}^{k} b_i(z') \right) z_n^{k-1} + \left(\sum_{i<j} b_i(z') b_j(z') \right) z_n^{k-2} + \cdots + (-1)^k b_1(z') \cdots b_k(z'), \\
&= z_n^k + a_1(z') z_n^{k-1} + \cdots + a_k(z').
\end{aligned}$$

Vemos que g é um polinômio em z_n cujos coeficientes são funções de z'. Veremos que são holomorfas em z'. Também observamos que para $|z_n| < r$ e $\|z'\| < \varepsilon$, $g(z', z_n) = 0$ se e somente se $f(z', z_n) = 0$. Os coeficientes de g pode ser reconhecidos como as funções simétricas elementares em k variáveis. . Definimos

$$\begin{aligned}
\sigma_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i, \\
\sigma_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) &= \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j, \\
&\vdots \\
\sigma_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) &= \sum_{i_1 < \cdots < i_m} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_m}.
\end{aligned}$$

Essas funções são *simétricas* no sentido que são invariantes pelo ação do grupo simétrico S_k em $\mathbb{C}[\lambda_1, \cdots, \lambda_k]$ permutando as variáveis. O ceoficiente de z_n^m no polinômio g é dado pela função $\sigma_{k-m}(b_1(z'), \ldots, b_k(z'))$.

Teorema 2.7. *(Newton) Os polinômios σ_m, para $1 \leq m \leq k$, podem ser dados como uma expressão algébrica em $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^i$, para $1 \leq i \leq m$.*

Deixamos esse resultado sem demonstração, mas podemos calcular as expressões explicitamente para valores baixos de m. Para $m = 1$, já temos $\sigma_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \sum_j \lambda_j$. Para $m = 2, 3$, nós temos

$$\begin{aligned}
\sigma_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) &= \frac{1}{2}\left((\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)^2 - (\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_k^2)\right), \\
\sigma_3(\lambda_1, \cdots, \lambda_k) &= \frac{1}{6}\left((\sum_i \lambda_i)^3 - 3(\sum_i \lambda_i^2)(\sum_j \lambda_j) + 2(\sum_i \lambda_i^3)\right).
\end{aligned}$$

Em particular, as expressões $\sigma_{k-m}(b_1(z'), \ldots, b_k(z'))$, e logo os coeficientes de g, são funções holomorfas de z'. Seja h a função $h(z', z_n) = f(z', z_n)/g(z', z_n)$. Para z' fixado, $\lim_{z_n \to b_i(z')} h(z', z_n) \neq 0$ pois f e g tem a mesma ordem de anulamento em $b_i(z')$. Logo, a singularidade de h em $z_n = b_i(z')$ é removível e $h(z', \cdot)$ é holomorfa em $\{|z_n| < r\}$. Também, a função h é holomorfa com respeito a z', porque para z_n fixo,

$$h(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{1}{\xi - z_n} \frac{f(z', \xi)}{g(z', \xi)} d\xi.$$

Observamos que o integrando a direita é holomorfo em z', então h é holomorfa e não nula para $\|z'\| < \varepsilon$ e $|z_n| < r$, e temos uma decomposição $f(z', z_n) = h(z', z_n)\, g(z', z_n)$.

Definição 2.8. Um **polinômio de Weierstrass** é uma função da forma

$$W(z', z_n) = z_n^k + a_1(z') z_n^{k-1} + \cdots + a_k(z')$$

onde as a_i são funções holomorfas e definidas em alguma vizinhança da origem em $\mathbb{C}^{n-1}$ tais que $a_i(0) = 0$.

A construção anterior demonstra o seguinte teorema.

Teorema 2.9. *(O teorema de preparação de Weierstrass) Seja $f \in \mathcal{O}(U)$ uma função holomorfa definida numa vizinhança da origem em $\mathbb{C}^n$, com $f(0) = 0$. Então se $f(0, z_n) \not\equiv 0$, possivelmente diminuindo a vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^n$, existe uma decomposição $f = h\, W$, onde*

- *W é um polinômio de Weierstrass,*
- *h é holomorfa e $h(0) \neq 0$.*

Além disso, W e h são unicamente determinados.

Falaremos de germes de funções holomorfas em detalhe mais para frente, mas para uma questão de notação fazemos algumas definições. Denote por $\mathcal{O}_n$ o conjunto de germes de funções holomorfas em alguma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^n$. Então. Então um polinômio de Weierstrass é um elemento mônico do anél $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, cujos coeficientes anulam-se em $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Teorema 2.10. *(O teorema de divisão de Weierstrass) Seja $g = g(z', z_n) \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ um polinômio de Weierstrass de grau k. Então, para todo $f \in \mathcal{O}_n$, podemos escrever*

$$f = g.h + r,$$

onde $h \in \mathcal{O}_n$ e $r \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ é um polinômio com $\operatorname{grau}(r) < \operatorname{grau}(g)$. *Além disso, h e r são unicamente determinados.*

Demonstração: Escolha $0 < \varepsilon, \delta \ll 1$ tal que $|g(z', u)| \geq \sigma > 0$ se $\|z'\|| < \varepsilon$ e $|u| = \delta$. Seja h a função holomorfa

$$h(z', z_n) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\delta} \frac{f(z', u)}{g(z', u)} \frac{1}{u - z_n} du.$$

Então,

$$\begin{aligned} r = f - gh \quad &= \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\delta} \frac{f(z', u)}{u - z_n} du - \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\delta} \frac{g(z', z_n)}{u - z_n} \frac{f(z', u)}{g(z', u)} du, \\ &= \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\delta} \frac{f(z', u)}{g(z', u)} \left(\frac{g(z', u) - g(z', z_n)}{u - z_n} \right) du \end{aligned}$$

No termo a direita, a divisão é de polinômios em z_n e vemos que $P(z', u, z_n) = (g(z', u) - g(z', z_n))/(u - z_n)$ é um polinômio de grau estritamente menor que k. Isso é preservado pela integração da variável u, então temos $r \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ é um polinômio de grau menor que k.

2.4 Estrutura algébrica do anel de germes de funções holomorfas

Seja R um anel comutativo com identidade 1. Lembramos que R é um **domínio** se para $u, v \in R \setminus \{0\}$, $uv \neq 0$. Um elemento $u \in R$ é uma **unidade** se existe $v \in R$ tal que $uv = 1$. u é **irredutível** se $u = vw$ implica que v ou w é uma unidade.

R é um **domínio de fatorização única** se para todo $u \in R$, existem elementos irredutíveis $u_1, \ldots, u_l \in R$ com $u = u_1 \cdots u_l$ e que os elementos u_i são unicamente determinados ao menos uma permutação deles e multiplicação por unidades. Se A é um domínio de fatorização única, então o anel $A[t]$ de polinômios com valores em A é um domínio de fatorização única.

Se A é um domínio de fatorização única e $u, v \in A[t]$ são relativamente coprimos, então existem $\alpha, \beta \in A[t]$ e $\gamma \in A \setminus \{0\}$ tais que

$$\alpha u + \beta v = \gamma.$$

O elemento γ é chamado o **resultante** dos polinômios u e v. Mais precisamente, se $u = \sum_i a_i t^i$ e $v = \sum_j b_j t^j$, podemos construir uma matriz R usando os elementos $a_i, b_j \in A$ tal que $\gamma = \det(R)$ satisfaz $\alpha u + \beta v = \gamma$ e tal que u e v são coprimos se e somente se $\gamma \neq 0$.

O anel que consideramos é $A = \mathcal{O}_{n,z}$ o anel de funções holomorfas, definidas em alguma vizinhança de $z \in \mathbb{C}^n$. Escreveremos $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_{n,0}$. A primeira propriedade que queremos demonstrar é que $\mathcal{O}_n$ é um domínio de fatorização única.

Propriedades Básicas:

1. $\mathcal{O}_n$ é um domínio.
2. Se $f \in \mathcal{O}_n$ tem $f(0) \neq 0$, então $1/f$ é holomorfa em alguma vizinhança de 0. Isso implica que $\mathfrak{m}_0 = \{f \in \mathcal{O}_n \mid f(0) = 0\}$ é o único ideal maximal em $\mathcal{O}_n$, que é dizer que $\mathcal{O}_n$ é um **anel local**.

Lema 2.11. *Sejam $W, F \in \mathcal{O}_{n-1}[w]$ tal que W seja um polinômio de Weierstrass. Então se $F = GW$, para $G \in \mathcal{O}_n$, então $G \in \mathcal{O}_{n-1}[w]$.*

Demonstração: W é mônico, então temos divisão Euclideano no anel $\mathcal{O}_{n-1}[w]$ e $F = G'W + H$, para G' e H polinômios. As funções que aparecem no teorema de divisão de Weierstrass são unicamente determinadas, então temos $H = 0$ e $G = G' \in \mathcal{O}_{n-1}[w]$.

Lema 2.12. *Se $F, G, W \in \mathcal{O}_{n-1}[w]$, onde W é um polinômio de Weierstrass, satisfazem $W = FG$, então ao menos multiplicação por elementos invertíveis de $\mathcal{O}_{n-1}$, F e G também são polinômios de Weierstrass.*

Demonstração: Nós temos

$$\begin{aligned} w^p + a_{p-1}(z)w^{p-1} + \cdots + a_0(z) \\ = (b_k(z)w^k + \cdots + b_0(z))(c_r(z)w^r + \cdots + c(z)). \end{aligned}$$

O coeficiente dominante satisfaz $1 \equiv b_k(z)c_r(z)$, então os elementos invertíveis b_k e c_r podem ser absorvidos nos outros coeficientes e podemos supor que $b_k \equiv c_r \equiv 1$. Em $z = 0$,

$$w^p = (w^k + b_{k-1}(0)w^{k-1} + \cdots + b_0(0))(w^r + c_{r-1}(0)w^{r-1} + \cdots + c_0(0)).$$

Para os dois lados terem polinômios do mesmo grau e com a mesma ordem de anulamento em 0, e necessário que $c_i(0) = b_j(0) = 0$ e que F, G sejam polinômios de Weierstrass.

Corolário 2.13. *Se $f = W$ é um polinômio de Weierstrass é irredutível como um elemento de $\mathcal{O}_n$, então f é irredutível como um elemento de $\mathcal{O}_{n-1}[w]$.*

Demontração: Se $f = gh$ é redutível como um polinômio, então pelo lema anterior g e h são polinômios de Weierstrass. Em particular, $g(0) = h(0) = 0$, então g e h não são unidades em $\mathcal{O}_n$ e f é redutível em $\mathcal{O}_n$

Teorema 2.14. *$\mathcal{O}_n$ é um domínio de fatorização única.*

Exercício 2.1. Seja R um anel comutativo com identidade. As condições seguintes são equivalentes:

1. R é um domínio de fatorização única.
2. R satisfaz as duas condições:

(a) Se $f \in R$ é irredutível e $f|gh$ então $f|g$ ou $f|h$.

(b) Se $f_1, f_2, f_3, \ldots$ é uma sequência em R tal que $f_{j+1}|f_j$ para todo j, então existe $J \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq J$, $f_j = h_j f_{j+1}$ para $h_j \in R$ invertível.

Demonstração do Teorema 2.14: Mostraremos que $R = \mathcal{O}_n$ satisfaz as duas condições do exercício. Por indução observamos que $\mathcal{O}_0 \cong \mathbb{C}$ é um corpo e logo tem fatorização única.

Supomos que $f \in \mathcal{O}_n$ é irredutível e $f|gh$. Pelo teorema de preparação, posso supor que $f = W$ é um polinômio de Weierstrass de grau k. Pelo teorema de divisão, $g = af + g'$ e $h = bf + h'$ para $g', h' \in \mathcal{O}_{n-1}[w]$ polinômios de grau menor que k. Então $f|gh$ implica que $f|g'h'$, ou que $g'h' = Gf$. Pelo Lema 2.11 $G \in \mathcal{O}_{n-1}[w]$. Por indução $\mathcal{O}_{n-1}$ é um domínio de fatorização, e logo $\mathcal{O}_{n-1}[w]$ também o é, então aplicando condição (a) para esse anel, concluimos que $f|g'$ ou $f|h'$, como desejado.

Supomos que $f_1, f_2, f_3, \ldots$ é uma sequência em $\mathcal{O}_n$ tal que $f_{j+1}|f_j$ para cada j. Suponho também que f_1 é normalizada na direição $w = z_n$, e observo que isso implica que f_2, f_3 etc. também devem ser. Logo posso supor que cada f_k é um polinômio de Weierstrass de grau n_k. Temos $0 \leq n_{k+1} \leq n_k$ então a sequência de graus eventualmente termina. Suponha que W e W' são polinômios de Weierstrass do mesmo grau e $W|W'$ em $\mathcal{O}_n$. Isso é

$$W'(z, w) = h(z, w)W(z, w)$$

para alguma função h. Em $z = 0$, $w^n = h(0, w)w^n$, e logo $h(0, w) \equiv 1$ e h é invertível como um germe de uma função em 0. Em particular, $h \equiv 1$, pela unicidade no teorema de preparação de Weierstrass. Logo, nós temos $f_j = h_j f_{j+1}$ para $h_j \in \mathcal{O}_n$ como desejado e comcluimos que $\mathcal{O}_n$ é um domínio de fatorização única.

Agora, seja $f, g \in \mathcal{O}(U)$ para $U \subseteq \mathbb{C}^n$ um subconjunto aberto. Para todo $z \in U$, denote por $f_z \in \mathcal{O}_{n,z}$ o germe determinado por f no ponto z. Estudaremos o comportamento desse germe quando z varia.

Proposição 2.15. *Seja U uma vizinhança aberto da origem $0 \in \mathbb{C}^n$. Sejam $f, g \in \mathcal{O}(U)$ tais que $f_0, g_0 \in \mathcal{O}_{n,0}$ sejam relativamente coprimos. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo z com $\|z\| < \varepsilon$, $f_z, g_z \in \mathcal{O}_{n,z}$ sejam coprimos.*

Demonstração: Escolhe coordenadas lineares tal que f e g sejam normalizadas na direção z_n. Assim, podemos supor que $f, g \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ são polinômios de Weierstrass. Também, vimos que coprimos em $\mathcal{O}_n$ implica que são coprimos em $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Logo, existem polinômios $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ e $\gamma \in \mathcal{O}_{n-1}$ tais que $\alpha f + \beta g = \gamma$. Essa equação vale em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^n$.

Por F ser normalizada na direção z_n, $f(0, z_n) \not\equiv 0$, então para $\|z'\| < \varepsilon$ fixado, $f(z', z_n) \not\equiv 0$. Então, seja $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$ e suponha que $h|f$, $h|g$ em $\mathcal{O}_{n,z^0}$, onde $h(z^0) = 0$. Isso é, $f = ah$ e $g = bh$, e $h(z^{0\prime}, z_n^0) = 0$ mas $h(z^{0\prime}, z_n) \not\equiv 0$.

Podemos supor que h é um polinômio de Weierstrass no ponto z^0. Então, temos $(\alpha a + \beta b)h = \gamma \in \mathcal{O}_{n-1}$ e pelo Lema 2.11 $\alpha a + \beta b \in \mathcal{O}_{n-1,z^{0\prime}}[z_n]$ também é um polinômio. Comparando os graus dos polinômios, $\deg(h) = 0$ e $h \in \mathcal{O}_{n-1,z^{0\prime}}$. Mas

$$h(z^0) = h(z_1^0, \ldots, z_{n-1}^0, z_n^0) = h(z_1^0, \ldots, z_{n-1}^0, z_n) = 0,$$

que é uma contradição.

Teorema 2.16. *(Nullstellensatz Fraco) Se $f \in \mathcal{O}_n$ é irredutível e $h \equiv 0$ no germe do conjunto $\{(z, w) \mid f(z, w) = 0\}$, então $f|h$ em $\mathcal{O}_n$.*

Demonstração: Supomos que f é um polinômio de Weierstrass em w de grau k. Se f é irredutível em $\mathcal{O}_n$, então deve também ser no anel $\mathcal{O}_{n-1}[w]$. Em particular, f é relativamente coprimo com qualquer outro polinômio de grau menor que k. Então, f e $\partial f/\partial w$ são coprimos e existem $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_{n-1}[w]$ e $0 \not\equiv \gamma \in \mathcal{O}_{n-1}$ tais que

$$\alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial w} = \gamma.$$

Dado $z_0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ sufientemente pequeno, a função polinomial $w \mapsto f(z_0, w)$ admite uma raíz múltipla se e somente se $f(z_0, w) = 0 = \partial f/\partial w(z_0, w)$, o que implica que $\gamma(z_0) = 0$. Isso é dizer que se $\gamma(z_0) \neq 0$, $w \mapsto f(z_0, w)$ admite k raízes distintas. Então dado $h \in \mathcal{O}_n$ tal que $h = 0$ em $\{f = 0\}$. Pelo teorema de divisão de Weierstrass, $h = qf + r$ para $r \in \mathcal{O}_{n-1}[w]$ um polinômio de grau menor de k. Por hipótese, r se anula no conjunto $\{f = 0\}$, então para z_0 com $\gamma(z_0) \neq 0$, o conjunto $\{w \in \mathbb{C} \mid f(z_0, w) = 0\}$ é de k pontos distintos em que o polinômio r se anula. Logo, $r(z_0, w) \equiv 0$ se $\gamma(z_0) \neq 0$ e, por continuidade, $r \equiv 0$ e $h = qf$.

3 Variedades Complexas

3.1 Definições e Exemplos

Definição 3.1. Uma **variedade complexa** M de $\dim_{\mathbb{C}} M = n$ é uma variedade diferenciável de $\dim_{\mathbb{R}} = 2n$ com um atlas $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ tal que

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta).$$

seja holomorfa para todo $\alpha, \beta \in A$.

Para $U \subseteq M$ um subconjunto aberto, a função $f : U \to \mathbb{C}$ é **holomorfa** se $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \to \mathbb{C}$ é holomorfa para todo α.

Uma aplicação $F : M \to N$ suave entre variedades complexas é **holomorfa** se $\psi_j \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$ é holomorfa onde é definida, como uma aplicação entre abertos em $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$.

Os primeiros exemplos são quase triviais.

1. $M = \mathbb{C}^n$, com um atlas dado pela aplicação de identidade definida no espaço inteiro. Um pouco mais geral, é considerar um subconjunto aberto U como uma variedade complexa.

2. Uma variedade complexa de dimensão um é chamada uma superfície de Riemann.

3. Denotaremos por $\mathbb{P}^n = \mathbb{CP}^n$ o **espaço projetivo complexo**, que consiste de todos os subespaços vetoriais de dimensão um em $\mathbb{C}^n$.

Para $Z = (z^0, z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, denotamos por $[Z] = [z^0 : z^1 : \cdots : z^n]$ a linha l gerada pelo vetor Z. Observamos que, para $\lambda \in \mathbb{C}^*$, a mesma linha é gerada pelo vetor λZ, então

$$[z^0 : \cdots : z^n] = [\lambda z^0 : \cdots : \lambda z^n]$$

Chamamos a notação $l = [z^0 : \cdots : z^n]$ as **coordenadas homogênas** do ponto $l \in \mathbb{P}^n$ e reparamos que não são cartas de coordenadas.

A topologia que consideramos em $\mathbb{P}^n$ é a topologia quociente, para a aplicação sobrejetiva $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$. Pode ser visto relativamente rapidamente que a topologia é de Hausdorff, segundo-contável e compacto. Cartas de coordenadas no espaço projetivo complexo podem ser dadas pela maneira seguinte. Para cada $j = 0, \dots, n$, seja

$$U_j = \{l \in \mathbb{P}^n \mid l \text{ é gerado por } v = (v^0, v^1, \dots, v^n) \text{ em que } v^j \neq 0\}.$$

Observamos que essa definição independe do gerador de l que escolhemos. Se v' é um outro gerador, temos $v' = \lambda v$, para $\lambda \in \mathbb{C}^*$, cujo j-componente é $\lambda v^j \neq 0$. Em particular, temos

$$l = [v^0 : \vdots : v^j : \cdots : v^n] = \left[\frac{v^0}{v^j} : \cdots : q \cdots : \frac{v^n}{v^j}\right]$$

para $\lambda = 1/v^j \neq 0$. Dentro de $\mathbb{C}^{n+1}$, podemos considerar o hiperplano afim $\{z^j = 1\}$ e U_j é o subconjunto de linhas em $\mathbb{C}^{n+1}$ que intersecta-se com $\{z^j = 1\}$ em um único ponto.

Definimos $\varphi_j : U_j \to \mathbb{C}^n$ por

$$\varphi_j\left([z^0 : \cdots : z^n]\right) = \left(\frac{z^0}{z^j}, \ldots, \frac{z^{j-1}}{z^j}, \frac{z^{j+1}}{z^j}, \ldots, \frac{z^n}{z^j}\right)$$

e afirmo qe $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ é holomorfo. Nós temos $U_i \cap U_j \in [z^0 : \cdots : z^i : \cdots : z^j : \cdots : z^n]$ se é somente se $z^i \neq 0 \neq z^j$ e φ^{-1} é dado por

$$\varphi_j^{-1}(z^1, \ldots, z^n) = [z^1 : \cdots : z^j : 1 : z^{j+1} : \cdots : z^n].$$

Se $i < j$, $\varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j) = \{(z^1, \ldots, z^n) \mid z^{i+1} \neq 0\}$ e

$$\begin{aligned}
\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}((z^1, \cdots, z^n)) &= \varphi_i\left([z^1 : \cdots : z^i : z^{i+1} : \cdots z^j : 1 : z^{j+1} : \cdots : z^n]\right), \\
&= \varphi_i\left(\left[\frac{z^1}{z^{i+1}} : \cdots : 1 : \cdots : \frac{z^j}{z^{i+1}} : \frac{1}{z^{i+1}} : \cdots : \frac{z^n}{z^{i+1}}\right]\right), \\
&= \left(\frac{z^1}{z^{i+1}}, \cdots, \frac{z^i}{z^{i+1}}, \frac{z^{i+2}}{z^{i+1}}, \cdots, \frac{1}{z^{i+1}}, \cdots, \frac{z^n}{z^{i+1}}\right)
\end{aligned}$$

e $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ é um biholomorfismo (um difeomorfismo holomorfo). Para cada $j = 0, \ldots, n$, temos cópias de $\mathbb{P}^{n-1} \subseteq \mathbb{P}^n$,

$$X_j = \{[z^0 : \cdots : z^n] \mid z^j = 0\} \cong \mathbb{P}^{n-1},$$

que é o conjunto de linhas em $\mathbb{C}^{n+1}$ contidas no hiperplano $\{z^j = 0\} \cong \mathbb{C}^n$. Além disso, para qualquer aplicação linear não-nula $\alpha : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$, o núcleo $\ker(\alpha) \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ é um subespaço linear de dimensão $\dim_{\mathbb{C}} = n$ e $\mathbb{P}^{n-1} \cong \mathbb{P}(\ker(\alpha)) \subseteq \mathbb{P}^n$.

Para $n = 1$, vemos que $\mathbb{P}^1$ é difeomorfo a $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Em $\mathbb{P}^2$, com coordenadas homogêneas $[z^0 : z^1 : z^2]$, os subconjuntos $X_j = \{z^j = 0\} \cong \mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^2$ intersectam-se dois-por-dois em um ponto único. Por exemplo $X_0 \cap X_1 = \{[0 : 0 : z^2]\} = \{[0 : 0 : 1]\}$. Mais geralmente, se $\alpha, \beta \in (\mathbb{C}^2)^* \setminus \{0\}$ são linearmente independente, as linhas $\mathbb{P}(\ker(\alpha))$ e $\mathbb{P}(\ker(\beta))$ intersectam-se num ponto.

O próximo exemplo é de um toro complexo. Seja $\Lambda \subseteq \mathbb{C}^n$ um subgrupo (aditivo) discreto. Então $\Lambda \cong \mathbb{Z}^k$ para algum posto k e $M = \mathbb{C}^n/\Lambda$ admite a estrutura de uma variedade complexa. M é Hausdorff pois Λ é discreto. Se $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2n}$, então $\mathbb{C}^n/\Lambda$ é compacto, e será chamado um toro complexo. Observamos que para Λ e Λ' grupos do mesmo posto k, então $\mathbb{C}^n/\Lambda$ e $\mathbb{C}^n/\Lambda'$ podem ser difeomorfos mas *não* biholomorfos.

Para $n = 1$ e $\Lambda = \langle 1, \tau \rangle \subseteq \mathbb{C}$ gerado pelos elementos 1 e τ, onde $\mathrm{Re}(\tau) > 0$, o toro $\mathbb{C}/\Lambda = \Sigma_\tau$ é difeomorfo a $S^1 \times S^1$, mas Σ_τ e $\Sigma_{\tau'}$ são biholomorfos apenas quando os valores τ e τ' são pertencentes na mesma órbita de uma certa ação de um grupo.

Considere a ação de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ por $k \cdot (z^1, z^2) = 2^k(z^1, z^2)$. Então $M = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{Z}$ admite a estrutura de uma variedade complexa de dimensão 2, e é difeomorfa a $S^1 \times S^3$.

3.2 O espaço tangente real e complexo

Seja M uma variedade diferenciável de $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n$ e seja $p \in M$. Então

$$T_pM = \{X : \mathcal{C}_p^\infty \to \mathbb{R} \text{ uma derivação}\}$$

é um espaço vetorial real de dimensão $2n$. Fazemos o produto tensorial e consideramos $T_pM \otimes \mathbb{C}$ o conjunto de derivações de $\mathcal{C}_p^\infty$ com valores em $\mathbb{C}$. Isso é um espaço vetorial *complexo*, de dimensão complexa $2n$.

Sejam M uma variedade complexa e $p \in M$. Sejam $z = (z^1, \ldots, z^n)$ coordenadas complexas numa vizinhança de p. Então se $z^j = x^j + \sqrt{-1}y^j$, então $\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial y^j} \in T_pM$. Definimos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^j} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^j}\right), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^j}\right), \end{aligned}$$

ambos elementos de $T_pM \otimes \mathbb{C}$, derivações complexas. Definimos $T_p^{1,0} \subseteq T_pM \otimes \mathbb{C}$ o subespaço complexo $\mathrm{Vect}\{\partial/\partial z^j\}$ gerado pelos vetores $\{\partial/\partial z^j\}$. $T_p^{1,0}$ se chama o **espaço tangente holomorfo** em p. Também, $T_p^{0,1} \subseteq T_pM \otimes \mathbb{C}$ é por definição o espaço gerado pelos vetores $\{\partial/\partial \bar{z}^j\}$ e é chamado o **espaço tangente antiholomorfo**. Notamos,

- ambos são espaços vetoriais complexos de dimensão n;
- $T_pM \otimes \mathbb{C} = T_p^{1,0} \oplus T_p^{0,1}$;
- a definição de $T_p^{1,0}$ é independente do sistema de coordenadas.

Em particular, sejam $\varphi = (z^1, \ldots, z^n)$ e $\psi = w^1, \ldots, w^n)$ cartas de coordenadas tais que $\varphi \circ \psi^{-1}$ seja holomorfa. Isso quer dizer que

$$\frac{\partial w^i}{\partial \bar{z}^j} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \bar{w}^i}{\partial z^j} = 0,$$

para todo i e j. Então,

$$\frac{\partial}{\partial z^j} = \sum_i \frac{\partial w^i}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial w^i} + \sum_i \frac{\partial \bar{w}^i}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial \bar{w}^i} = \sum_i \frac{\partial w^i}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial w^i}$$

e logo $\mathrm{Vect}\{\frac{\partial}{\partial z^j}\} = \mathrm{Vect}\{\frac{\partial}{\partial w^i}\}$. Na mesma maneira, podemos definir um tensor $J \in \Gamma(T^*M \otimes TM) = \Gamma(\mathrm{End}(TM))$, um campo de endormorfismos do espaço tangente real, por

$$\begin{aligned} J\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \frac{\partial}{\partial y^j}, \\ J\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \text{para todo } j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Notamos que J é definido em termos das coordenadas, mas é independente delas. Temos, em cada ponto $p \in M$, $J_p : T_pM \to T_pM$ satisfazendo $J_p^2 = -\mathrm{Id}$, então os auto-valores de J_p são $\pm\sqrt{-1}$. J extende-se à complexificação $TM \otimes \mathbb{C}$ por linearidade complexa, e observamos

$$J\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right) = \frac{1}{2}J\left(\frac{\partial}{\partial x^j} - i\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y^j} + i\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = i\frac{\partial}{\partial z^j},$$

então $T_p^{1,0}$ pode ser visto como o $+i$-auto-espaço de J_p e $T_p^{0,1}$ o $-i$-auto-espaço de J_p. Isso em particular mostra que a definição J é independente do sistema de coordenadas. Definimos a **conjugação** de vetores complexos. Se $TM \otimes \mathbb{C} \ni X = \sum_i a_i v_i$ para v_i uma base de vetores *reais* e $a_i \in \mathbb{C}$, definimos $\overline{X} = \sum_i \bar{a}_i v_i$. Em particular, isso nos dá

$$\overline{\frac{\partial}{\partial z^j}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}, \quad \text{e} \quad \overline{T_p^{1,0}} = T_p^{0,1}.$$

Seja $f : U \to V$ uma aplicação suave, para U e V conjuntos abertos em $\mathbb{C}^n$. Para $z^j = x^j + iy^j \in U$ e $w^k = u^k + iv^k \in V$, o Jacobiano *real* de f é dado pela matriz

$$\mathrm{Jac}_{\mathbb{R}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^k}{\partial x^j} & \frac{\partial u^k}{\partial y^j} \\ \frac{\partial v^k}{\partial x^j} & \frac{\partial v^k}{\partial y^j} \end{pmatrix}.$$

Também, para a outra base $\{\partial/\partial z^j, \partial/\partial \bar{z}^j\}$ de $(T_p\mathbb{R}^{2n}) \otimes \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} f_*\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right) &= \sum_k \frac{\partial w^k}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial w^k} + \sum_k \frac{\partial \bar{w}^k}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial \bar{w}^k}, \\ f_*\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) &= \sum_k \frac{\partial w^k}{\partial \bar{z}^j}\frac{\partial}{\partial w^k} + \sum_k \frac{\partial \bar{w}^k}{\partial \bar{z}^j}\frac{\partial}{\partial \bar{w}^k}. \end{aligned}$$

Se o mapa f é holomorfo, vários termos nessas somas se anulam e temos

$$\mathrm{Jac}_{\mathbb{C}} f = \begin{pmatrix} \mathcal{J}(f) & 0 \\ 0 & \overline{\mathcal{J}(f)} \end{pmatrix}$$

onde $\mathcal{J}(f)$ é a matriz Jacobiana complexa $(\frac{\partial w^k}{\partial z^j})$. Em particular, $\det(\mathrm{Jac}_{\mathbb{R}} f) = \det(\mathrm{Jac}_{\mathbb{C}} f) = |\det(\mathcal{J} f)|^2 \geq 0$.

Seja M uma variedade complexa, com atlas $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$. Então para cartas $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^{2n} \sim \mathbb{C}^n$, $\det(\mathrm{Jac}_{\mathbb{R}}(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})) = |\det(\mathcal{J}(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}))|^2 > 0$.

Corolário 3.2. *Toda variedade complexa é orientável e o atlas holomorfo $\mathscr{A}$ fornece uma orientação canônica.*

3.3 O teorema de função implícita e subvariedades complexas

Agora consideramos os teoremas de função implícita e inversa. Sejam $U, V \subseteq \mathbb{C}^n$ subconjuntos abertos e $f = (f^1, \ldots, f^n)U \to V$ uma aplicação holomorfa com $\mathcal{J}(f) = (\partial f^i/\partial z^j)$ não singular no ponto $p \in U$. Então, existe uma vizinhança $U' \subseteq U$ de p tal que $V' = f(U') \subseteq V$ seja aberto e tal que exista $f^{-1} : V' \to U'$ uma inversa holomorfa de f.

Para demonstrar isso, podemos aplicar o teorema de função inversa para funções suaves para obter f^{-1}. O fato de f^{-1} ser holomorfa segue pela regra da cadeia.

Indo para o teorema de função implícita. Seja $U \subseteq \mathbb{C}^n$ uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^n$ e $f = (f^1, \ldots, f^k) : U \to \mathbb{C}^k$ uma aplicação holomorfa com $f(0) = 0$, onde $k \leq n$. Supomos que o $(k \times n)$ Jacobiano complexo $\mathcal{J}f = (\frac{\partial f^i}{\partial z^j})$ tem $(k \times k)$-bloco $(\frac{\partial f^i}{\partial z^j})_{1 \leq i,j \leq k}$ não-singular no ponto p. Então, existem funções $w^1, \ldots, w^k$, holomorfas numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^{n-k}$, tais que

$$f^1(z) = \cdots = f^k(z) = 0 \quad \text{se e somente se} \quad z^j = w^j(z^{k+1}, \ldots, z^n)$$

para todo $j = 1, \ldots, k$. Isso também segue do resultado para funções suaves, junto com a regra da cadeia.

Definição 3.3. Seja M uma variedade complexa de dimensão n. Um subconjunto $S \subseteq M$ é uma **subvariedade complexa** de dimensão complexa k se para todo $p \in S$, existe uma vizinhança U de p e funções $f^1, \ldots, f^{n-k} \in \mathcal{O}(U)$ tal que $\det \mathcal{J}(f) \neq 0$ em U e tal que

$$S \cap U = \{q \in U \mid f^j(q) = 0 \quad \text{para todo } j\}.$$

Uma função holomorfa $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ é **homogênea** de grau d se $f(\lambda z) = \lambda^d f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ e todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Lema 3.4. *Se f é homogênea de grau d, então para todo $z \in \mathbb{C}^{n+1}$,*

$$d\, f(z^0, z^1, \ldots, z^n) = \sum_{j=0}^{n} z^j \frac{\partial f}{\partial z^j}.$$

Demonstração: Calculo $\frac{d}{d\lambda}\big|_{\lambda=1}$ dos dois lados da equação

$$\lambda^d f(z^0, \ldots, z^n) = f(\lambda z^0, \ldots, \lambda z^n).$$

Usaremos esse resultado para estudar subvariedades de $\mathbb{P}^n$. Seja $F(z^0, \ldots, z^n)$ um polinômio homogêneo de grau d. Então, F não define uma função em $\mathbb{P}^n$, mas para $\xi = [Z] \in \mathbb{P}^n$, podemos dizer se $F(\xi)$ se anula ou não pois se $\lambda \neq 0$, $F(\lambda Z) = \lambda^d F(Z)$ e ou ambos valem zero, ou nenhum dos dois vale zero. Denotamos por

$$Z(F) = \{[Z] \in \mathbb{P}^n \mid F(Z) = 0\}.$$

Proposição 3.5. *Seja F um polinômio homogêno de grau d. Suponha que $Z = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$ é a única solução do sistema*

$$\begin{aligned} F(Z) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z^0}(Z) &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial F}{\partial z^n}(Z) &= 0. \end{aligned}$$

Então $Z(F) \subseteq \mathbb{P}^n$ é uma subvariedade complexa do espaço projetivo.

Demonstração: Seja $\xi = [z^0 : \cdots : z^n] \in \mathbb{P}^n$ tal que $F(z^0, \ldots, z^n) = 0$. Uma das coordenadas z^j é diferente de 0. Suponha que $z^0 \neq 0$, ou que $\xi \in U_0$.

Temos $F(Z) = 0$, então uma das outras equações da lista não vale. Afirmo que $\frac{\partial F}{\partial z^j}(Z) \neq 0$, para algum $j \geq 1$. Se fosse $j = 0$, com $\frac{\partial F}{\partial z^0}(Z) \neq 0$, então

$$0 = dF(Z) = z^0 \frac{\partial F}{\partial z^0}(Z) + \sum_{j=1}^{n} z^j \frac{\partial F}{\partial z^j}(Z),$$

e logo $z^j \frac{\partial F}{\partial z^j}(Z) \neq 0$ para algum j. Consideramos a carta $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{C}^n$ dada pela equação

$$\varphi_0^{-1}(w^1, \ldots, w^n) = [1 : w^1 : \cdots : w^n].$$

Defino o polinômio (não-homogêneo) em $\mathbb{C}^n$, $f(w) = F(1, w)$, e temos $\xi \in Z(F) \cap U_0$ se e somente se $\varphi_0(\xi) = w \in Z(f) = \{x \mid f(x) = 0\} \subseteq \mathbb{C}^n$. Além disso, $\frac{\partial f}{\partial w^j}(w) = \frac{\partial F}{\partial z^j}(1, w) \neq 0$. Logo, pelo teorema da função implícita $Z(f) \subseteq \mathbb{C}^n$ é uma subvariedade complexa e logo $Z(F) \subseteq \mathbb{P}^n$ é uma subvariedade complexa.

Exemplos:

$$Z_1 = \{[x : y : z] \mid xz - y^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$$

é uma subvariedade complexa, e é a imagem do mergulho $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}$ definido por $[s : t] \mapsto [s^2 : st : t^2]$. Também temos a curva algébrica

$$Z_2 = \{[x : y : z] \mid y^2 z = x(x - z)(z - 2z)\} \subseteq \mathbb{P}^2.$$

Z_2 é a imagem de um mergulho de um toro $\mathbb{C}/\Lambda$ em $\mathbb{P}^2$ utilizando a $\mathcal{P}$-função de Weierstrass.

3.4 Formas Diferenciais, a Derivada Exterior e Coholomologia

Seja M uma variedade diferenciável. Denotamos por $\mathscr{E}^k(M, \mathbb{R})$ o conjunto de k-formas suaves em M, com valores em $\mathbb{R}$. De maneira parecida, seja $\mathscr{E}^k(M) = \mathscr{E}^k(M, \mathbb{C})$ o espaço de k-formas com valores complexos. A derivada exterior

$$d : \mathscr{E}^k(M) \longrightarrow \mathscr{E}^{k+1}(M)$$

é definida localmente por, para coordenadas locais (x^i),

$$d\left(\sum_I a_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right) = \sum_I da_I \wedge dx^I = \sum_I \sum_j \frac{\partial a_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Essa definição independe do sistema de coordenadas que utilizamos e define um operador em formas globalmente definidas. A derivada exterior também admite uma definição invariante, em termos do colchete de Lie em campos vetoriais. Para $\alpha \in \mathscr{E}^k(M)$ e $X_0, X_1, \ldots, X_k \in \Gamma(TM)$,

$$(d\alpha)(X_0, X_1, \ldots, X_k) = \\ \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i \left(\alpha(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_k)\right) + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \alpha\left([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_k\right).$$

Uma aplicação suave $f : M \to N$ entre variedades diferenciáveis induz um homomorfismo de *pull-back* de formas $f^* : \mathscr{E}^k(N) \to \mathscr{E}^k(M)$ tal que $f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha)$, para todo $\alpha \in \mathscr{E}^{k-1}(N)$. Também, vemos que d satisfaz $d^2 = 0$, como operadores no complexo

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{E}^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \mathscr{E}^k(M) \xrightarrow{d} \mathscr{E}^{k+1}(M) \longrightarrow \cdots$$

e logo temos $\mathrm{Im}(d) \subseteq \ker d$. Em particular, denotamos por $Z^k(M) = \ker(d) = \{\alpha \in \mathscr{E}^k(M) \mid d\alpha = 0\}$ o núcleo da derivada exterior em formas de grau k.

Definição 3.6. O k-éssimo grupo de cohomologia de De Rham (complexo) de M é o quociente

$$H^k_{dR}(M) = \frac{Z^k(M)}{d\mathscr{E}^{k-1}(M)}.$$

Isso é dizer, $H^k_{dR}(M)$ é um espaço vetorial complexo, e vemos rapidamente que é um invariante de difeomorfismo da variedade M.

Agora consideramos uma variedade complexa M, e seja $p \in M$. O espaço tangente complexo em p decompõe-se em uma soma direta $T_pM\otimes = T_p^{1,0} \oplus T_p^{0,1}$ de auto-espaços de J_p. O espaço cotangente tem complexifcação

$$T_p^*M \otimes \mathbb{C} = \Lambda^1_{\mathbb{C}}M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_pM, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_pM \otimes \mathbb{C}, \mathbb{C}),$$

e admite uma decomposição em soma direta $\Lambda^1_{\mathbb{C}}M = \Lambda_p^{1,0} \oplus \Lambda_p^{0,1}$ de covetores complexos em p de *tipo* $(1,0)$ e $(0,1)$ respeitivamente. Temos $\alpha \in \Lambda_p^{1,0}$ se e somente se $\alpha : T_pM \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisfaz $\alpha|_{T_p^{0,1}} \equiv 0$. Também, $\beta \in \Lambda_p^{0,1}$ se e somente se $\beta(X) = 0$ para todo $X \in T_p^{1,0}$. Em coordenadas, os vetores $\partial/\partial\bar{z}^j$ geram $T_p^{0,1}$, então para $dz^k = dx^k + idy^k$, temos $dz^k(\partial/\partial\bar{z}^j) = 0$ para todo j, então $dz^k \in \Lambda_p^{1,0}$ e $d\bar{z}^k \in \Lambda_p^{0,1}$. Por final, observamos que

$$dx^j = \frac{1}{2}(dz^j + d\bar{z}^j), \qquad dy^j = \frac{1}{2i}(dz^j - d\bar{z}^j).$$

Uma k-covetor em um ponto é dado por

$$\alpha = \sum_{IJ} a_{IJ} dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l} \wedge dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_{k-l}}.$$

Por causa da equação acima, α pode ser escrita como uma combinação linear de termos

$$dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_l} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{j_{k-l}},$$

o que implica

$$\Lambda^k(T_p^*M \otimes \mathbb{C}) = \bigoplus_{l=0}^{k} \Lambda^{l,0} \otimes \Lambda^{0,k-l} = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q},$$

onde $\Lambda^{p,0} = \Lambda^p(\Lambda^{1,0})$ e $\Lambda^{0,q} = \Lambda^q(\Lambda^{0,1})$. Mais precisamente, $\Lambda^{p,q} \subseteq \Lambda^{p+q}$ é a imagem da aplicação

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^{p,0} \otimes \Lambda^{0,q} & \longrightarrow & \Lambda^{p+q}, \\ \alpha \otimes \beta & \mapsto & \alpha \wedge \beta. \end{array}$$

Deixamos como um exercício demonstrar que se $(p,q) \neq (p',q')$, com $p+q = p'+q'$, então os subespaços $\Lambda^{p,q}$ e $\Lambda^{p',q'}$ intersectam-se trivialmente. O espaço $\Lambda^{p,q}$ é bem definido, independente do sistema de coordenadas, pois a decomposição $T_pM \otimes \mathbb{C} = T_p^{1,0} \oplus T_p^{0,1}$ não depende da escolha de coordenadas.

Uma k-forma diferencial α é de tipo (p,q), onde $p+q=k$, se $\alpha(x) \in \Lambda_x^{p,q}$ para todo $x \in M$. O espaço de (p,q)-formas em M é denotado por $\mathscr{E}^{p,q}(M)$. Então temos

$$\mathscr{E}^k(M) = \bigoplus_{p+q=k} \mathscr{E}^{p,q}(M).$$

A derivada exterior é bem comportada com respeito à decomposição de formas em tipo. Se $f \in C^\infty(M,\mathbb{C}) = \mathscr{E}^0(M)$, então localmente

$$df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial z^j} dz^j + \sum_j \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j} d\bar{z}^j,$$

então se $\alpha \in \mathscr{E}^{p,q}(M)$, locally temos

$$\begin{aligned} d\alpha &= d\left(a_{IJ} dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{j_q}\right), \\ &= (da_{IJ}) \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J, \\ &\in \mathscr{E}^{p+1,q}(M) \oplus \mathscr{E}^{p,q+1}(M). \end{aligned}$$

Denotamos por $\partial\alpha$ o componente de $d\alpha$ em $\mathscr{E}^{p+1,q}(M)$ e por $\bar{\partial}\alpha$ o componente de $d\alpha$ em $\mathscr{E}^{p,q+1}(M)$. Isso é dizer, temos $d = \partial + \bar{\partial}$. A identidade $d^2 = \partial^2 + \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}^2 = 0$ relaciona-se com a decomposição de formas por tipo como

$$\begin{aligned} \partial^2 : \mathscr{E}^{p,q}(M) &\longrightarrow \mathscr{E}^{p+2,q}(M), \\ \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial : \mathscr{E}^{p,q}(M) &\longrightarrow \mathscr{E}^{p+1,q+1}(M), \\ \bar{\partial}^2 : \mathscr{E}^{p,q}(M) &\longrightarrow \mathscr{E}^{p,q+2}(M), \end{aligned}$$

e por esses espaços terem interseção trivial concluimos que $\partial^2 = 0$, $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$ e $\bar{\partial}^2 = 0$. Um outro ponto de importância sobre o operador $\bar{\partial}$ é que ele detecta holomorficidade. Para $f \in C^\infty(M\mathbb{C})$,

$$\bar{\partial} f = \sum_j \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j} d\bar{z}^j \in \mathscr{E}^{0,1}(M).$$

Então $\bar{\partial} f = 0$ se e somente se f é holomorfa. Isso pode ser estendido para $p > 0$. Seja $\alpha \in \mathscr{E}^{p,0}(M)$, então $\bar{\partial}\alpha \in \mathscr{E}^{p,1}(M)$. Localmente,

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{|I|=p} a_I dz^I, \\ \bar{\partial}\alpha &= \sum_{|I|=p} \sum_j \frac{\partial a_I}{\partial \bar{z}^j} d\bar{z}^j \wedge dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p}. \end{aligned}$$

As formas $d\bar{z}^j \wedge dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p}$ formam uma bases para $\Lambda_x^{p,1}$ para todo x no domínínio das coordenadas, então $\bar{\partial}\alpha = 0$ se e somente se os coeficientes $\partial a_I / \partial \bar{z}^j = 0$, que é dizer que os coeficientes são funções holomorfas.

Definição 3.7. Uma p-forma holomorfa é uma forma α de tipo $(p,0)$ tal que $\bar{\partial}\alpha = 0$. Denotamos por $\Omega^p(M)$ o conjunto de p-formas holomorfas. Para $p = 0$, $\Omega^0(M) = \mathcal{O}(M)$ é igual ao espaço de funções holomorfas em M.

Proposição 3.8. *Se $f : M \to N$ é uma aplicação holomorfa de variedades complexas, então pull-back por f preserva o tipo de formas. Isso é dizer que temos um homomorfismo*

$$\begin{aligned} f^* : \mathscr{E}^{p,q}(N) &\longrightarrow \mathscr{E}^{p,q}(M), \\ e \quad f^*(\bar{\partial}\alpha) &= \bar{\partial}(f^*\alpha) \end{aligned}$$

para toda $\alpha \in \mathscr{E}^{p,q}(M)$.

Isso segue pela equação local $dz^j = \sum_k \frac{\partial z^j}{\partial w^k} dw^k$ para $z(w)$ uma aplicação holomorfa. Como no caso para o operador de De Rham em variedades suaves, o operador $\bar{\partial}$ aparece na sequência

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{E}^{p,q-1}(M) \longrightarrow \mathscr{E}^{p,q}(M) \longrightarrow \mathscr{E}^{p,q+1}(M) \longrightarrow \cdots$$

Definimos $Z^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)$ como o núcleo de $\bar{\partial}$ em $\mathscr{E}^{p,q}(M)$. Então $\bar{\partial}^2 = 0$ implica que $\bar{\partial}(\mathscr{E}^{p,q-1}(M)) \subseteq Z^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)$.

Definição 3.9. O grupo de cohomologia de Dolbeault de tipo (p,q) de M é o espaço quociente

$$H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M) = \frac{\ker\{\bar{\partial} : \mathscr{E}^{p,q}(M) \to \mathscr{E}^{p,q+1}(M)\}}{\operatorname{Im}\{\bar{\partial} : \mathscr{E}^{p,q-1}(M) \to \mathscr{E}^{p,q}(M)\}}.$$

Proposição 3.10. *Se $f : M \to N$ é uma aplicação holomorfa de variedades holomorfas, então f^* induz aplicações*

$$f^* : H^{p,q}_{\bar{\partial}}(N) \to H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)$$

tal que $(\mathrm{Id})^* = Id$, e se temos aplicações

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P,$$

então $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Se para algum par (p,q),

$$H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M) \ncong H^{p,q}_{\bar{\partial}}(N),$$

então M e N não são biholomorfas.

Os grupos de cohomologia de Dolbeault fornecem uma maneira de relacionar propriedades locais e globais em variedades complexas. Para entender isso bem, primeiro é necessário entender os grupos de Dolbeault em (certos) vizinhanças pequenas numa variedade. Depois de várias definições e alguns exemplos, vamos demonstrar o seguinte resultado.

Lema 3.11. *($\bar{\partial}$-Lema de Poincaré) Seja*

$$\Delta = \{(z^1, \ldots, z^n) \in \mathbb{C}^n \mid |z^j| < 1,\ \forall j\}$$

um polidisco unitário em $\mathbb{C}^n$. Então, se $q \geq 1$ e $p \geq 0$,

$$H^{p,q}_{\bar{\partial}}(\Delta) = \{0\}.$$

Especificamente, isso diz que para todo $\varphi \in \mathscr{E}^{p,q}(\Delta)$ tal que $\bar{\partial}\varphi = 0$, existe alguma $\eta \in \mathscr{E}^{p,q-1}(\Delta)$ tal que $\bar{\partial}\eta = \varphi$. Antes de começar a demonstração, anotamos uma diferênça de hipótese com, por exemplo, Teorema 2.4. Naquele resultado supomos que a função f era definido no fecho do disco. No caso agora, a forma φ é definida apenas no interior de Δ.

Demonstração: Nossa primeira afirmação é que é suficiente demonstrar o resultado para o caso $p = 0$. Seja

$$\varphi = \sum_{|I|=p,|J|=q} \varphi_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J = \pm \sum_I \left(\sum_J \varphi_{IJ} d\bar{z}^J \right) \wedge dz^I,$$

onde $I = (i_1, \dots, i_p)$ para $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ e $dz^I \wedge d\bar{z}^J = dz^{i_1} \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{j_q}$. Então,

$$\bar{\partial}\varphi \quad = \quad \pm \sum_I \left(\sum_{|J|=q} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_{IJ}}{\partial \bar{z}^j} \wedge d\bar{z}^J \right) \wedge dz^I = 0,$$

o que implica que $\bar{\partial}\varphi_I = 0$, onde φ_I é a $(0,q)$-forma $\varphi_I = \sum_J \varphi_{IJ} d\bar{z}^J$. Então se o $\bar{\partial}$-Lema de Poincaré vale para $(0,q)$-formas, $\varphi_I = \bar{\partial}\eta_I$, para $\eta_I \in \mathscr{E}^{0,q-1}(\Delta)$ e logo $\varphi = \bar{\partial}(\sum_I dz^I \wedge \eta_I)$.

Agora demonstramos o Lema para $(0,q)$-formas. Seja $\varphi = \sum_{|J|=q} \varphi_I d\bar{z}^J \in \mathscr{E}^{0,q}(\Delta)$ tal que $\bar{\partial}\varphi = 0$. Afirmamos que para qualquer $s < 1$, existe uma forma $\psi \in \mathscr{E}^{0,q-1}(\Delta(s))$ tal que $\bar{\partial}\phi = \varphi$ em $\Delta(s)$.

Segundo, afirmamos que existe $\eta_n \in \mathscr{E}^{0,q-1}(\Delta(s))$ tal que $\varphi - \bar{\partial}\eta_n$ não involve $d\bar{z}^n$, e apenas os termos $d\bar{z}^1, \dots, d\bar{z}^{n-1}$.

Mais precisamente, seja $k \in \{1, \dots, n\}$ o menor índice tal que se $I = (i_1, \dots, i_q)$, com $i_q > k$, então o coeficiente $\varphi_I \equiv 0$. (Por isso dizemos que φ *não involve* os elementos $d\bar{z}^{k+1}, \dots, d\bar{z}^n$). Então nós afirmamos que podemos encontrar $\eta \in \mathscr{E}^{0,q-1}(\Delta(s))$ tal que $\varphi - \bar{\partial}\eta$ não involve $d\bar{z}^k, \dots, d\bar{z}^n$. É claro ver que isso é suficiente, por indução, concluir a primeira afirmação.

Então, suponha que $\varphi = \varphi_1 \wedge d\bar{z}^k + \varphi_2$ para φ_1 e φ_2 formas de tipo $(0, q-1)$ e $(0, q)$, respetivamente, que não involvem formas $d\bar{z}^k$ e por cima. Então

$$\bar{\partial}\varphi = 0 = \bar{\partial}\varphi_1 \wedge d\bar{z}^k + \bar{\partial}\varphi_2.$$

Então, por φ_2 não involver termos $d\bar{z}^l$ para $l \geq k$, a derivada $\bar{\partial}\varphi_2$ não involve termos $d\bar{z}^k \wedge d\bar{z}^l$, para $l > k$. Então, por $\bar{\partial}\varphi = 0$, podemos concluir a mesma coisa do termos $\bar{\partial}\varphi_1 \wedge d\bar{z}^k$. Temos

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_{\substack{|I|=q \\ i_q=k}} \varphi_I d\bar{z}^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{i_{q-1}}, \\ \bar{\partial}\varphi_1 &= \sum_{\substack{|I|=q \\ i_q=k}} \left(\sum_j \frac{\partial \varphi_I}{\partial \bar{z}^j} d\bar{z}^j \right) \wedge d\bar{z}^{I \setminus \{k\}}, \end{aligned}$$

então podemos concluir que $\frac{\partial \varphi_I}{\partial \bar{z}^j} = 0$ para $j > k$. Isso é dizer que os coeficientes φ_I são holomorfos com respeito às variáveis $z^{k+1}, \dots, z^n$. Para $s < 1$, seja $\Delta(s)$

o polidisco $\{(z^1,\ldots,z^n) \mid |z^j| < s\}$ e seja

$$\eta \quad = \quad \sum_{\substack{|I|=q \\ i_q=k}} \eta_I d\bar{z}^{I\setminus\{k\}} \in \mathscr{E}^{0,q-1}(\Delta(s)),$$

onde

$$\eta_I \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|\le s} \frac{\phi_I(z^1,\ldots,\xi,\ldots,z^n)}{\xi - z^k} d\xi \wedge d\bar{\xi}.$$

Pelo $\bar{\partial}$-Lema de Poincaré em uma variável, $\frac{\partial \eta_I}{\partial \bar{z}^k} = \varphi_I$, enquanto para $l > k$, $\frac{\partial \eta_I}{\partial \bar{z}^l} = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}\eta \quad &= \quad \sum_{I\ni k}\sum_j \frac{\partial \eta_I}{\partial \bar{z}^j} d\bar{z}^j \wedge d\bar{z}^{I\setminus k}, \\
&= \quad \sum_{I\ni k}\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial \eta_I}{\partial \bar{z}^j} d\bar{z}^j \wedge d\bar{z}^{I\setminus k} + \sum_{I\ni k} \frac{\partial \eta_I}{\partial \bar{z}^k} d\bar{z}^k \wedge d\bar{z}^{I\setminus k}.
\end{aligned}$$

O primeiro desses dois termos involve apenas termos em $\{1,\ldots k-1\}$, enquanto o segundo termos é igual a $\pm\varphi_1 \wedge d\bar{z}^k = \pm(\varphi - \varphi_2)$. Isso é dizer que $\varphi - \bar{\partial}\eta$ involve apenas as variáveis $d\bar{z}^1,\ldots,d\bar{z}^{k-1}$ e $\bar{\partial}(\varphi - \bar{\partial}\eta) = 0$. Por uma indução descrescente, podemos retirar todas as variáveis e concluir que para qualquer $s \in (0,1)$, existe $\eta \in \mathscr{E}^{0,q-1}(\overline{\Delta(s)})$ tal que $\bar{\partial}\eta = \varphi$ em $\Delta(s)$. Em particular, podemos supor que $\eta \in \mathscr{E}^{0,q-1}(\Delta)$ e que $\bar{\partial}\eta = \varphi$ em $\Delta(s)$.

Terminamos a demonstração que uma forma pode ser encontrada tal que $\bar{\partial}\eta = \varphi$ em todo de Δ. Isso será feito por indução em $q \ge 1$. Seja $0 < r_j \nearrow 1$ uma sequência estritamente crescente. Em particular, o polidisco $\Delta(r_k)$ é pré-compacto em $\Delta(r_{k+1})$ para todo k. Para todo k, existe $\psi_k \in \mathscr{E}^{0,q-1}(\Delta(1))$ tal que $\bar{\partial}\psi_k = \varphi$ em $\Delta(r_k)$. Queremos mostrar que $\psi_k \to \psi$, pelo menos depois de adicionar um termo de correção. Então, suponha que ψ_k é dada, e seja $\alpha \in \mathscr{E}^{0,q-1}(\Delta(1))$ tal que $\bar{\partial}\alpha = \varphi$ em $\Delta(r_{k+1})$. Isso é dizer que em $\Delta(r_k)$, $\bar{\partial}(\psi_k - \alpha) = 0$.

Agora, suponha o caso inicial da indução $q = 1$. Então ψ_k e α são funções em Δ tal que $\bar{\partial}(\psi_k - \alpha) = 0$, ou que $\psi_k - \alpha$ é holomorfa, em $\Delta(r_k)$). Logo, $\psi_k - \alpha$ é dada por uma série de potências uniformamente convergente em subcompactos de $\Delta(r_k)$. Trancamos a série para obter um polinômio β tal que

$$\sup_{\Delta(r_{k-1})} |\psi_k - \alpha - \beta| < \frac{1}{2^k}$$

e seja $\psi_{k+1} = \alpha + \beta \in \mathscr{E}^{0,0}(\Delta(1))$, tal que $\bar{\partial}\psi_{k+1} = \bar{\partial}\alpha = \varphi$ em $\Delta(r_{k+1})$, mas adicionalmente tal que

$$|\psi_{k+1} - \psi_k| < \frac{1}{2^k}$$

em $\Delta(r_{k-1})$. Logo,

$$\begin{aligned}\psi = \lim_{j\to\infty} \psi_j &= \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_{j+1} - \psi_j), \\ &= \sum_{j=0}^{k} (\psi_{j+1} - \psi_j) + \sum_{j=k+1}^{\infty} (\psi_{j+1} - \psi_j).\end{aligned}$$

O primeiro termo é suave e igual a ψ_{k+1}. O segundo termo é uma série uniformamente convergente de funções holomorfas em $\Delta(r_{k-1})$. Logo, para qualquer k, em $\Delta(r_{k-1})$, $\bar{\partial}\psi = \varphi$, como desejado.

Agora, suponha que $q \geq 2$ e que para todo $\phi \in \mathscr{E}^{0,q-1}(\Delta(1))$ com $\bar{\partial}\phi = 0$, existe $\sigma \in \Delta(1)$ tal que $\bar{\partial}\sigma = \phi$ em $\Delta(1)$. Pela construção acima, já vimos que para todo k, existe $\psi_k \in \mathscr{E}^{0,q-1}(\Delta(1))$ tal que $\bar{\partial}\psi_k = \varphi$ em $\Delta(r_k)$. Afirmamos que essas formas podem ser escolhidas para que $\psi_{k+1} = \psi_k$ em $\Delta(r_{k-1})$. Supomos que as $\psi_1, \ldots, \psi_k$ já foram escolhidas satisfazendo isso, e seja $\alpha \in \mathscr{E}^{0,q-1}(\Delta(1))$ alguma forma com $\bar{\partial}\alpha = \varphi$ em $\Delta(r_{k+1})$. Temos $\bar{\partial}(\psi_k - \alpha) = 0$ em $\Delta(r_k)$, então pela hipótese de indução (em q), $\psi_k - \alpha = \bar{\partial}\beta_k$ para alguma $\beta_k \in \mathscr{E}^{0,q-2}(\Delta(r_k))$. Em particular, usando uma função de corte, podemos supor que $\beta_k \in \mathscr{E}^{0,q-2}(\Delta(1))$ e que $\psi_k = \alpha + \bar{\partial}\beta_k$ em $\Delta(r_{k-1})$. Então seja $\psi_{k+1} = \alpha + \bar{\partial}\beta_k \in \mathscr{E}^{0,q-1}(\Delta(1))$. Isso satisfaz $\psi_{k+1} = \psi_k$ em $\Delta(r_{k-1})$ e $\bar{\partial}\psi_{k+1} = \bar{\partial}\alpha = \varphi$ em $\Delta(r_{k+1})$. Logo, o limite $\psi = \lim_{k\to\infty} \psi_k$ existe, é suave e satisfaz $\bar{\partial}\psi = \varphi$ em $\Delta(1)$.

3.5 Métricas Hermitianas

Métricas Riemannianas são objetos fundamentais na geometria diferencial de variedades suaves. Nessa seção, estudaremos as métricas Riemannianas mais compatíveis com a estrutura de uma variedade complexa. Para começar, é neecssário explicitar algumas ideias da álgebra linear de vetores, covetores e produtos Hermitianos. Seja V um espaço vetorial *real*, de dimensão real $2n$, e seja $J : V \to V$ um endomorfismo linear tal que $J^2 = -\mathrm{Id}$. Um produto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em V é **Hermitiano** com respeito a J se $\langle Jv, Jw \rangle = \langle v, w \rangle$ para todo $v, w \in V$.

Seja M uma variedade complexa de dimensão n, equipada com a sua estrutura quase-complexa J. Seja g uma métrica Riemanniana em M. Isso é dizer que para todo $p \in M$,

$$g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R},$$

é um produto interior em T_pM, variando suavamente com $p \in M$. Deixaremos o sub-escrito p frequentemente quando é bem entendido. g é uma seção suave do fibrado $S^2(T^*M)$, satisfazendo a condição de positividade em cada ponto. g é uma **metrica Hermitiana** se $g(Jv, Jw) = g(v, w)$ para todo $v, w \in T_pM$ e todo $p \in M$.

A nossa primeira observação óbvia é que $g(Jv, v) = 0$ para todo $v \in T_pM$, pois $g(Jv, v) = g(J^2, Jv) = -g(v, Jv) = -g(Jv, v)$. Equivalentemente, a forma bilinear $\omega(v, w) - g(Jv, w)$ é *anti-simétrica*.

Estendemos o produto interior à complefição do espaço tangente $T_pM \otimes \mathbb{C}$ por bilinearidade complexa. A complexificação decompõe-se como uma soma direta $TM \otimes \mathbb{C} = T^{1,0} \oplus T^{0,1}$.

Lema 3.12. *Se g é uma métrica Hermitiana em M, os subespaços $T_p^{1,0}, T_p^{0,1} \subseteq T_pM \otimes \mathbb{C}$ são isotrópicos. Isso é dizer, que*

$$\begin{aligned} g(T^{1,0}, T^{1,0}) &\equiv 0, \\ g(T^{0,1}, T^{0,1}) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Demonstração: Para $X = 1/2(v - iJv)$ e $Y = 1/2(w - iJw)$ elementos de $T^{1,0}$, nós temos

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= \frac{1}{4} g(v - iJv, w - iJw), \\ &= \frac{1}{4}\left[g(v,w) - g(Jv,Jw)\right] + \frac{i}{4}\left[-g(v,Jw) - g(Jv,w)\right], \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois g é Hermitiana. De modo parecido, consideramos $g(T^{1,0}, T^{0,1})$ e $g(T^{0,1}, T^{1,0})$. Para $X^{1,0} = 1/2(v - iJv)$ e $Y^{0,1} = 1/2(w + iJw)$, temos $g(X^{1,0}, Y^{0,1}) = g(Y^{0,1}, X^{1,0})$, pela simetria do tensor g. Também,

$$g(X^{1,0}, Y^{0,1}) = \frac{1}{2} g(v,w) - \frac{i}{2} g(Jv, w).$$

Conjugação em $TM \otimes \mathbb{C}$ age pelo seguinte. Se $X = 1/2(v - iJv) \in T^{1,0}$, para v real, $\overline{X} = 1/2(v + iJv)$. Definimos um produto Hermitiano sesqui-linear no espaço vetorial complexo $T^{1,0}$ por

$$\begin{aligned} h : T^{1,0} \times T^{1,0} &\to \mathbb{C}, \\ h(X,Y) &= g(X, \overline{Y}). \end{aligned}$$

O produto h é $\mathbb{C}$-linear em X e $\mathbb{C}$-anti-linear em Y. Satisfaz $h(X,Y) = \overline{h(Y,X)}$, e para $X = Y$,

$$\begin{aligned} h(X,X) &= g(X, \overline{X}), \\ &= \frac{1}{2}\left(g(v,v) - ig(Jv,v)\right), \\ &= \frac{1}{2} g(v,v) \geq 0. \end{aligned}$$

$h(X,X)$ é real e positivo se $X \neq 0$.

Já vimos que a forma bilinear $\omega(v,w) = g(Jv,w)$ é anti-simétrica. Podemos considerar a decomposição de ω por (p,q)-tipo.

$$\begin{aligned} \Lambda^2 T_p^* M \otimes \mathbb{C} &= \Lambda_p^{2,0} \oplus \Lambda_p^{1,1} \oplus \Lambda_p^{0,2}, \\ \omega &= \omega^{2,0} + \omega^{1,1} + \omega^{0,2}. \end{aligned}$$

Afirmamos que $\omega^{2,0} = \omega^{0,2} = 0$ e ω é puramente de tipo $(1,1)$. Isso segue pela observação que $\omega^{2,0} = 0$ se e somente se $\omega^{2,0}(X,Y) = \omega(X,Y) = 0$ para todo $X, Y \in T^{1,0}$. Isso vale porque

$$\omega(X,Y) = g(JX,Y) = ig(X,Y) = 0,$$

usando o fato de X ser um i-auto-vetor de J, e $T^{1,0}$ ser um subespaço isotrópico para g. Logo $\omega \in \mathscr{E}^{1,1}(M)$.

Consideramos a métrica g e a forma ω em coordenadas locais (z^α), onde $z^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha$. Então, em termos das formas dz^α, $\bar{z}^\beta$, para $1 \leq \alpha, \beta, n$.

$$\begin{aligned} g &= \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta + \sum_{\alpha\beta} g_{\bar{\alpha}\beta} d\bar{z}^\alpha \otimes dz^\beta \\ &\quad + \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\alpha + \sum_{\alpha\beta} g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} d\bar{z}^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta, \end{aligned}$$

onde, por exemplo, $g_{\bar{\alpha}\beta} = g(\partial/\partial\bar{z}^\alpha, \partial/\partial z^\beta)$. Observamos que os subespaços $T^{1,0}$ e $T^{0,1}$ serem isotrópicos implica que $g_{\alpha\beta} = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0$ para todo α e β. Segundo, a simetria de g implica que $g_{\alpha\bar{\beta}} = g_{\bar{\beta}\alpha}$. Por final, a condição que $g(X, \overline{Y}) = \overline{g(Y, \overline{X})}$ implica que $g_{\alpha\bar{\beta}} = \overline{g_{\beta\bar{\alpha}}}$. Resumindo, a métrica Riemanniana g, e a forma associada ωsão dadas localmente por

$$\begin{aligned} g &= \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\bar{\beta}} (dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta + d\bar{z}^\beta \otimes dz^\alpha), \\ \omega &= i \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta. \end{aligned}$$

Dada a forma ω, podemos recuperar a métrica g :

$$\begin{aligned} \omega(v, w) &= g(Jv, w), \\ g(v, w) &= \omega(v, Jw). \end{aligned}$$

Exercício 3.1. Seja $\eta \in \Lambda^2 T * M = \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{1,1} \oplus \Lambda^{0,2}$. Então defina a forma $J^*\eta \in \Lambda^2 T^* M$ por $J^*\eta = \eta(J\cdot, J\cdot)$. Demonstre que $\eta \in \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2}$ se e somente se $J^*\eta = -\eta$ e que $\eta \in \Lambda^{1,1}$ se e somente se $J^*\eta = \eta$.

Conjugação em vetores tangentes complexos estende-se para covetores e formas diferenciais. Definimos

$$\begin{aligned} \bar{\cdot} : \Lambda^1 = T^*M \otimes \mathbb{C} &\longrightarrow \Lambda^1, \\ \overline{\alpha}(v) &= \alpha(\overline{v}). \end{aligned}$$

Em coordenadas, isso satisfaz $\overline{\lambda dz^\alpha} = \bar{\lambda} d\bar{z}^\alpha$. Conjugação de k-formas é definida de maneira parecida :

$$\lambda dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{j_q} \mapsto \bar{\lambda} d\bar{z}^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{i_p} \wedge dz^{j_1} \wedge \cdots \wedge dz^{j_q}.$$

Em particular, conjugação manda formas de tipo (p, q) para (q, p)-formas. Uma (p, p)-forma $\alpha \in \Lambda^{p,p}$ é **real** se $\bar{\alpha} = \alpha$. Por exemplo, em $p = 1$, se

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{\alpha\beta} \omega_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta, \\ \bar{\omega} &= \sum_{\alpha\beta} \overline{\omega_{\alpha\bar{\beta}}} d\bar{z}^\alpha \wedge dz^\beta = -\sum_{\alpha\beta} \overline{\omega_{\beta\bar{\alpha}}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta, \end{aligned}$$

então ω é real se e somente se $\omega_{\alpha\bar{\beta}} = -\overline{\omega_{\beta\bar{\alpha}}}$. Escrevendo ω como

$$\omega = i \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta,$$

ω é real se e somente se os coeficientes satisfazem $g_{\alpha\bar{\beta}} = \overline{g_{\beta\bar{\alpha}}}$, como é o caso para a $(1,1)$-forma obtida de uma métrica Hermitiana.

Definição 3.13. Uma $(1,1)$-forma real $\omega \in \mathscr{E}^{1,1}(M)$ é **positiva** se, para todo $p \in M$, a forma simétrica em T_pM $g(v,w) = \omega(v, Jw)$ é positivo definida.

Agora construimos uma métrica Riemanniana muito importante no espaço projetivo $\mathbb{P}^n$. Um ponto $\xi \in \mathbb{P}^n$ é dado por um sub-espaço vetorial $\xi \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ de dimensão um. Nós temos uma projeção $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ enviando um vetor não-nulo v para a linha $[v]$ gerada por v. Para um subconjunto aberto $U \subseteq \mathbb{P}$ seja $F : U \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ uma aplicação holomorfa tal que $F(\xi) \in \xi$ para todo $\xi \in U$. Isso é dizer que $\pi \circ F(\xi) = \xi$, para todo ξ. Então, defina

$$\omega_U = i\partial\bar{\partial} \log \|F\|^2,$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma Euclideana em $\mathbb{C}^{n+1}$. Primeiro, mostramos que isso independe do mapa F. Se $F' : V \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ também é holomorfa e satisfaz $\pi(F'(\xi)) = \xi$ para todo $\xi \in V$, então em $U \cap V$, $F' = f \cdot F$ para alguma função $f \in \mathcal{O}^*(U \cap V)$. Então em $U \cap V$,

$$\begin{aligned} \omega_V &= i\partial\bar{\partial} \log \|F'\|^2, \\ &= i\partial\bar{\partial} \log(|f|^2 \|F\|^2), \\ &= i\partial\bar{\partial} \log |f|^2 + i\partial\bar{\partial} \log \|F\|^2. \end{aligned}$$

Um exercício rápido mostra que se f é holomorfa e não-nula, $\partial\bar{\partial}|f|^2 \equiv 0$, então temos $\omega_V = \omega_U$ em $U \cap V$ e as expressões definem uma forma $\omega \in \mathscr{E}^{1,1}(\mathbb{P}^n)$. Mais explicitamente, em

$$\begin{aligned} U_0 &= \{[w^0 : \cdots : w^n] \mid w^0 \neq 0\}, \\ &= \{[1 : z^1 : \cdots : z^n] \mid z \in \mathbb{C}^n\}, \end{aligned}$$

temos $F : U_0 \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, $F([1:z]) = (1, z)$ e $\omega_{U_0} = i\partial\bar{\partial} \log(1 + |z|^2)$. Afirmamos que ω_{U_0} é uma $(1,1)$-forma real e positiva. Nós temos

$$\begin{aligned} \omega_{U_0} &= i\partial\bar{\partial} \log(1 + |z|^2), \\ &= i\partial \left(\frac{\sum_\alpha z^\alpha d\bar{z}^\alpha}{1 + |z|^2} \right), \\ &= i \left(\frac{\sum_\alpha dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\alpha}{1 + |z|^2} - \frac{(\sum_\alpha \bar{z}^\alpha dz^\alpha) \wedge (\sum_\beta z^\beta d\bar{z}^\beta)}{(1 + |z|^2)^2} \right). \end{aligned}$$

Observamos que $g = \omega(\cdot, J\cdot)$ é uma métrica Riemanniana se e somente se $\omega(v, Jv) \geq 0$ e vale zero somente para $v = 0$. Isso é equivalente a $-i\omega(X, \overline{X}) \geq 0$ para todo $X = 1/2(v - iJv) \in T^{1,0}$, valendo zero apenas para $X = 0$. Então para $X = \sum_j a^j \frac{\partial}{\partial z^j}$,

$$
\begin{aligned}
-i\omega_{U_0}(X,\overline{X}) &= \frac{1}{(1+|z|^2)^2}\left((1+|z|^2)\sum_j |a^j|^2 - (\sum_j \bar{z}^j a^j)(\sum_k z^k \bar{a}^k)\right), \\
&= \frac{1}{(1+|z|^2)^2}\left(|a|^2 + |z|^2|a|^2 - |z\cdot a|^2\right), \\
&\geq \frac{|a|^2}{(1+|z|^2)^2}.
\end{aligned}
$$

Isso é sempre não-negativo e vale zero somente para $X = 0$.

Isso implica em particular que a $g = \omega(\cdot, J\cdot)$ define uma métrica em $\mathbb{P}^n$. Essa métrica é chamada a *métrica de Fubini-Study*. g e ω serão denotadas por g_{FS} e ω_{FS}, respetivamente.

Definição 3.14. Seja M uma variedade complexa. Uma métrica Hermitiana em M é uma **métrica de Kähler** se a forma anti-simétrica ω associada a g é fechada. Isso é dizer, $d\omega = 0$.

A forma ω_{FS} dada pela métrica de Fubini-Study satisfaz, localmente, $\omega_{FS} = i\partial\bar{\partial}\log\|F\|^2$, então $\partial\omega_{FS} = \bar{\partial}\omega_{FS} = 0$ e g_{FS} é de Kähler.

4 Feixes e Cohomologia

4.1 Primeiras Definições

Seja M uma variedade complexa e $\alpha \in \mathscr{E}^{0,1}(M)$ uma $(0,1)$-forma suave tal que $\bar{\partial}\alpha = 0$. Fazemos a pergunta de se existe uma função suave $f \in \mathscr{E}^0(M)$ tal que $\bar{\partial} f = \alpha$. Já vimos, pela observação que

$$H^{0,1}_{\bar{\partial}}(\Delta) = \{0\},$$

que uma função f sempre pode ser encontrada localmente. A o grupo de cohomologia $H^{0,1}_{\bar{\partial}}(M)$, ou mais precisamente a classe de α nesse grupo, é a obstrução de ter uma resposta afirmativa a essa questão. Nesse capítulo estudaremos outras ideias parecidas que relacionam informação local e global em variedades complexas. [1]

Definição 4.1. Seja X um espaço topológico. Um **pré-feixe** $\mathcal{F}$ em X é uma associação de um grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$ a cada subconjunto aberto $U \subseteq X$, e, para cada inclusão de abertos $V \subseteq U \subseteq X$, um homomorfismo $r_{V,U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ que satisfazem as condições

1. $r_{U,U} = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(U)}$, para todo $U \subseteq X$ aberto,
2. Se $W \subseteq V \subseteq U$, então $r_{W,U} = r_{W,V} \circ r_{V,U}$.

O grupo $\mathcal{F}(U)$ é chamado o grupo de seções de $\mathcal{F}$ em U, e $r_{V,U}$ é chamado o mapa de restrição de U em V.

Definição 4.2. Um pré-feixe $\mathcal{F}$ é um **feixe** se também satisfaz as condições, para $U_i \subseteq X$ subconjuntos abertos em X (para $i \in I$) e $U = \bigcup_{i \in I} U_i$,

3. Se $s, t \in \mathcal{F}(U)$ e $r_{U_i,U}(s) = r_{U_i,U}(t)$ para todo $i \in I$, então $s = t$.
4. Se $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ são tais que $r_{U_i \cap U_j, U_i}(s_i) = r_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j)$ para todo $i, j \in I$, então existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s_i = r_{U_i,U}(s)$ para todo $i \in I$.

A condição 4. quer dizer que seções locais de $\mathcal{F}$ que coincidam onde ambas são definidas estendem-se a definir uma seção na união dos domínios de definição. A condição 3. diz que o objeto global que obtemos é unicamente determinado.

Exemplos. Seja X uma variedade diferenciavel. Temos o feixe $\mathcal{F} = C^\infty_X$ de funções suaves em X, definido por $C^\infty_X(U) = C^\infty(U) = \{\text{funções suaves } f : U \to \mathbb{C}\}$, com homomorfismos $r_{V,U} : C^\infty_X(U) \to C^\infty_X(V)$ dados como restrição das funções $r_{V,U}(f) = f|_V$.

Se X é uma variedade complexa, seja $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ o feixe de funções holomorfas. Para $U \subseteq X$ um subconjunto aberto, temos

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \text{ holomorfa}\}.$$

Como no exemplo anterior o homomorfismo $r_{V,U}$ é dado por restrição.

Seja $\mathcal{F} = \mathcal{O}^*_X$ o feixe de funções não nulas.

$$\mathcal{O}^*_X(U) = \{f : U \to \mathbb{C}^* \text{ holomorfa}\},$$

[1] mencione em algum luga que os espaços topologicos são sempre para-compactos.

com operação dada por multiplicação pontual das funções. Verificar que esses exemplos satisfazem as condições 1.-4. de um feixe pode ser considerado um exercício.

Se $p \in X$ é um ponto fixado, consideramos $\mathcal{F} = \mathcal{I}_p$ o feixe de funções que se anulam em p. Isso é dizer, para $U \subseteq X$ aberto,

$$\mathcal{I}_p(U) = \begin{cases} \mathcal{O}_X(U), & \text{se } p \notin U, \\ \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f(p) = 0\} & \text{se } p \in U. \end{cases}$$

Observamos que C_X^∞ e $\mathcal{O}_X$ são feixes de anéis, no sentido que para todo $U \subseteq X$, $\mathcal{O}_X(U)$ é um anel é os mapas $r_{V,U}$ são homomorfismos de aneis.

Definição 4.3. Seja $(\mathcal{A}, \rho)$ um feixe de anéis. $(\mathcal{F}, r)$ é um feixe de $\mathcal{A}$-modulos se

1. Para todo aberto $U \subseteq X$, $\mathcal{F}(U)$ é um $\mathcal{A}(U)$-modulo, e
2. Para $V \subseteq U \subseteq X$ abertos e $f \in \mathcal{A}(U)$ e $s \in \mathcal{F}(U)$,
$$r_{V,U}(f \cdot s) = \rho_{V,U}(f) \cdot r_{V,U}(s).$$

Seja G um grupo abeliano fixado. Para cada aberto $U \subseteq X$ podemos considerar o conjunto $\underline{G}_c(U) = G = \{g : U \to G \quad \text{constante }\}$. Observamos, porém, que com essa definição, e homomorfismos dados por restrição, $\underline{G}_c$ não define um feixe. Em particular, essa associação de grupos a conjuntos abertos não satisfaz condição 4., dada acima. Para acertar esse ponto detalhado, consideramos G com a topologia discreta, em que todo subconjunto de G é aberto e definimos,

$$\underline{G}(U) = \{g : U \longrightarrow G, \quad \text{contínua }\}$$

e deixamos como um exercício mostrar que $\underline{G}$ é um feixe. Um elemento $f \in \underline{G}(U)$ é localmente constante. É constante em componentes conexos de U. Com essa definição, obtemos os feixes de funções localmente constantes $\underline{\mathbb{R}}$, $\underline{\mathbb{Z}}$, $\underline{\mathbb{Q}}$, $\underline{\mathbb{C}}$, $\underline{\mathbb{C}^*}$, $\underline{\mathbb{Z}_2}$, e outros.

Definição 4.4. Um **conjunto dirigido** é um conjunto I com uma ordem parcial $\leq$ tal que para todo $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que $k \leq i$ e $k \leq j$.

Seja X um espaço topológico. O conjunto de coberturas abertas de X forma um conjunto dirigido em que, para coberturas $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ e $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$, dizemos que $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$ se para todo $j \in J$, existe $i \in I$ tal que $V_j \subseteq U_i$. Para quaisquer $\mathcal{U}, \mathcal{V}$, a cobertura $\mathcal{W} = \{U_i \cap V_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ satisfaz $\mathcal{W} \preceq \mathcal{U}$ e $\mathcal{W} \preceq \mathcal{V}$.

Seja X um espaço topológico e $x \in X$. Para U e V vizinhanças de x, dizemos que $U \preceq V$ se $U \subseteq V$. Assim, o conjunto de vizinhanças de x forma um conjunto dirigido.

Definição 4.5. Um **sistema dirigido de grupos abelianos** é uma coleção $\{A_i\}_{i \in I}$ de grupos abelianos, indexada por um conjunto dirigido, junto com homomorfismos de grupos $f_{ij} : A_j \to A_i$ sempre que $i \leq j$, satisfazendo

1. $f_{ii} = \mathrm{Id}_{A_i}$,
2. $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$.

Seja X um espaço topológico e $x \in X$ um ponto fixado. Seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe de grupos abelianos em X. Então, a família de grupos $\mathcal{F}(U) \mid x \in U\}$, com os homomorfismos de restrição $r_{U,V}$, quando $U \subseteq V$, é um exemplo de um sistema dirigido de grupos.

Definição 4.6. Seja $(\{A_i\}_{i \in I}, f_{ij})$ um sistema dirigido de grupos abelianos. Seja

$$\varinjlim A_i = (\bigsqcup_i A_i)/\sim,$$

onde dizemos que $A_i \ni x_i \sim x_j \in A_j$ se e somente se existe $k \leq i, j$ tal que $f_{ki}(x_i) = f_{kj}(x_j)$.

O limite $\lim A_i$ é chamado o **limite direto** do sistema dos grupos. $\lim A_i$ também é um grupo abeliano.

Proposição 4.7. *Seja* $\lim A_i$ *o limite direto de um sistema dirigido de grupos.*

1. *Existem homomorfismos* $f_j : A_j \to \lim A_i$ *tais que se* $k \leq j$, $f_j = f_k \circ f_{kj}$.
2. $\lim A_i, f_j)$ *é um objeto inicial na categoria de grupos abelianos* G *com homomorfismos* $A_i \to G$.

Sejam X um espaço topológico, $x \in X$ um ponto de X e $\mathcal{F}$ um pré-feixe de grupos abelianos em X. Já vimos que $\{\mathcal{F}(U) \mid x \in U\}$, com restrições $r_{V,U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ é um sistema dirigido de grupos. Definimos o grupo

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim \mathcal{F}(U) = (\bigsqcup_{U \ni x} \mathcal{F}(U))/\sim .$$

Então, $s \in \mathcal{F}(U)$ e $t \in \mathcal{F}(V)$ são equivalentes se existe $W \subseteq U \subseteq V$ uma vizinhança de x tal que $r_{W,U}(s) = r_{W,V}(t)$. Nós já vimos essa definição para funções holomorfas. Um elemento $\mathcal{O}_{X,x} \ni f$ é o germe de uma função holomorfa no ponto x. O grupo $\mathcal{F}_x$ é chamado o **caule** do feixe $\mathcal{F}$ em x.

Seja $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ feixes em X. Denote por r os mapas de restrição para ambos. Um **morfismo** $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de feixes é uma coleção de homomorfismos, para cada aberto $U \subseteq X$,

$$\phi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U),$$

tal que

$$r^{\mathcal{G}}_{V,U}(\phi_U(s)) = \phi_V(r^{\mathcal{F}}_{V,U}(s)),$$

para todo $V \subseteq U$ e todo $s \in \mathcal{F}(U)$.

Seja X uma variedade complexa e $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}^*_X$ os feixes de funções holomorfas e holomorfas não-nulas, respetivamente. Definimos o morfismo

$$\exp : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}^*_X.$$

Para $U \subseteq X$ aberto, $\exp : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}^*_X(U)$ é o homomorfismo de grupos $f \mapsto \exp(2\pi i f)$. Incluimos o fator $2\pi i$ para simplificar a definição do *núcleo* desse morfismo.

Seja $\mathscr{E}^k_X$ o feixe de k-formas suaves em X. A derivada exterior $d : \mathscr{E}^1_X \to \mathscr{E}^2_X$ também define um morfismo de feixes.

Definição 4.8. Seja $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de pré-feixes em X. Seja, para cada subconjunto aberto $U \subseteq X$,

$$(\mathcal{K}er\phi)(U) = \ker\{\phi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)\} \subseteq \mathcal{F}(U).$$

Para $V \subseteq U$, $r_{V,U}(\phi_U f) = \phi_V(r_{V,U} f)$, então

$$r_{V,U} : (\mathcal{K}er\phi)(U) \longrightarrow (\mathcal{K}er\phi)(V),$$

e $(\mathcal{K}er\phi, r)$ é um pré-feixe.

Afirmamos que se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são feixes, então $\mathcal{K}er\phi$ também é um feixe. Para ver condição 3., para $U = \bigcup_i U_i \subseteq X$, se $s, t \in \mathcal{K}er\phi(U)$ tem $r_{U_i,U}(s) = r_{U_i,U}(t) \in \ker\phi(U_i) \subseteq \mathcal{F}(U_i)$ para todo i, então por $\mathcal{F}$ ser um feixe, concluimos que $s = t \in \ker\phi(U)$. Para a condição 4., supomos que $s_i \in \ker\phi(U_i) \subseteq \mathcal{F}(U_i)$ satisfazem

$$r^{\mathcal{F}}_{U_i \cap U_j, U_i}(s_i) r^{\mathcal{F}}_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j)$$

para todo $i, j \in I$. $\mathcal{F}$ é um feixe, então existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s_i = r_{U_i,U}(s)$ para cada i. Fazemos a pergunta de se $s \in \ker\phi(U)$. O elemento $\phi_U(s) \in \mathcal{G}(U)$ satisfaz

$$r^{\mathcal{G}}_{U_i,U}(\phi_U(s)) = \phi_{U_i}(r^{\mathcal{F}}_{U_i,U}(s)) = \phi_{U_i}(s_i) = 0 \in \mathcal{G}(U_i).$$

Por $\mathcal{G}$ satisfaz condição 3., com $t = 0 \in \mathcal{G}(U)$, concluimos que $\phi_U(s) = 0$, que $s \in \ker\phi(U)$ e que $\ker\phi$ é um feixe.

Definir a imagem de um morfismo, como um feixe, é um pouco mais delicado mas também é possível. De novo, seja $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de feixes. Seja, para $U \subseteq X$ aberto,

$$(\mathrm{Im}\phi)_{pr}(U) = \phi(\mathcal{F}(U)) \subseteq \mathcal{G}(U).$$

Com os mapas de restrição vindo do feixe $\mathcal{G}$, vemos que $(\mathrm{Im}\phi)_{pr}$ é um pré-feixe mas não é necessariamente um feixe.

Para ilustrar isso, considere $X = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, como uma variedade complexa, $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, $\mathcal{G} = \mathcal{O}^*_X$ e $\phi = \exp : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}^*_X$. Nós usamos o fato de que $\exp(2\pi i\cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ é um recobrimento. Temos $g \in \mathcal{O}^*_X(X)$ dada por $g(z) = z$. Sejam $U_+ = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ e $U_- = \mathbb{C}\backslash[0, \infty)$, tais que $X = U_- \cup U_+$, e sejam $g_+ = r_{U_+,X}(g)$ e $g_- = r_{U_-,X}(g)$. U_+ e U_- são simplesmente conexos, então existe levantamentos (holomorfos) $f_\pm : U_\pm \to \mathbb{C}$, $f_\pm \in \mathcal{O}_X(U_\pm)$ tais que

$$\exp(f_+) = g_+, \quad \exp(f_-) = g_-.$$

Isso é dizer que $g_+ \in \mathrm{Im}(\exp)(U_+)$ e $g_- \in \mathrm{Im}(\exp)(U_-)$ e

$$r_{U_-\cap U_+, U_+}(g_+) = r_{U_-\cap U_+, U_-}(g_-) = r_{U_-\cap U_+, X}(g),$$

então se $(\mathrm{Im}(\exp))_{pr}$ fosse um feixe, existiria um elemento $f \in \mathcal{O}_X(X)$, $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, tal que $\exp(f(z)) = z$, o que é impossível por $\mathbb{C}^*$ ser simplesmente conexo.

Definição 4.9. Seja $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de feixes. O **feixe imagem** $\mathcal{I}m\phi$ é definido pelo seguinte. Para $U \subseteq X$, $(\mathcal{I}m\phi)(U) \subseteq \mathcal{G}(U)$ é o subgrupo dado pela condição que $g \in (\mathcal{I}m\phi)(U)$ se e somente se para todo $x \in U$, existe uma vizinhança $V \in x$ e $f_V \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\phi_V(f_V) = r_{V,U}(g)$.

Observamos que $\mathcal{I}m\phi$ é um sub-feixe de $\mathcal{G}$.

Definição 4.10. Seja $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de feixes de grupos abelianos. O mapa

$$U \mapsto \mathcal{G}(U)/\phi_U(\mathcal{F}(U)) = \operatorname{coker}(\phi_U)$$

com restrições $r_{V,U} : \operatorname{coker}(\phi_U) \to \operatorname{coker}(\phi_V)$ induzidas pelas restrições em $\mathcal{G}$ define um pré-feixe, chamado o pré-feixe co-núcleo e denotado por $\overline{\mathcal{coker}}(\phi)$.

Para qualquer pré-feixe $\overline{\mathcal{F}}$ podemos definir um **feixe associado** $\mathcal{F}$ a $\overline{\mathcal{F}}$. Dado $U \subseteq X$, $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ se e somente se

$$\sigma : U \to \bigsqcup_{x \in U} \overline{\mathcal{F}}_x,$$

tal que $\sigma(x) \in \overline{\mathcal{F}}_x$, para todo $x \in U$, e tal que para todo $x \in U$, existe uma vizinhança $V \subseteq U$ de x e uma seção do pré-feixe $s \in \overline{\mathcal{F}}(V)$ tal que $\sigma(y) = s_y \in \overline{\mathcal{F}}_x$, para todo $y \in V$.

Exercício 4.1. Seja $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de feixes. Seja $\mathcal{coker}\phi$ o feixe associado ao pré-feixe co-núcleo de ϕ. Demonstre que uma seção $\sigma \in \mathcal{coker}\phi(U)$ é equivalente a:

- Uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$,
- Elementos $\sigma_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ tais que em cada $U_\alpha \cap U_\beta$,

$$s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} - \sigma_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} \in \phi_{U_\alpha \cap U_\beta}(\mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta)).$$

Definição 4.11. Seja $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de feixes.

1. ϕ é **injetivo** se $\mathcal{ker}\phi = 0$, ou se é igual ao feixe trivial. Isso é equivalente a $\ker \phi_U = \{0\}$ para todo $U \subseteq X$.
2. ϕ é **sobrejetivo** se $\mathcal{I}m\phi = \mathcal{G}$.
3. A composição de morfismos

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

é uma **sequência** se $\psi \circ \psi = 0$, o que é equivalente a $\mathcal{I}m\phi \subseteq \mathcal{ker}\psi$, ou que $\operatorname{Im}\phi_U \subseteq \ker \psi_U$ para todo $U \subseteq X$. A sequência é **exata** no ponto $\mathcal{G}$ se $\mathcal{I}m\phi = \mathcal{ker}\psi$.

4. Uma sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

é uma **sequência exata curta** se for exata nos três pontos. Isso é dizer, no ponto $\mathcal{F}$, temos $\mathcal{ker}\phi = 0$. No ponto $\mathcal{G}$, $\mathcal{I}m\phi = \mathcal{ker}\psi$, e no ponto $\mathcal{H}$, $\mathcal{I}m\psi = \mathcal{H}$.

Exemplo. Para X uma variedade complexa, consideramos a sequência

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0.$$

Aqui, i é o mapa de inclusão de funções localmente constantes, com valores em $\mathbb{Z}$, em funções holomorfas. Esse morfismo é injetivo. O mapa exp manda uma função f para $\exp(2\pi i f)$. Se, para $f \in \mathcal{O}_X(U)$, $e^{2\pi i f} \equiv 1$, então $f(z) \in \mathbb{Z}$ para todo $z \in U$. Isso é dizer que $f \in \underline{\mathbb{Z}}(U)$. Então, a sequência é exata nos pontos $\underline{\mathbb{Z}}$ e $\mathcal{O}_X$. Para $U \subseteq X$ e $f \in \mathcal{O}_X^*(U)$, seja $x \in U$ e $V \subseteq U$ uma vizinhança simplesmente conexa de x. O mapa $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ é o recobrimento universal, então existe um levantamento $g : V \to \mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\
V \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f|_V"'] & \mathbb{C}^*
\end{tikzcd}$$

tal que $\exp(2\pi i g) = f|_V$, então $f \in (\mathit{Im} \exp)(U)$, e a sequência é exata em $\mathcal{O}_X^*$.

Exemplo. Seja X uma variedade complexa. Consideramos $\mathscr{E}_X^{p,q}$, o feixe de (p,q)-formas suaves em X, e Ω_X^p, o feixe de p-formas holomorfas em X. Isso é dizer, $\Omega_X^p = \ker \bar{\partial}$, considerando $\bar{\partial} : \mathscr{E}_X^{p,0} \to \mathscr{E}_X^{p,1}$ um morfismo de feixes. Temos uma sequência exata longa

$$0 \longrightarrow \Omega_X^p \xrightarrow{i} \mathscr{E}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{E}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{E}_X^{p,2} \longrightarrow \cdots$$

Essa sequência é exata no ponto Ω_X^p pois i é a inclusão de formas holomorfas em formas suaves. É exata em $\mathscr{E}_X^{p,0}$ pois $\ker \bar{\partial}$ é por definição a imagem da inclusão anterior. No ponto $\mathscr{E}_X^{p,q}$ para $q > 0$, se $\alpha \in \mathscr{E}_X^{p,q}(U)$ satisfaz $\bar{\partial}\alpha = 0$, então para qualquer $x \in U$, seja $V \subseteq U$ um polidisco em coordenadas locais. Então, pelo $\bar{\partial}$-Lema de Poincaré, existe $\beta \in \mathscr{E}_X^{p,q-1}(V)$ tal que $\bar{\partial}\beta = \alpha|_V$. Então $\bar{\partial} = \mathit{Im}\,\bar{\partial}$ e a sequência é exata em todos os pontos. Isso foi a motivação para a longa prova do $\bar{\partial}$-Lema de Poincaré.

Seja

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{p,q} &= \ker\{\bar{\partial} : \mathscr{E}_X^{p,q} \longrightarrow \mathscr{E}_X^{p,q}\}, \\
\mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{p,q}(U) &= \{\alpha \in \mathscr{E}^{p,q}(U) \mid \bar{\partial}\alpha = 0\},
\end{aligned}$$

para todo $U \subseteq X$ aberto. Então, temos sequências exatas curtas

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{p,q-1} \xrightarrow{i} \mathscr{E}_X^{p,q-1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{p,q} \longrightarrow 0.$$

Deixamos como um exercício mostrar que isso é exata.

Exemplo/Exercício. Seja X uma variedade complexa e $V \subseteq X$ uma subvariedade complexa suave. Seja $\mathcal{I}_V \subseteq \mathcal{O}_X$ o feixe de funções holomorfas em X que se anulam em V. Então mostre que a sequência seguinte é exata.

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_V \xrightarrow{i} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_V \longrightarrow 0.$$

Exercício. Demonstre que a sequência de feixes $\mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ é exata se e somente se para todo $x \in X$ o homomorfismo de grupos

$$\mathcal{G}_x \xrightarrow{\psi_{(x)}} \mathcal{H}_x \longrightarrow 0$$

é exato. Demonstre que essas condições valem se e somente se para todo $x \in X$, todo $\sigma_{(x)} \in \mathcal{H}_x$ pode ser representado por um duplo (V, σ_V) para V uma vizinhança de x e $\sigma \in \mathcal{H}(V)$ tal que $\sigma_V = \psi_V(\tau_V)$ para algum $\tau_V \in \mathcal{G}(V)$.

4.2 Cohomologia de Čech

Para começar, descrevemos um problema geométrica para motivar as definições de cohomologia. Seja S uma superfície de Riemann e seja $\{p_i\}$ um subconjunto discreto de pontos distintos em S. Esse conjunto é finito se S é compacta. Suponha que para cada um desses pontos, temos uma *parte principal*. Isso é um germe em p_i de uma função mermorfa, ao menos adição por uma função holomorfa. Em coordenadas centradas em p_i,

$$\sigma_i(z) = \frac{a_n}{z^n} + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{z} + \text{holom..}$$

Isso é um elemento do quociente $\mathcal{M}_{S,p_i}/\mathcal{O}_{S,p_i}$, onde $\mathcal{M}_{S,p_i}$ é o caule de germes de funções meromorfas em p_i.

Fazemos a pergunta de se, dado os pontos $\{p_i\}$ e as partes principais $\{\sigma_i\}$, existe uma função meromorfa $\sigma \in \mathcal{M}(S)$ em S, que é holomorfa em $S \setminus \{p_i\}$ e tal que σ induz a classe $\sigma_i \in \mathcal{M}_{S,p_i}/\mathcal{O}_{S,p_i}$ em cada p_i. Isso se chama o problema de Mittag-Leffler. Esse problema obviamente tem uma resposta positiva localmente. Em $U = S \setminus \{p_i\}$, $\sigma \equiv 1$ satisfaz as condições, enquanto para num disco suficientemente pequeno e centrado no ponto p_i,

$$\sigma_i(z) = \frac{a_n}{z^n} + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{z},$$

fornece uma solução. Intepretamos a solvabilidade gloabl do problema algebricamente. Sejam $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de S, tal que haja ao máximo um ponto p_i em cada U_α, e funções $f_\alpha \in \mathcal{M}_S(U_\alpha)$ que dão soluções locais em U_α. Então sejam

$$f_{\alpha\beta} = f_\alpha - f_\beta \in \mathcal{O}_S(U_\alpha \cap U_\beta).$$

Então, nas triplo-interseções $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, $f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha} = 0$. Também, nós vemos que se é possível encontrar funções holomorfas $g_\alpha \in \mathcal{O}_S(U_\alpha)$ tais que

$$f_{\alpha\beta} = g_\alpha - g_\beta \qquad \text{em } \ U_\alpha \cap U_\beta,$$

o que é um problema parcialmente analítico e parcialmente combinatório, então o problema de Mittag-Leffler admite uma solução. Especificamente, se $f_{\alpha\beta} = f_\alpha - f_\beta = g_\alpha - g_\beta$ em $U_\alpha \cap U_\beta$ para todo α e β,

$$f_\alpha - g_\alpha = f_\beta - g_\beta.$$

Por $\mathcal{M}_S$ ser um feixe, esses dados locais determinam uma função global que, como as funções locais f_α tem as singularidades desejadas. A cohomologia de

Čech é uma uma maneira de estudar coerentemente diversas feixes e os problemas combinatoriais relacionados com coberturas.

Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{F}$ um feixe em X. Seja $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ uma cobertura aberta de X, indexada por $i \in I$. Definimos

$$U_{i_1 i_1 \dots i_k} \quad = \quad U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}$$

para $i_0, \dots, i_k \in I$.

Definição 4.12. Uma **k-co-cadeia de Čech**, com respeito a $\mathcal{U}$, é uma coleção $f = (f_{i_0 \dots i_k})$, para $i_0, i_1, \dots, i_k \in I$ distintos, onde $f_{i_0 i_1 \dots i_k} \in \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k})$. Isso é,

$$f \in \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\substack{i_0,\dots,i_k \\ \text{distintos}}} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}).$$

Definimos o operador de co-bordo

$$\delta : \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{C}^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Para $f = (f_{i_0 \dots i_k}) \in \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$,

$$\begin{aligned} (\delta f)_{i_0 \dots i_{k+1}} &\in \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{k+1}}), \\ (\delta f)_{i_0 \dots i_{k+1}} &= \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j (f_{i_0 \dots \widehat{i_j} \dots i_{k+1}}) \Big|_{U_{i_0 \cdots i_{k+1}}} \end{aligned}$$

onde $\widehat{i_j}$ significa retirar esse termo da lista para sobrar apenas $k+1$ índices. A restrição $\cdot|_{U_{i_0 \cdots i_{k+1}}}$ é de uma $k+1$-vez interseção para uma $k+2$-vez interseção. Para $k = 0$

$$\begin{aligned} \delta &: \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \\ (\delta f)_{UV} &= f_V|_{U\cap V} - f_U|_{U\cap V}. \end{aligned}$$

Para $k = 1$,

$$\begin{aligned} \delta &: \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \\ (\delta g)_{UVW} &= g_{VW} - g_{UW} + g_{UV}, \end{aligned}$$

restritas para $U \cap V \cap W$.

Definição 4.13. Um k-co-cadeia $\sigma \in \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ é um **co-ciclo** se $\delta\sigma = 0$.

Observamos que se $\sigma = (\sigma_{i_0 \dots i_k})$ é um co-ciclo, então

$$\sigma_{i_0 \dots i_q i_{q+1} \dots i_k} = -\sigma_{i_0 \dots i_{q+1} i_q \dots i_k}.$$

Definição 4.14. σ é um **co-bordo** se $\sigma = \delta\tau$ para algum $\tau \in \check{C}^{k-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Proposição 4.15.

$$\delta^2 = 0 : \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{C}^{k+2}(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

A demonstração é um exercício, não muito difícil. Seja

$$Z^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \ker\{\delta : \check{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{C}^{k+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})\},$$

o grupo de k-co-ciclos, com respeito à cobertura $\mathcal{U}$ e com valores no feixe $\mathcal{F}$, e

$$B^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) \quad = \quad \mathrm{Im}\{\delta : \check{C}^{k+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{F})\},$$

o grupo de k-co-bordos. Então $\delta^2 = 0$ implica que $B^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) \subseteq Z^k(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

Definição 4.16. O grupo quociente

$$\check{H}^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \frac{Z^k(\mathcal{U},\mathcal{F})}{B^k(\mathcal{U},\mathcal{F})}$$

é chamdo o **k-éssimo grupo de cohomologia de Čech** com coeficientes em $\mathcal{F}$ e com respeito à cobertura $\mathcal{U}$.

O caso $k = 0$ tem uma realização mais concreta. $B^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$ pois $\check{C}^{-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$. Se $\sigma = (\sigma_i) \in Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$, para $\sigma_i \in \mathcal{F}(U_i)$, então

$$0 = (\delta\sigma)_{ij} = \sigma_j - \sigma_i$$

em $U_i \cap U_j$, para todo $i, j \in I$. Isso é dizer $\sigma_i|_{U_i\cap U_j} = \sigma_j|_{U_i\cap U_j}$. $\mathcal{F}$ é um feixe, então existe um a única $\overline{\sigma} \in \mathcal{F}(X)$ tal que $\sigma_i = \overline{\sigma}|_{U_i}$. Logo, temos

$$\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$$

é igual ao grupo de seções globais (em X) do feixe $\mathcal{F}$. Em particular, independe da cobertura $\mathcal{U}$. Para $k = 1$, temos

$$\begin{aligned} Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \quad &= \quad \{\{f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)\}_{i,j\in I} \mid f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0\}, \\ B^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \quad &= \quad \left\{\{f_{ij} = g_j|_{U_{ij}} - g_i|_{U_{ij}}\}_{i,j} \mid g_i \in \mathcal{F}(U_i)\right\}, \end{aligned}$$

como vimos no problema de Mittag-Leffler.

Consideramos agora como esses grupos variam com uma mudança da cobertura. Sejam $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ duas coberturas abertas de X. $\mathcal{V}$ é um **refinamento** de $\mathcal{U}$ se para todo $\alpha \in A$, existe $i \in I$ tal que $V_\alpha \subseteq U_i$. Nesse caso, existe um mapa $r : A \to I$ tal que $V_\alpha \subseteq U_{r(\alpha)}$. r induz uma aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_r : \check{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) \quad &\longrightarrow \quad \check{C}^k(\mathcal{V},\mathcal{F}), \\ (\varphi_r f)_{\alpha_0\ldots\alpha_k} \quad &= \quad f_{r(\alpha_0)\ldots f(\alpha_k)}|_{V_{\alpha_0}\cap\cdots\cap V_{\alpha_k}} \in \mathcal{F}(V_{\alpha_0} \cap \cdots \cap V_{\alpha_k}). \end{aligned}$$

Fazemos a observação quase tautológico, que $\varphi_r \circ \delta = \delta \circ \varphi_r$, ou que o seguinte diagrama comuta :

$$\begin{tikzcd} \check{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varphi_r"] & \check{C}^{k+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[d, "\varphi_r"] \\ \check{C}^k(\mathcal{V},\mathcal{F}) \arrow[r, "\delta"] & \check{C}^{k+1}(\mathcal{V},\mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

Isso implica que $\varphi_r(Z^k(\mathcal{U}) \subseteq Z^k(\mathcal{V})$ e $\varphi_r(B^k(\mathcal{U}) \subseteq B^k(\mathcal{V})$ e que φ_r induz um homomorfismo dos grupos de cohomologia

$$\tilde{r} : \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^k(\mathcal{V}, \mathcal{F}).$$

O mapa $r : A \to I$ não é unicamente determinado. Se $r_1, r_2 : A \to I$ satisfazem $V_\alpha \subseteq U_{r_j(\alpha)}$ para $j = 1, 2$, obtemos mapas $\varphi_{r_1}, \varphi_{r_2} : \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{C}^k(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. Afirmamos que induzem o mesmo homomorfismo em cohomologia. Mais precisamente, existem, para cada $k \geq 1$, um homomorfismo $A_k : \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{C}^{k-1}(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ tal que, no diagrama seguinte,

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \check{C}^{k-1}(\mathcal{U}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \check{C}^k(\mathcal{U}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dl, dotted, "A_k"'] \arrow[d, shift right, "\varphi_{r_1}"'] \arrow[d, shift left, "\varphi_{r_2}"] & \check{C}^{k+1}(\mathcal{U}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "A_{k+1}"'] & {} \\
{} \arrow[r] & \check{C}^{k-1}(\mathcal{V}) \arrow[r, "\delta"] & \check{C}^k(\mathcal{V}) \arrow[r, "\delta"] & \check{C}^{k+1}(\mathcal{V}) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

nós temos

$$\varphi_{r_1} - \varphi_{r_2} = \delta^{\mathcal{V}} \circ A_k + A_{k+1} \circ \delta^{\mathcal{U}}.$$

Exercício. Encontrar uma fórmula explicita para A_k que satisfaz essa relação.

Proposição 4.17. *Os mapas φ_{r_1} e φ_{r_2} determinam o mesmo homomorfismo*

$$\varphi = \varphi_{r_1} = \varphi_{r_2} : \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^k(\mathcal{V}, \mathcal{F}).$$

Demonstração: Para $[f] = [f + \delta g] \in \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, onde $\delta f = 0$, definimos

$$\varphi_{r_j}[f] = [\varphi_{r_j} f] = [\varphi_{r_j} + \delta(\varphi_{r_j} g)],$$

e $\varphi_{r_2} f - \varphi_{r_1} f = \delta(A_k f)$, então $[\varphi_{r_2} f] = [\varphi_{r_1} f]$ e φ é bem definido.

Agora, relembramos que o conjunto $\{\mathcal{U}\}$ de coberturas abertas de um espaço topológico é um conjunto direcionado e, pela última proposição, a familia de grupos de cohomologia $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ com respeito às coberturas diferentes forma um sistema direcionado de grupos abelianos.

Definição 4.18. O k-éssimo grupo de cohomologia de Čech de X com valores no feixe $\mathcal{F}$ é o limite direto

$$\check{H}^k(X, \mathcal{F}) := \varinjlim \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Observamos que para toda cobertura $\mathcal{U}$, temos um homomorfismo $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^k(X, \mathcal{F})$.

Um lemento de $\check{H}^k(X, \mathcal{F})$ é representado por:

- Uma cobertura $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de X, suficientemente fina;
- Um co-ciclo $\sigma = (\sigma_{i_0 \ldots i_k}) \in \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $\delta\sigma = 0$.

Dois duplos $(\mathcal{U}, \sigma)$ e $(\mathcal{V}, \xi)$ determinam o mesmo elemento de $\check{H}^k(X, \mathcal{F})$ se, em algum refinamento comum $\mathcal{W}$ de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$, $\varphi_r(\sigma) - \varphi_{r_2}(\xi) = \delta g$, para algum $g \in \check{C}^k(\mathcal{W}, \mathcal{F})$.

Mencionamos dois pontos importantes rapidamente.

1. O Teorema de Leray diz que se a cobertura $\mathcal{U} = \{U_i\}$ satisfaz $\check{H}^k(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}, \mathcal{F}) = 0$ para todo $i_0, \ldots, i_p \in I$ e para todo $k > 0$, então
$$\check{H}^k(X, \mathcal{F}) \cong \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$
para todo k. Isso é, temos um critério para representar o limite direto por um grupo explicito.
2. Existem vários isomorfismos entre os grupos de cohomologia de Čech, para certos feixes específicos, com outros grupos de cohomologia, como os de De Rham ou Dolbeault ou os grupos de cohomologia singular.

4.3 Sequências Exatas

Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ feixes no espaço topológico X e seja $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo. Para $\mathcal{U} = \{U_i\}$ uma cobertura aberta de X, ϕ induz um homomorfismo
$$\phi_* : \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G}),$$
Se $f = (f_{i_0 \ldots i_k})$, $(\phi_* f)_{i_0 \ldots i_k} = \phi_{U_{i_0 \ldots i_k}}(f_{i_0 \ldots i_k}) \in \mathcal{G}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_k})$. O homomorfismo em co-cadeias é definida pelos homomorfismos nos grupos em $(k+1)$-vez interseções. É quase tautológico que $\delta \circ \phi_* = \phi_* \circ \delta$, e isso implica que ϕ induz um homomorfismo em cohomologia
$$\phi_* : \check{H}^k(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^k(X, \mathcal{G}).$$
Então, sejam $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ feixes em X que juntam-se numa sequência exata curta
$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \longrightarrow 0.$$
Então, pela discussão acima, obtemos uma sequência de homomorfismos de grupos
$$\check{H}^k(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\phi_*} \check{H}^k(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\psi_*} \check{H}^k(X, \mathcal{H})$$
mas isso pode ser estendida com um homomorfismo $\delta_* : \check{H}^k(X, \mathcal{H}) \to \check{H}^{k+1}(X, \mathcal{F})$ de modo de obter uma sequência exata longa dos grupos de cohomologia. Primeiro construiremos δ_*. Os morfismos ϕ e ψ induzem homomorfismos nos grupos de co-cadeias, para qualquer cobertura $\mathcal{U}$,
$$\begin{array}{ccccc}
\downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\
\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\varphi_*} & \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\psi_*} & \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \\
\downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\
\check{C}^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\phi_*} & \check{C}^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\psi_*} & \check{C}^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \\
\downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta}
\end{array} \tag{1}$$
Utilizando o exatidão da sequência de feixes, e os homomorfismos em co-cadeias, podemos definir um homomorfismo canônico
$$\delta_* : \check{H}^k(X, \mathcal{H}) \longrightarrow \check{H}^{k+1}(X, \mathcal{F}).$$
Seja $\overline{\sigma} \in \check{H}^k(X, \mathcal{H}) = \lim \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ um elemento representado por um duplo $(\mathcal{U}, \sigma = (\sigma_{i_0 \cdots i_k}))$, onde $\delta\sigma = 0$.

Lema 4.19. *Seja $\sigma \in \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ um co-cadeia em X, com valores em $\mathcal{H}$ e com respeito à cobertura $\mathcal{U}$. Então, existe um refinamento $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ tal que $\varphi_r\sigma = \psi_*\alpha \in \check{C}^k(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ para alguma co-cadeia $\alpha \in \check{C}^k(\mathcal{V}, \mathcal{G})$.*

Demonstração. O espaço X é por hipótese para-compacto, então qualquer cobertura admite um refinamento localmente finita, Supomos então que $\mathcal{U}$ é localmente finita. Logo, para todo $x \in X$, existe um conjunto finito $I_x \subseteq I$ tal que $x \in U_i$ somente se $i \in I_x$. Em particular $U_x = \bigcap_{i \in I_x} U_i$ é uma vizinhança aberto de x.

Seja $\sigma \in \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{H})$, $\sigma = (\sigma_{i_0 \cdots i_k})$ para $\sigma_{i_0 \cdots i_k} \in \mathcal{H}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_k})$. O germe em x de $\sigma_{i_0 \cdots i_k}$ é igual a zero se algum dos índices $i_0, \ldots, i_k$ não está pertencente a I_x. O homomorfismo $\psi_{(x)}$ de germes é sobrejetivo, logo se $i_0, \ldots, i_k \in I_x$, temos $\sigma_{i_0 \cdots i_k,(x)} = \psi_{(x)}(\tau_{i_0 \cdots i_k,(x)})$ para algum $\tau_{i_0 \cdots i_k,(x)} \in \mathcal{G}_x$, e pelo Exercício ***,

$$\sigma_{i_0 \cdots i_k}|_{V_x} = \psi_{V_x}(\tau_{i_0 \cdots i_k, x})$$

para $\tau_{i_0 \cdots i_k, x} \in \mathcal{G}(V_x)$, em alguma vizinhança V_x de x. Em particular, podemos supor que $V_x \subseteq U_x$. Nessa maneira, temos uma cobertura $\mathcal{V} = \{V_x\}_{x \in X}$ de X, que é um refinamento de $\mathcal{U}$. Logo, temos um mapa $r : X \to I$, tal que $V_x \subseteq U_{r(x)}$ para todo $x \in X$.

Define o co-cadeia $\alpha \in \check{C}^k(\mathcal{V}, \mathcal{G})$, com $\alpha = (\alpha_{x_0 \cdots x_k})$, por

$$\alpha_{x_0 \cdots x_k} \quad = \quad \tau_{r(x_0) \cdots r(x_k), x_0}|_{V_{x_0} \cap \cdots \cap V_{x_k}} = r_{V_{x_0} \cap \cdots \cap V_{x_k}, V_{x_0}}(\tau_{r(x_0) \cdots r(x_k), x_0})$$

Então $\psi_*\alpha$ é dado por

$$\begin{aligned}
(\psi_*\alpha)_{x_0 \cdots x_k} &= \psi_{V_{x_0} \cap \cdots \cap V_{x_k}}(r_{V_{x_0} \cap \cdots \cap V_{x_k}, V_{x_0}}(\tau_{r(x_0) \cdots r(x_k), x_0})), \\
&= r_{V_{x_0} \cap \cdots \cap V_{x_k}, V_{x_0}}(\psi_{V_{x_0} \cap \cdots \cap V_{x_k}}(\tau_{r(x_0) \cdots r(x_k), x_0})), \\
&= r_{V_{x_0} \cap \cdots \cap V_{x_k}, V_{x_0}}(\sigma_{r(x_0) \cdots r(x_k)}) \\
&= (\varphi_r\sigma)_{x_0 \cdots x_k}
\end{aligned}$$

como desejado.

Assim, na diagrama (1), o elemento $\overline{\sigma} \in \check{H}^k(X, \mathcal{H})$ pode ser representado por uma co-cadeia $\sigma \in \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{H})$, onde $\sigma = \psi_*\tau$, para $\tau \in \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G})$. Aplicamos δ a τ e $\psi_*(\delta\tau) = \delta(\psi_*\tau) = \delta\sigma = 0$, e $\delta\tau \in \ker \psi_* \subseteq \check{C}^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{G})$.

Lema 4.20. *Seja $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$ uma sequência exata curta de feixes em X e seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X. Então a sequência de grupos abelianos*

$$\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\phi_*} \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\psi_*} \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{H})$$

é exato no termo de meio.

Demonstração. Seja $\tau = (\tau_{i_0 \cdots i_k})$ tal que $\psi_{U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_k}} \tau_{i_0 \cdots i_k} = 0$ para todo $i_0, \ldots i_k$. Escrevemos $U_I = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_k}$ e $\tau_I = \tau_{i_0 \cdots i_k}$. Então, pela definição do feixe imagem, para cada I, existe uma cobertura $\{V_\alpha\}$ de U_I e seções locais $f_{I,\alpha} \in \mathcal{F}(V_\alpha)$ tal que

$$\tau_I|_{V_\alpha} = \psi_{V_\alpha}(f_{I,\alpha}) \in \mathcal{G}(V_\alpha).$$

Mas ϕ é injetivo, então em $V_\alpha \cap V_\beta$,

$$\begin{aligned} \tau_I|_{V_\alpha \cap V_\beta} = \phi_{V_\alpha \cap V_\beta}(f_{I,\alpha}|_{V_\alpha \cap V_\beta}) &= \phi_{V_\alpha \cap V_\beta}(f_{I,\beta}|_{V_\alpha \cap V_\beta}), \\ f_{I,\alpha}|_{V_\alpha \cap V_\beta} &= f_{I,\beta}|_{V_\alpha \cap V_\beta}. \end{aligned}$$

$\mathcal{F}$ é um feixe, então as seções locais $\{f_{I,\alpha}\}$ juntas definem uma única seção $f_I \in \mathcal{F}(U_I)$. Pode ser visto por um argumento parecido que $\phi_{U_I}(f_I) = \tau_I$.

Então voltamos para a construção do mapa em cohomologia. Temos $\tau \in \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ e $\delta\tau \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ que satisfaz $\psi_*(\delta\tau) = 0$. Logo, existe $\mu \in \check{C}^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tal que $\phi_*\mu = \delta\tau$. Temos $\phi_*(\delta\mu) = \delta(\phi_*\mu) = \delta(\delta\tau) = 0$, então por ϕ_* ser injetivo, $\delta\mu = 0$. Com isso nós demonstramos parte do próximo teorema.

Teorema 4.21. *Seja $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ uma sequência exata curta de feixes em X. Então, para todo $k \geq 0$, existe um homomorfismo*

$$\delta_* : \check{H}^k(X, \mathcal{H}) \longrightarrow \check{H}^{k+1}(X, \mathcal{F})$$

definido por, para $\alpha \in \check{H}^k(X, \mathcal{H})$ representada pelo par $(\mathcal{U}, \sigma)$ como acima, $\delta_*\alpha$ é representada por $(\mathcal{U}, \mu)$.

Em particular, a classe de cohomologia $\delta_*\alpha \in \check{H}^k(X, \mathcal{F})$ é independente de escolha da cobertura $\mathcal{U}$, ao menos refinamentos, e da co-cadeia τ tal que $\psi_*\tau = \sigma$.

A demonstração da última afirmação da independência das escolhas é deixado como um exercício.

Teorema 4.22. *Seja $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$ uma sequência exata curta de feixes em X. Então, a sequência de grupos de cohomologia*

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \check{H}^{k-1}(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta_*} \check{H}^k(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\phi_*} \check{H}^k(X, \mathcal{G}) \\ \xrightarrow{\psi_*} \check{H}^k(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta_*} \check{H}^{k+1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

é exata em todos os pontos.

Demonstração. Consideramos a classe $[\sigma]$ representada pelo k-co-cíclo σ. Supomos, refinando suficientemente a cobertura, que $\sigma = \psi_*\tau$. Então vimos que $\delta\tau = \phi_*\mu$, para algum $k+1$-co-cadeia $\mu \in \check{C}^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Então, defimos $\delta_*[\sigma] = [\mu]$. Se $[\mu] = 0$, então $\mu = \delta\alpha$ para alguma $\alpha \in \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Seja $\beta = \phi_*\alpha \in \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G})$. Então

$$\delta\beta = \delta(\phi_*\alpha) = \phi_*(\delta\alpha) = \phi_*\mu = \delta\tau$$

e logo $\tilde{\tau} = \tau - \beta$ é um co-cíclo : $\delta\tilde{\tau} = 0$, e define-se uma classe de cohomologia $[\tilde{\tau}] \in \check{H}^k(X, \mathcal{G})$. Assim, pelo fato de que $\psi \circ \phi = 0$,

$$\psi_*\tilde{\tau} = \psi_*\tau - \psi_*\phi_*\alpha = \psi_*\tau = \sigma,$$

e $[\sigma] = \psi_*[\tilde{\tau}]$. Isso mostra exatidão no ponto $\check{H}^k(X, \mathcal{H})$. Os outros casos são parecidos.

Exemplo. Seja Z uma superfície de Riemann. Temos os feixes $\mathcal{O}_Z$ de funções holomorfas e $\mathcal{M}_Z$ de funções meromorfas em Z. Seja $\mathcal{PP} = \mathcal{M}_Z/\mathcal{O}_Z$ o feixe quociente. Então os dados do problema de Mittag-Leffler em Z é de uma seção global $f \in \mathcal{PP}(Z) = \check{H}^0(Z, \mathcal{PP})$. O que Mittag-Leffler pergunta é se existe uma função meromorfa global em Z, $\sigma \in \mathcal{M}_Z(Z) = \check{H}^0(Z, \mathcal{M}_Z)$ que determina a seção f conforme o mapa

$$\check{H}^0(Z, \mathcal{M}_Z) \xrightarrow{\beta_*} \check{H}^0(Z, \mathcal{PP}).$$

Esse mapa é induzida pela sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{M}_Z \xrightarrow{\beta} \mathcal{M}_Z/\mathcal{O}_Z \longrightarrow 0$$

cuja sequência longa é

$$\longrightarrow \check{H}^0(Z, \mathcal{M}_Z) \xrightarrow{\beta_*} \check{H}^0(Z, \mathcal{PP}) \xrightarrow{\delta_*} \check{H}^1(Z, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow .$$

Então um dado de Mittag-Leffler, sendo uma parte principal global $f \in \mathcal{PP}(Z)$ está na imagem de β_*, que é dizer que existe uma solução do problema, se e somente se $\delta_* f = 0 \in \check{H}^1(Z, \mathcal{O}_Z)$. Podemos verificar que nesse caso $(\delta_* f)_{ij} = f_i - f_j$ e isso é zero em $\check{H}^1(Z, \mathcal{O}_Z)$ se $(\delta_* f)_{ij} = g_i - g_j$, para $g_i \in \mathcal{O}_Z(U_i)$. Como na descrição inicial do problema de Mittag-Leffler, vemos que uma solução global é dado por $f = f_i - g_i$, em cada U_i.

Exemplo. Seja X uma variedade complexa e $Z \subseteq X$ uma subvariedade complexa. Consideramos os feixes $\mathcal{O}_X$ de funções holomorfas em X, $\mathcal{O}_Z$ de funções holomorfas em Z e $\mathcal{I}_Z$ de funções holomorfas em X que se anulam em Z. Obtemos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0.$$

Observamos que esses feixes são consideradas no espaço topológico X. Por exemplo, para $U \subseteq X$ aberto,

$$\mathcal{O}_Z(U) = \begin{cases} \mathcal{O}_Z(U \cap Z) & \text{se } U \cap Z \neq \emptyset, \\ \{0\} & \text{se } U \cap Z = \emptyset. \end{cases}$$

$\mathcal{O}_Z$ é o feixe quociente $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Z$ em X. Uma pergunta natural é sobre a extendabilidade de funções holomorfas de Z para X. Dada uma função holomorfa f em Z, será que existe uma função holomorfa global σ em X tal que $f = \sigma|_Z$. Uma função holomorfa em Z define uma seção global, em X, do feixe $\mathcal{O}_Z$. Temos $f \in \mathcal{O}_Z(X) = \check{H}^0(X, \mathcal{O}_Z)$. A sequencia exata curta induz uma sequência exata longa em cohomologia

$$0 \longrightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{I}_Z) \longrightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{r} \check{H}^0(X, \mathcal{O}_Z) \xrightarrow{\delta_*} \check{H}^1(X, \mathcal{I}_Z) \longrightarrow .$$

Então, $f = \sigma|_Z \in \mathrm{Im}(r)$ se e somente se $\delta_*(f) = 0 \in \check{H}^1(X, \mathcal{I}_Z)$. Não falaremos mais sobre isso agora, mas se $Z \subseteq X$ é uma hiper-superfície (ou mais geralmente um divisor) podemos entender bem o grupo $\check{H}^1(X, \mathcal{I}_Z)$.

4.4 Os isomorfismos de De Rham e de Dolbeault

Seja X uma variedade diferenciável. Para $k \geq 0$, seja $\mathscr{E}_X^k$ o feixe de k-formas suaves em X. Temos

$$\mathscr{E}_X^k(U) = \Gamma(U, \Lambda^k T^* X).$$

Proposição 4.23. *Para todo $p \geq 1$, $\check{H}^p(X, \mathscr{E}_X^k) = \{0\}$.*

Observamos que isso não é o grupo de cohomologia de De Rham. Esse é o grupo de Čech, com coeficientes no feixe $\mathscr{E}_X^k$.

Demonstração. Seja $[\sigma]$ um elemento de $\check{H}^p(X, \mathscr{E}_X^k)$ representado pela cobertura $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ e p-co-cíclo $\sigma = (\sigma_{i_0 \cdots i_p})$, para $\sigma_{i_0 \cdots i_p} \in \mathcal{E}_X^k(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p})$ com $\delta\sigma = 0$. Supomos que $\mathcal{U}$ é localmente finita. Seja $\{\rho_i\}$ uma partição de unidade subordenada à cobertura $\mathcal{U}$. Isso é dizer que

1. $\operatorname{supp}(\rho_j) \subseteq U_j$ para todo $j \in I$,
2. para todo $x \in X$, $x \in \operatorname{supp}(\rho_j)$ para apenas finitamente elementos $j \in I$.
3. $\sum_j \rho_j \equiv 1$.

Seja, para $i_0, \ldots, i_{p-1} \in I$,

$$\begin{aligned} \tau_{i_0 \cdots i_{p-1}} &= \sum_{j \in I} \rho_j \sigma_{j i_0 \cdots i_{p-1}} \in \mathscr{E}_X^k(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{p-1}}), \\ \tau = (\tau_{i_0 \cdots i_{p-1}}) &\in \check{C}^{p-1}(\mathcal{U}, \mathscr{E}_X^k). \end{aligned}$$

Inicialmente a forma $\rho_j \sigma_{j i_0 \cdots i_{p-1}}$ é definida apenas em $U_j \cap U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{p-1}}$ mas estende-se (por 0) para $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{p-1}}$. Então

$$\begin{aligned} (\delta\tau)_{i_0 \cdots i_p} &= \sum_{l=0}^{p} (-1)^l \tau_{i_0 \cdots \widehat{i_l} \cdots i_p}, \\ &= \sum_{l=0}^{p} (-1)^l \sum_j \rho_j \sigma_{j i_0 \cdots \widehat{i_l} \cdots i_p}, \\ &= \sum_j \rho_j \sum_{l=0}^{p} (-1)^l \sigma_{j i_0 \cdots \widehat{i_l} \cdots i_p}. \end{aligned}$$

Agora, $\delta\sigma = 0$ implica que $(\delta\sigma)_{j i_0 \cdots i_p} = \sigma_{i_0 \cdots i_p} + \sum_{l=0}^{p} (-1)^{l+1} \sigma_{j i_0 \cdots \widehat{i_l} \cdots i_p} = 0$. Isso pode ser substituido na expressão anterior para mostrar que

$$(\delta\tau)_{i_0 \cdots i_p} = \sum_j \rho_j \sigma_{i_0 \cdots i_p} = \sigma_{i_0 \cdots i_p}.$$

Logo, $\check{B}^p(\mathcal{U}, \mathscr{E}_X^k) = \check{Z}^p(\mathcal{U}, \mathscr{E}_X^k)$ e $\check{H}^p(X, \mathscr{E}_X^k) = 0$, como desejado.

Proposição 4.24. *Seja X uma variedade complexa e $\mathscr{E}_X^{p,q}$ o feixe de (p,q)-formas suaves em X. Então, se $k \geq 1$,*

$$\check{H}^k(X, \mathscr{E}_X^{p,q}) = 0.$$

A demonstração é igual, só utilizando uma partição de unidade.

Agora colecionamos alguns fatos sobre vários grupos diferentes de cohomologia. Sejam X uma variedade diferenciável e $\underline{\mathbb{Z}}$ o feixe de funções localmente constantes com valores em $\mathbb{Z}$. Então, afirmamos que para todo $k \geq 0$,

$$\check{H}^k(X, \underline{\mathbb{Z}}) \cong H^k_{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}).$$

O grupo à esquerda é o de cohomologia de Čech com valores em $\underline{\mathbb{Z}}$. O grupo à direta é de cohomologia singular, que é um objeto fundamental de uma variedade diferenciável, e é muito estudada na área de topología algébrica. A demonstração disso é omitida.

Sejam X uma variedade diferenciável e $d : \mathscr{E}^k(X) \to \mathscr{E}^{k+1}(X)$ a derivada exterior em k-formas. Temos $d^2 = 0$. O **k-éssimo grupo de cohomologia de De Rham** é definida por

$$H^k_{dR}(X) = \frac{\ker\{d : \mathscr{E}^k(X) \to \mathscr{E}^{k+1}(X)\}}{d\mathscr{E}^{k-1}(X)} = \frac{Z^k_d(X)}{B^k_d(X)}.$$

Seja $\underline{\mathbb{R}}$ o feixe de funções reais localmente constantes.

Teorema 4.25. *(Isomorfismo de De Rham) Os grupos de cohomologia de Čech, com valores em $\underline{\mathbb{R}}$, são isomorfos aos grupos de cohomologia de De Rham. Isso é, para todo $k \geq 0$,*

$$\check{H}^k(X, \underline{\mathbb{R}}) \cong H^k_{dR}(X).$$

Um fato que utilizaremos (sem demonstração) é o Lema de Poincaré : Se $B(0,r) \subseteq \mathbb{R}^n$, então para todo $k \geq 1$, $H^k_{dR}(B(0,r)) = \{0\}$. Isso é dizer que se $\alpha \in \mathscr{E}^k(B(0,r))$ satisfaz $d\alpha = 0$, então existe $\beta \in \mathscr{E}^{k-1}(B(0,r))$ tal que $\alpha = d\beta$. Deixaremos isso como um exercício.

Proposição 4.26. *Seja X uma variedade diferenciável. Sejam $\mathscr{E}^k_X$ o feixe de k-formas suaves em X, para $k \geq 0$, e $\mathcal{Z}^k_d$ o feixe de k-formas suaves d-fechadas em X. Primeiro, observamos que para $k = 0$, $\mathcal{Z}^0_d = \underline{\mathbb{R}}$. Então, para todo $k \geq 1$, a sequência seguinte é exata*

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}^{k-1}_d \xrightarrow{r} \mathscr{E}^{k-1}_X \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^k_d \longrightarrow 0.$$

Demonstração. A prova é quase tautológica. A inclusão de formas fechadas em todas as formas é obviamente injetiva. No segundo ponto, o núcleo de d é exatamente a imagem de i, pela definição de $\mathcal{Z}^{k-1}_d$. A exatidão no terceiro ponto segue pelo Lema de Poicaré. Para uma k-forma fechada α em algum conjunto aberto $U \subseteq X$, para qualquer ponto $x \in U$, existe uma vizinhança V de x difeomorfa a $B(0,1)$, na qual $\alpha|_V = d\beta$. Isso é dizer que $\alpha \in \mathit{Imd}(U)$ como desejado.

Demonstração do Teorema 4.25 Primeiro observamos que para $k = 1$, a sequência

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{R}} \xrightarrow{i} \mathscr{E}^0_X \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^1_X \longrightarrow 0.$$

A sequência exata curta de feixes na Prop. 4.26 induz uma sequência exata longa dos grupos de cohomologia de Čech, com abuso de notação óbvio,

$$0 \longrightarrow \check{H}^0(\mathcal{Z}^{k-1}_d) \longrightarrow \check{H}^0(\mathscr{E}^{k-1}_X) \xrightarrow{d} \check{H}^0(\mathcal{Z}^k_d) \xrightarrow{\delta_*} \check{H}^1(\mathcal{Z}^{k-1}_d) \longrightarrow \check{H}^1(\mathscr{E}^{k-1}_X) = 0.$$

Com isso podemos concluir primeiro que δ_* é sobrejetivo. Além disso, $\check{H}^0(\mathcal{Z}^k_X) = \mathcal{Z}^k_X(X)$ é o grupo de k-formas fechadas, globalmente definidas em X e $\check{H}^0(\mathscr{E}^{k-1}_X)$

é o espaço de todas as $k-1$-formas em X. Logo

$$\begin{aligned}\check{H}^1(\mathscr{Z}_d^{k-1}) &\cong \frac{\check{H}^0(\mathscr{Z}_X^k)}{\ker \delta_*} \cong \frac{\check{H}^0(\mathscr{Z}_X^k)}{\mathrm{Im}(d)},\\ &= \frac{\ker\{d : \mathscr{E}^k(X) \to \mathscr{E}^{k+1}(X)\}}{d\mathscr{E}^{k-1}(X)},\\ &= H^k_{dR}(X).\end{aligned}$$

As sequências exatas curtas $0 \longrightarrow \mathscr{Z}_d^{k-i} \longrightarrow \mathscr{E}_X^{k-i} \longrightarrow \mathscr{Z}_d^{k-i+1} \longrightarrow 0$ induzem sequências exatas, lembrando que $\check{H}^i(\mathscr{E}_X^j) = \{0\}$ para $i \geq 1$,

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \check{H}^1(\mathscr{Z}_d^{k-1}) &\xrightarrow{\delta_*} \check{H}^2(\mathscr{Z}_d^{k-2}) \longrightarrow 0,\\ &\vdots\\ 0 \longrightarrow \check{H}^{k-1}(\mathscr{Z}_d^{1}) &\xrightarrow{\delta_*} \check{H}^k(\mathscr{Z}_d^{0}) \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

então todos os homomorfismos δ_* são isomorfismos e

$$H^k_{dR}(X) \cong \check{H}^1(\mathscr{Z}_X^{k-1}) \cong \check{H}^2(\mathscr{Z}_X^{k-2}) \cong \cdots \cong \check{H}^k(\mathscr{Z}_d^0) = \check{H}^k(X, \underline{\mathbb{R}}).$$

Utilizaremos esse isomorfismo, e o de Dolbeault, constantemente, até o ponto de identificar os grupos e deixar o "check" da notação.

Agora, sejam X uma variedade complexa de dimensão n e $\mathscr{E}_X^{p,q}$ o feixe de formas suaves de tipo (p,q). Para $u \subseteq X$, um elemento $\alpha \in \mathscr{E}_X^{p,q}(U)$ admite a expressão

$$\alpha = \sum_{I,J} \alpha_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

somando apenas sobre multi-índices I e J de comprimentos p e q respetivamente. O operador $\bar{\partial}$ define um morfismo de feixes

$$\bar{\partial} : \mathscr{E}_X^{p,q} \longrightarrow \mathscr{E}_X^{p,q+1}.$$

A cohomologia de Dolbeault de bi-grau (p,q) é o quociente

$$H^{p,q}_{\bar{\partial}}(X) = \frac{\ker\{\bar{\partial} : \mathscr{E}_X^{p,q}(X) \longrightarrow \mathscr{E}_X^{p,q+1}(X)\}}{\bar{\partial}\mathscr{E}_X^{p,q-1}(X)}.$$

Para $q = 0$, $\bar{\partial}$ é dado localmente por

$$\bar{\partial}\alpha = \sum_I \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_I}{\partial \bar{z}^j} d\bar{z}^j \wedge dz^I.$$

Os elementos $d\bar{z}^j \wedge dz^I$ definem uma base para $\Lambda_x^{p,1}$ para cada ponto x no domínio da carta, então $\bar{\partial}\alpha = 0$ se e somente se $\partial\alpha_I/\partial\bar{z}^j = 0$ para todo $j = 1, \ldots n$, o que é equivalente a todos os coeficientes locais α_I serem funções holomorfas. Uma $(p,0)$-forma no núcleo de $\bar{\partial}$ é chamada uma p-forma holomorfa. O feixe de p-formas holomorfas é denotado por $\Omega_X^p = \ker\{\bar{\partial} : \mathscr{E}_X^{p,0} \to \mathscr{E}_X^{p,1}\}$.

Teorema 4.27. *(Isomorfismo de Dolbeault) Seja X uma variedade complexa. Então, para todo $p, q \geq 0$, existe um isomorfismo*

$$\check{H}^q(X, \Omega^p) \cong H^{p,q}_{\bar{\partial}}(X).$$

Demonstração. A prova é muito parecida com a do teorema de De Rham. Já vimos que o $\bar{\partial}$-Lema de Poincaré implica que

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}^{p,q-i-1}_{\bar{\partial}} \xrightarrow{i} \mathscr{E}^{p,q-i-1}_X \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{Z}^{p,q-i}_{\bar{\partial}} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta, para todo $0 \leq i \leq q-1$. Também, observamos que $\Omega^p_X = \mathcal{Z}^{p,0}_{\bar{\partial}}$. Logo, as sequências exatas longas em cohomologia nos dão

$$\begin{aligned} \check{H}^1(\mathcal{Z}^{p,q-1}_{\bar{\partial}}) &\cong \frac{\check{H}^0(\mathcal{Z}^{p,q}_{\bar{\partial}})}{\bar{\partial}\mathcal{Z}^{p,q-1}(X)} = H^{p,q}_{\bar{\partial}}(X), \\ \check{H}^i(\mathcal{Z}^{p,q-i}_{\bar{\partial}}) &\cong \check{H}^{i+1}(\mathcal{Z}^{p,q-i-1}_{\bar{\partial}}), \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq q-1$. Logo,

$$H^{p,q}_{\bar{\partial}}(X) \cong \check{H}^1(\mathcal{Z}^{p,q-1}_{\bar{\partial}}) \cong \check{H}^q(X, \mathcal{Z}^{p,0}_{\bar{\partial}}) = \check{H}^q(X, \Omega^p_X).$$

4.5 Aplicações

Agora podemos considerar algumas aplicações elementares desses resultados. Todos os resultados podem ser generalizados, mas o que veremos vai servir para justificar e motivar o que já vimos sobre feixes e cohomologia.

Definição 4.28. Seja M uma variedade complexa. Um subconjunto $X \subseteq M$ é uma hipersuperfícies analítica se para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subseteq M$ de p e uma função holomorfa $f_U \in \mathcal{O}_X(U)$ não identicamente nula tal que

$$U \cap X = Z(f_U) = \{x \in U \mid f_U(x) = 0\}.$$

Teorema 4.29. *Para $M = \mathbb{C}^n$ e $X \subseteq \mathbb{C}^n$ uma hipersuperfície analítica, então existe uma função inteira $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}^n)$ tal que $X = Z(f)$.*

Esse resultado será o ponto final de uma discussão maior. Seja $X \subseteq M$ uma hipersuperfície analítica. Então X é um subconjunto fechado. Se $p \notin X$, pode pegar $U = M \setminus X$, aberto, e $f_U \equiv 1$. Então $Z(f_U) = \emptyset = (M \setminus X) \cap X$.

Para $p \in X$, $f \in \mathcal{O}_M(U)$, com $p \in U$. O anel de germes $\mathcal{O}_{M,p}$ é um domínio de fatoração única, então

$$\underline{f}_p = h.f_1^{k_1} \cdots f_N^{k_N}$$

para $f_i \in \mathcal{O}_{M,p}$ irredutível, com $k_i > 0$ e $h(p) \neq 0$. Os fatores f_i são unicamente determinadas ao menos troca de ordem e multiplicação por unidades. Suponho que $k_i = 1$ para cada i, porque isso não vai afeitar o (germe do) conjunto $Z(f_U)$. Para algum ponto $q \in U$ e uma outra vizinhança $V \subseteq M$, com uma outra função $g \in \mathcal{O}_M(V)$ tal que $X \cap V = \{x \in V \mid g(x) = 0$. O germe de g em q tem uma decomposição em irredutíveis $\underline{g}_q = h'.g_1 \cdots g_M$. Os germes f_i iniciais são coprimos em p, logo são coprimos em todo ponto numa vizinhança de p, logo pode ser supostos coprimos no ponto q. Pelo Nullstellensatz Fraco, $\underline{g}_q$ se anula em $\underline{f_i}_q$, então $\underline{f_i}_q$ divide $\underline{g}_q$, para todo i e logo $\underline{f}_q$ divide g. Pelo mesmo argumento $\underline{g}_q | \underline{f}_q$ para todo $q \in U \cap V$. Concluimos que o divisor é não-nula e

$$\frac{f}{g} \in \mathcal{O}_M^*(U \cap V)$$

são funções localmente definindo a hipersuperfície X. Estendendo isso, se $X \subseteq M$ é uma hipersuperfície analítica, então obtemos uma cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_i\}$, funções $f_i \in \mathcal{O}_M(U_i)$ escolhidas tais que $X \cap U_i = Z(f_i)$ e tais que

$$g_{ij} = f_i/f_j \in \mathcal{O}_M^*(U_i \cap U_j).$$

As funções g_{ij} satisfazem

- $g_{ii} \equiv 1$ em U_i,
- $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$ em $U_i \cap U_j$,
- $g_{jk} g_{ik}^{-1} g_{ij} \equiv 1$ em $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Interpretamos essa última condição como $g = (g_{ij})$ sendo pertencente ao grupo de 1-co-cíclos de Čech em M, com valores no feixe $\mathcal{O}_M$:

$$g = g(g_{ij}) \in \ker\{\delta : C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_M^*) \longrightarrow C^2(\mathcal{U}, \mathcal{O}_M^*)\}.$$

Isso induz um elemento do grupo de cohomologia

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_M^*) = \frac{\ker\{\delta : C^1(\mathcal{O}_M^*) \longrightarrow C^2(\mathcal{O}_M^*\}}{\mathrm{Im}\{\delta : C^0(\mathcal{O}_M^*) \longrightarrow C^1(\mathcal{O}_M^*)\}}$$

e logo um elemento que denotamos por $[X] \in H^1(M, \mathcal{O}_M^*)$.

Consideramos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{O}_M \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_M \longrightarrow 1.$$

Obtemos uma sequência exata longa em cohomologia

$$\cdots \longrightarrow H^1(M, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{O}_M) \xrightarrow{\exp_*} H^1(M, \mathcal{O}_M^*) \xrightarrow{\delta_*} H^2(M, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \cdots.$$

Agora podemos voltar para o exemplo onde $M = \mathbb{C}^n$. Esse espaço é contratível, então $H^1(\mathbb{C}^n, \underline{\mathbb{Z}}) \cong H^2(\mathbb{C}^n, \underline{\mathbb{Z}}) \cong \{0\}$, e logo $\exp_*$ é um isomorfismo. Além disso, $H^1(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) \cong H^{0,1}_{\bar{\partial}}(\mathbb{C}^n) \cong \{0\}$, pelo isomorfismo de Dolbeault e o $\bar{\partial}$-Lema de Poincaré. Assim, concluimos que

$$H^1(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^*) \cong \{1\}.$$

A classe de cohomologia induzida por uma hipersuperfície analítica $[X] \in H^1(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^*)$ é dada pelo par $(\mathcal{U}, \sigma = (\sigma_{ij}))$, onde $\sigma_{ij} = f_i/f_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U_i \cap U_j)$. Pelo elemento em cohomologia ser trivial, temos, depois de refinar a cobertura,

$$\frac{f_i}{f_j} = (\delta g)_{ij} = \frac{g_j}{g_i}$$

em $U_i \cap U_j$, para $g_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^*(U_i)$. Logo $g_i f_i = g_j f_j$ em cada $U_i \cap U_j$, o que implica a existência de uma função holomorfa $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ tal que $f|_{U_i} = g_i f_i$ e logo tal que $X = Z(f)$.

5 Fibrados Vetoriais

5.1 Um resumo rápido sobre fibrados vetoriais complexos

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão (real) n.

Definição 5.1. Um **fibrado vetorial complexo** de posto $k \in \mathbb{N}$ é uma variedade diferencial E com uma aplicação sobrejetiva $\pi : E \to M$ que satisfazem as condições seguintes.

1. Para todo $x \in M$, existe uma vizinhança U de x e um difeomorfismo

   $$\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{C}^k$$

   tal que $\pi = \pi_1 \circ \phi$, onde $\pi_1 : U \times \mathbb{C}^k \to U$ é a projeção sobre o primeiro fator. Isso é, temos uma diagrama comutativa

   $$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{C}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

2. Para (U, φ_U) e (V, φ_V) dois desses difeomorfismos, as composições $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}$ satisfazem

   $$\begin{aligned} \varphi_U \circ \varphi_V^{-1} : U \cap V \times \mathbb{C}^k \quad &\longrightarrow \quad U \cap V \times \mathbb{C}^k, \\ (x, v) \quad &\mapsto \quad (x, g_{UV}(x)v), \end{aligned}$$

   onde $g_{UV} : U \cap V \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ é uma aplicação suave tomando valores no grupo de automorfismos lineares de $\mathbb{C}^k$.

Podemos verificar que a primeira condição implica que $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1} : (x, v) \mapsto (x, w)$ onde $v \mapsto w$ é um difeomorfismo de $\mathbb{C}^k$. Na segunda condição pedimos que esse difeomorfismo seja linear em $\mathbb{C}^k$, e que varie suavamente com o ponto base $x \in U \cap V$. Os mapas g_{UV} são chamados as **funções de transição** do fibrado.

Exemplo. O primeiro exemplo é de um produto $E = M \times \mathbb{C}^k$, com projeção sobre a primeira fator. Isso vamos chamar um fibrado vetorial **trivial**. A primeira condição na definição acima é que todo fibrado vetorial é localmente (em M) trivial. Uma aplicação φ do tipo na definição será chamada uma trivialização local do fibrado.

Exemplo. Seja M uma variedade diferenciável e TM o seu fibrado tangente. Como sugerido pelo nome, TM tem a estrutura de um fibrado vetorial (real). Um elemento $X \in T_pM$ é uma derivação em germes de funções em $\pi(X) = p \in M$, assim definindo a aplicação $\pi : TM \to M$. Seja (U, x) uma carta de coordenadas em M. Então, para todo $p \in U$, $\{\partial/\partial x^i|_p\}$ é uma base para T_pM e X escreve-se unicamente como $X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} a^i$, para $a^i \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\begin{aligned} \varphi_U ; \pi^{-1}(U) \quad &\longrightarrow \quad U \times \mathbb{R}^n, \\ X = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} a^i \quad &\mapsto \quad (p = \pi(X), v^t = (a^1, \ldots, a^n)). \end{aligned}$$

Consideramos $v \in \mathbb{R}^n$ como um vetor de coluna vertical. Se $(U, \psi_U = (x^i))$ e $(V, \psi_V = (y^j))$ são duas cartas de corrdenadas,

$$\begin{aligned}
\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}(p, v) &= \varphi_U \left(\sum_i \frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_p a^i \right), \\
&= \varphi_U \left(\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p \frac{\partial x^j}{\partial y^i} a^i \right), \\
&= (p, w = \mathrm{Jac}(\psi_U \circ \psi_V^{-1})v),
\end{aligned}$$

então nesse caso o fibrado pode ser trivializado nos mesmos subconjuntos abertos que são os domínios das cartas das coordenadas, e as funções de transição são dadas por

$$g_{UV} = \mathrm{Jac}(\psi_U \circ \psi_V^{-1}) \circ \psi_V : U \cap V \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}).$$

Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial complexo numa variedade diferenciável. Seja $\mathcal{U} = \{U_i\}$ uma cobertura de M e $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^k$ trivializações de E, com funções de transição $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$.

Proposição 5.2. *As funções* $\{g_{ij}\}$ *satisfazem*

- $g_{ii} = \mathrm{Id} \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ *em* U_i,
- $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$ *e,* $U_i \cap U_j$,
- $g_{ij} \cdot g_{jk} = g_{ik}$ *em* $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Demonstração. Provamos apenas a última dessas afirmações. Temos

$$\begin{aligned}
\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_j \circ \varphi_k^{-1}(x, v) &= \varphi_i \circ \varphi_k^{-1}(x, v), \\
\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x, g_{jk} \cdot v) &= (x, g_{ij} \cdot g_{jk} \cdot v) = (x, g_{ik} \cdot v),
\end{aligned}$$

e logo $g_{ij} \cdot g_{jk} = g_{ik}$.

Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial complexo de posto k. Para cada ponto $x \in M$, o conjunto $E_x = \pi^{-1}(x)$, que chamamos a **fibra** de E em x, naturalmente admite a estrutura de um espaço vetorial complexo de dimensão k. Seja $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$ uma trivialização local de E, numa vizinhança U de x. Para $\xi, \mu \in E_x$, definimos $\xi + \mu = \varphi^{-1}(\varphi(\xi) + \varphi(\mu))$, aqui identificando $\varphi(\xi) = (x, v)$ com $v \in \mathbb{C}^k$.

Proposição 5.3. *A soma* $\xi + \mu \in E_x$ *é bem definida independente da escolha de trivialização local.*

Definição 5.4. Um fibrado vetorial complexo de posto $k = 1$ é chamado um fibrado de linha (complexa).

Definição 5.5. Sejam E, F fibrados vetoriais em M. Um **morfismo** de E em F é uma aplicação diferenciável $\sigma : E \to F$ tal que

1. $\pi_E = \pi_F \circ \sigma$;

2. $\sigma_x : E_x \to F_x$ seja linear, para todo $x \in M$;

3. o *posto* de σ_x independa do ponto $x \in M$.

Um **isomorfismo** de fibrados é um morfismo bijetivo.

Fazemos a pergunta de como criar novos fibrados a partir de antigos. As duas maneiras principais para fazer isso é por mudar a base M ou por mudar as fibras E_x.

Seja $f : M \to N$ uma aplicação suave entre duas variedades diferenciáveis. Seja $\pi : E \to N$ um fibrado vetorial em N de posto k. Seja

$$f^*M = \{(x, v) \in M \times E \mid f(x) = \pi(v) \in N\}.$$

Também consideramos a aplicação $\bar{\pi} : f^*E \to M$ por $\bar{\pi}(x, v) = x$. Afirmamos que o duplo $(f^*E, \bar{\pi})$ determine a estrutura de um fibrado vetorial complexo em M de posto k.

Exercício. Utilize o teorema de função implítica para mostrar que se $\dim N = n$, f^*E é uma subvariedade suave de $M \times E$ de codimensão n. Demonstre f^*E é um fibrado vetorial complex complexo de posto k em M. Demonstre que se $\pi : E \to N$ pode ser trivializado em $U \subseteq N$, então $f^*E \to M$ pode ser trivializado no conjunto aberto $f^{-1}(U) \subseteq M$. Se E é trivializado em U e V, e f^*E em $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$, relacione as funções de transição para E e f^*E.

Exemplo. Seja $\gamma : [0, 1] \to M$ uma curva suave em M. Então podemos considerar o fibrado $\gamma^*TM \to [0, 1]$,

$$\begin{tikzcd} \gamma^*TM \arrow[d] & TM \arrow[d] \\ {[0,1]} \arrow[r, "\gamma"] & M \end{tikzcd}$$

Uma seção de γ^*TM (cuja definição veremos em breve) é muitas vezes chamada um campo vetorial ao longo da curva γ.

mencione como fibrados são construidos com co-cíclos e relações de equivalência

A segunda maneira de construir novos fibrados vetoriais é continuar com a mesma base mas mudando a fibra por cima de cada ponto. Sejam E e F fibrados vetoriais em M, de postos k e l respetivamente. Podemos construir fibrados vetoriais

1. $E \oplus F \to M$, tal que a fibra seja dada por $(E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x$ para todo x. Esse é chamado o fibrado **soma direta** de E e F e é de posto $k + l$;

2. $E \otimes F \to M$, cujas fibras são $(E \otimes F)_x = E_x \otimes F_x$ e que é de posto kl;

3. $E^* \to M$ tem $(E^*)_x = (E_x)^*$ e é de posto k. Esse fibrado é chamado o **fibrado dual de** E.

4. $\Lambda^i E \to M$ é o fibrado cuja fibra no ponto $x \in M$ é $(\Lambda^i E)_x = \Lambda^i(E_x)$.

mencione como novos fibrados podem ser construidos usando representações

Definição 5.6. Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial complexo em M. Uma **seção** de E, definida no subconjunto aberto $U \subseteq M$ é uma aplicação $\sigma : U \to E$ tal que $\sigma(x) \in E_x$ para todo x em U. Isso é equivalente a $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_U$. Uma seção é suave se for suave como uma aplicação entre variedades diferenciáveis. Denotamos por $\Gamma(U, E)$ o conjunto de seções suaves de E em U.

Observamos que $\Gamma(U, E)$ é um espaço vetorial. Além disso, é um módulo sobre o anel de funções suaves complexas $C^\infty(U, \mathbb{C})$. $\Gamma(\cdot, E)$ é um feixe de C^∞_M-módulos.

Uma seção do fibrado tangente $\pi : TM \to M$ é também chamado um campo vetorial. Uma seção do fibrado $E = \Lambda^k T^* M \to M$ é uma k-forma em M. Uma seção do fibrado trivial $E = M \times M \times \mathbb{C}^k \to M$ é um mapa $\sigma : M \to M \times \mathbb{C}^k$ tal que $\sigma(x) = (x, f(x))$, para alguma função $f : M \to \mathbb{C}^k$. Nesse caso identificamos a seção σ e a função f.

Definição 5.7. Sejam $\to M$ um fibrado vetorial complexo de posto k e $U \subseteq M$ um subconjunto aberto de M. Um **referencial** de E em U é uma família (ordenada) $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ de seções $\sigma_i \in \Gamma(U, E)$, tal que para todo $x \in U$, $\{\sigma(x)\}_{i=1}^k$ é uma base de $E_x = \pi^{-1}(x)$

Se $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$ é uma trivialização local de E, e se $\{e_1, \ldots, e_k\}$ é a base canõnica de $\mathbb{C}^k$, definimos

$$\begin{aligned} \sigma_i : U &\to \pi^{-1}(U), \\ \sigma_i(x) = \varphi^{-1}(x, e_i) &\in E_x. \end{aligned}$$

Conforme a estrutura de E_x como um espaço vetorial, $\{\sigma_i(x)\}$ é uma base.

Voltamos para a discussão de fibrados associados. Sejam E e F fibrados vetoriais em M, de postos k e l respetivamente. Supomos que ambos deles podem ser trivializados nos conjuntos abertos $U_\alpha \subseteq M$. Com respeito a essas trivializações, sejam $\{g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})\}$ e $\{h_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(l, \mathbb{C})\}$ as funções de transição. Então,

1. o fibrado $E \oplus F$ pode ser trivializado em U_α, com funções de transição
$$\begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & h_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(k + l, \mathbb{C}).$$
2. $E \otimes F$ tem funções de transição $g_{\alpha\beta} \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^l)$
3. $\Lambda^i E$ tem funções de transição $\wedge^i g_{\alpha\beta} \in \mathrm{GL}(\Lambda^i \mathbb{C}^k)$.
4. Por exemplo, para $i = k = \mathrm{rk}(E)$, $\Lambda^k E$ é um fibrado de linha e tem funções de transição
$$\det(g_{\alpha\beta}) \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}).$$
5. O fibrado dual E^* tem funções de transição
$$(g_{\alpha\beta}^{-1})^t : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}(k, \mathbb{C}).$$

Demonstramos apenas a última dessas afirmações Se $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$ é uma trivialização, $\{\sigma_i(x) = \varphi^{-1}(x, e_i)\}$ é uma base induzida para E_x. O espaço dual E_x^* admite a base dual $\varepsilon^i \in E_x^*$, para $i = 1, \ldots, i$, tal que $\varepsilon^i(\sigma_j(x)) = 1$ ou 0, conforme se $i = j$ ou $i \neq j$. Para duas trivializações φ_α e φ_β tais que $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, v) = (x, g_{\alpha,\beta}(x)v)$. Temos duas referenciais locais $\{\sigma_i^\alpha\}$ e $\{\sigma_i^\beta\}$ vindos das trivializações. Se $g_{\alpha\beta} = g = (g_{ij})$, então as bases se relacionam por

$$\sigma_i^\beta = \sum_j \sigma_j^\alpha g_{ji}.$$

As bases duais $\{\varepsilon_\alpha^i\}$ e $\{\varepsilon_\beta^i\}$ são, então, relacionadas por

$$\varepsilon_\alpha^i = \sum_j \varepsilon_\beta^j g_{ij},$$

ou que

$$\varepsilon_\beta^i = \sum_j \varepsilon_\alpha^k ((g^{-1})^t)_{ji}.$$

Isso implica que as funções de transição para o fibrado dual E^* são dadas pelas funções, definidas em $U_\alpha \cap U_\beta$, $h_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta}^{-1})^t$.

Exemplo. Seja X uma variedade complexa e $T^{1,0}X$ o fibrado tangente holomorfo. Em sistemas de coordenadas holomorfas (z^α) e (w^β), nós temos

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \sum_j \frac{\partial}{\partial w^j} \frac{\partial w^j}{\partial z^i}.$$

As funções de transição são dadas pelos Jacobianos dos trocos de coordenadas. No fibrado $\Lambda^{1,0} = (T^{1,0}X)^*$, o fibrado dual cujos elementos são co-vetores de tipo $(1, 0)$. Localmente temos

$$dz^i = \sum_j dw^j \frac{\partial z^i}{\partial w^j}.$$

Em qualquer variedade complexa X, existem vários fibrados vetoriais naturalmente associados a X, como , por exemplo, $T^{1,0}X$, $\Lambda_X^{1,0}$ e $\Lambda_X^{p,q}$. De interesse particular é o fibrado $\Lambda_X^{n,0}$, onde $n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Isso é a maior potência exterior (não-nula) de $\Lambda_X^{1,0}$. As fibras de $\Lambda_X^{n,0}$ tem dimensão $\binom{n}{n} = 1$, então é um fibrado de linhas em X. Cada fibra é gerada por uma $(n, 0)$-forma $dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$. Para dois sistemas de coordenadas (z_α^i) e (z_β^i),

$$dz_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dz_\beta^n \quad = \quad \det\left(\frac{\partial z_\beta^i}{\partial z_\alpha^j}\right) dz_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dz_\beta^n,$$

então as funções de transição são dadas por

$$g_{\alpha\beta} = \det\left(\frac{\partial z_\beta^i}{\partial z_\alpha^j}\right) = \det(\mathcal{J}(z_\alpha \circ z_\beta^{-1})) : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathbb{C}^*.$$

$\Lambda_X^{n,0}$ é chamado o **fibrado canônico** de X, e é tipicamente denotado por K_X. Esse fibrado é de alta importância em geometria algébrica e em superfícies de Riemann.

Seja $E \to M$ um fibrado vetorial, com trivializações $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ e funções de transição $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$. Podemos entender seções de E em termos dessas trivializações. Para $\sigma \in \Gamma(E)$ uma seção de E, $\sigma : M \to E$, consideramos

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\alpha \circ \sigma : U_\alpha & \longrightarrow & U_\alpha \times \mathbb{C}^K, \\ x & \mapsto & (x, f_\alpha(x)). \end{array}$$

para alguma função $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^k$. Nas interseções $U_\alpha \cap U_\beta$,

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \circ \sigma(x) &= \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\beta \circ \sigma(x), \\ &= \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, f_\beta(x)), \\ (x, f_\alpha(x)) &= (x, g_{\alpha\beta}(x) f_\beta(x)). \end{aligned}$$

Dado trivializações $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de E como acima, uma seção de E é equivalente a uma família de funções $\{f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha, \mathbb{C}^k)\}$ tal que em toda interseção dupla $U, \alpha \cap U_\beta$, $f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$.

Exercício. Determine a relação de colagem de seções locais para os fibrados $E \otimes F$, $\mathrm{Hom}(E, F)$, E^* e $\Lambda^k E^*$.

5.2 Fibrados vetoriais holomorfos

Para um fibrado vetorial ser *complexo* é somente uma condição sobre as fibras serem espaços vetoriais complexos, mas não impõe uma condição sobre a base do fibrado. A base pode ser uma variedade real ou complexo mas, a princípio, a condição sobre as trivializações é somente de suavidade. Agora consideramos fibrados vetoriais *holomorfos*, que são necessariamente definidos em variedades complexas.

Definição 5.8. Seja M uma variedade complexa. Um **fibrado vetorial holomorfo** em M é um fibrado vetorial complexo $\pi : E \to M$, que satisfaz as condições:

1. E é uma variedade complexa.
2. $\pi : E \to M$ é uma aplicação holomorfa.
3. (E, π) é equipado com uma família de trivializações $\mathcal{E} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, com $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$, tal que as aplicações $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ sejam holomorfas.

Observamos que a terceira condição implica que as funções de transição induzidas pelas trivializações $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ são holomorfas, considerando o grupo $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ como uma variedade complexa.

Exemplo. Seja M uma variedade complexa, com cartas locais $z_\alpha : U_\alpha \to z_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n$. O fibrado tangente holomorfo $T^{1,0}M$ admite referenciais locais $\partial/\partial z^i_\alpha\}$, que satisfazem

$$\frac{\partial}{\partial z^i_\beta} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z^j_\alpha}\frac{\partial z^j_\alpha}{\partial z^i_\beta}$$

então as funções de transição são $g_{\alpha\beta} = \mathcal{J}(z_\alpha \circ z_\beta^{-1}) \circ z_\beta$ em $U\alpha \cap U_\beta$. Isso é uma função holomorfa, então $T^{1,0}M$ é um fibrado holomorfo.

Exemplo. O fibrado canônico é $K_M = \Lambda^{1,0}_M$. Já vimos que admite funções de transição $g_{\alpha\beta} = \det(\mathcal{J}(z_\alpha \circ z_\beta^{-1}))^{-1}$, o que é holomorfa, então K_M é naturalmente holomorfo.

Exemplo. O Fibrado Tautológico em $\mathbb{P}^n$. Seja l um ponto em $\mathbb{P}^n$, o que é dizer que l é um subespaço vetorial de dimensão 1 em $\mathbb{C}^{n+1}$. Seja $\Lambda \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n$ o fibrado vetorial dado por $\pi^{-1}(l) = \Lambda_l = l$, considerada como uma linha. Então, $\dim(l) = k = 1$ e Λ é um fibrado em linhas. Mais precisamente,

$$\Lambda = \{(p, v) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in p\}.$$

Exercício. Demonstre que Λ é uma subvariedade complexa de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$.

Consideramos a aplicação $\pi : \Lambda \to \mathbb{P}^n$, $\pi(p, v) = p$. Então, para cada $\alpha = 0, \ldots, n$, temos $U_\alpha = \{[z^0 : \cdots ; z^n] \mid z^\alpha \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$. Se $l = [z] \in U_\alpha$, então $\xi = (\frac{z^0}{z^\alpha}, \ldots, 1, \ldots, \frac{z^n}{z^\alpha})$ é uma base da linha $l = [\xi]$. Para qualquer elemento $v \in [\xi]$, $v = \lambda\xi$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Definimos

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha &\longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}, \\ \varphi_\alpha(l, v) &= (l, \lambda), \\ \text{se} \quad v = \lambda\xi &= \lambda\left(\frac{z^0}{z^\alpha}, \ldots, 1, \cdots, \frac{z^n}{z^\alpha}\right), \end{aligned}$$

e logo $\lambda = v^\alpha$ e $\varphi_\alpha(l, v) = (l, v^\alpha)$. Para considerar as funções de transição do fibrado, trocamos trivialização φ para φ_β. Em $U_\alpha \cap U_\beta$, $z^\alpha, z^\beta \neq 0$,

$$\begin{aligned} \varphi_\beta^{-1}(l, \lambda) &= \left(l, \lambda\left(\frac{z^0}{z^\beta}, \ldots, \overset{\alpha}{\frac{z^\alpha}{z^\beta}}, \ldots, \overset{\beta}{1}, \ldots, \frac{z^n}{z^\beta}\right)\right), \\ &= \left(l, \lambda\frac{z^\alpha}{z^\beta}\left(\frac{z^0}{z^\alpha}, \ldots, \overset{\alpha}{1}, \ldots, \overset{\beta}{\frac{z^\beta}{z^\alpha}}, \ldots, \frac{z^n}{z^\alpha}\right)\right). \end{aligned}$$

Logo, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta(l, v) = (l, \frac{z^\alpha}{z^\beta}\lambda)$. As funções de transição são

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta &\longrightarrow \mathbb{C}^*, \\ g_{\alpha\beta}([z]) = \frac{z^\alpha}{z^\beta}. \end{aligned}$$

Isso é holomorfa em $U_\alpha \cap U_\beta$ e Λ é um fibrado em linhas holomorfo.

Seja $E \to M$ um fibrado vetorial holomorfo. Uma seção $\sigma : M \to E$ é **holomorfa** se for holomorfa como um mapa de variedades complexas. Se $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$ é uma trivialização holomorfa, temos referencial $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$, para

$$\sigma_j(x) = \varphi^{-1}(x, e_j).$$

Então φ holomorfa implica que as σ_j são holomorfas. Para qualquer outra seção holomorfa em U, σ tem a forma

$$\sigma(x) = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j(x) f^j(x) \in E_x$$

para uma função holomorfa $f = (f^1, \dots, f^k) : U \to \mathbb{C}^k$. O conjunto de seções suaves de E em $U \subseteq M$ é denotado por $\Gamma(U, E)$. O conjunto de seções holomorfas de E, no conjunto U, é $\mathcal{O}_M(U, E)$.

Já estudamos formas diferenciais em variedades complexas e vimos que para todo $p, q \geq 0$, $\Lambda_M^{p,q}$ é um fibrado vetorial complexo. Seja $E \to M$ um outro fibrado vetorial complexo.

Definição 5.9. Uma (p,q)**-forma com valores em** E é uma seção suave do fibrado $\Lambda_M^{p,q} \otimes M$. O conjunto de (p,q) formas com valores em E será denotado por

$$\mathscr{E}^{p,q}(M, E) = \Gamma(M, \Lambda_M^{p,q} \otimes E).$$

Observamos que se $E = M \times \mathbb{C}$ é o fibrado em linhas trivial em M, $\Lambda_M^{p,q} \otimes E \cong \Lambda_M^{p,q}$ e uma (p,q)-forma com valores em E é uma (p,q)-forma. Localmente, num conjunto U que suporte uma carta de coordenadas e uma trivialização holomorfa de E, $\Phi \in \mathscr{E}^{p,q}(M, E)$ admite as expressões

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{I,J} f_{IJ}^{\alpha} \sigma_\alpha \otimes dz^{i_1} \wedge \cdots dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{j_q}, \\ &= \sum_{\alpha} \sigma_\alpha \otimes \omega^\alpha, \end{aligned}$$

para $\{\sigma_\alpha\}$ um referencial local de E e f_{IJ}^α funções suaves, ou ω^α (p,q)-formas suaves.

Já vimos o operador $\bar{\partial}$

$$\bar{\partial} : \mathscr{E}^{p,q}(M) \longrightarrow \mathscr{E}^{p,q+1}(M).$$

Podemos definir um outro operador parecido, agindo em formas agora com valores num fibrado holomorfo. Seja E um fibrado vetorial holomorfo. Então definimos

$$\bar{\partial} : \mathscr{E}^{p,q}(M, E) \longrightarrow \mathscr{E}^{p,q+1}(M, E).$$

Para $\sigma \in \mathscr{E}^{p,q}(M, E)$, então localmente em algum conjunto aberto U, $\sigma = \sum_j \sigma_j \otimes \omega^j$, onde $\{\sigma\}$ é um referencial local holomorfo de E e $\omega^j \in \mathscr{E}^{p,q}(U)$. Definimos

$$\bar{\partial}\sigma = \sum_j \sigma_j \otimes \bar{\partial}\omega^j.$$

Proposição 5.10. *O operador $\bar{\partial}$ em E satisfaz as seguintes propriedades.*

1. *$\bar{\partial}$ é bem definido, independente do referencial $\{\sigma_j\}$.*
2. *$\bar{\partial}^2 = 0$,*
3. *Se $q = 0$, $\bar{\partial}\sigma = 0$ se e somente se σ é uma seção holomorfa do fibrado holomorfo $E \otimes \Lambda_M^{p,0}$.*

Demonstração. Se $\{\sigma_i'\}$ é um outro referencial holomorfo, então

$$\sigma_j' = \sum_j \sigma_j g_{ji},$$

para funções locais holomorfas g_{ji}. Então

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_i \sigma_i' \otimes \omega_i' = \sum_j \sigma_j \otimes \omega_j = \sum_{ij} \sigma_j \otimes g_{ji}\omega_i', \\ \text{logo,} \quad \omega_j &= \sum_i g_{ji}\omega_i', \\ \text{e,} \quad \bar{\partial}\omega_j &= \sum_i ((\bar{\partial} g_{ji}) \wedge \omega_i' + g_{ji}\bar{\partial}\omega_i') = \sum_i g_{ji}\bar{\partial}\omega_i'. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_j \sigma_j \otimes \bar{\partial}\omega_j = \sum_{ji} \sigma_j g_{ji} \otimes \bar{\partial}\omega_i' = \sum_i \sigma_i' \otimes \bar{\partial}\omega_i',$$

e $\bar{\partial}\sigma$ é bem definida. O segundo ponto na proposição é evidente. Para o terceiro, para

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{j,I} f_I^j \sigma_j \otimes dz^I, \\ \bar{\partial}\sigma &= \sum_{j,I,k} \frac{\partial f_I^j}{\partial \bar{z}^k} \sigma_j \otimes d\bar{z}^k \wedge dz^I. \end{aligned}$$

Observamos que $\{\sigma_j \otimes d\bar{z}^k \wedge dz^I\}$ é um referencial local suave do fibrado complexo $E \otimes \Lambda^{p,1}$, então $\bar{\partial}\sigma = 0$ implica que os coeficientes $\frac{\partial f_I^j}{\partial \bar{z}^k} = 0$, e logo as funções f_I^j são todas holomorfas, e σ é uma seção holomorfa.

Assim, o conjunto de seções holomorfas, locais ou globais, de E é o núcleo de $\bar{\partial}$:

$$\mathcal{O}_M(U, E) = \ker\{\bar{\partial} : \mathscr{E}^0(U, E) \longrightarrow \mathscr{E}^{0,1}(U, E)\}.$$

O espaço de p-formas holomorfas, com valores em E é

$$\Omega^p(M, E) = \ker\{\bar{\partial} : \mathscr{E}^{p,0}(M, E) \longrightarrow \mathscr{E}^{p,1}(M, E)\}.$$

Denotamos por $\mathcal{O}_M(E)$ o feixe de seções holomorfas de E e $\Omega_M^p(E)$ o feixe de p-formas holomorfas com valores em E.

5.3 Conexões e Curvatura em Fibrados

Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial complexo. Uma **métrica Hermitiana** em E é uma família de produtos interiores Hermitianos

$$h_x : E_x \times E_x \longrightarrow \mathbb{C},$$

para todo $x \in M$, variando suavamente com x. Isso é, se $v, w \in E_x = \pi^{-1}(x)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

1. $h_x(v, w) = \overline{h_x(w, v)}$,
2. $\lambda h_x(v, w) = h_x(\lambda v, w) = h_x(v, \bar{\lambda} w)$.
3. $h(v, v) \geq 0$ e $h(v, v) = 0$ se e somente se $v = 0$.

A condição de suavidade pode ser entendida pela maneira seguinte.

4. Se $\{\sigma_j\}$ é um referencial local suave, as funções locais

$$h_{ij}(x) = h_x(\sigma_i(x), \sigma_j(x))$$

são suaves.

Um referencial $\{\sigma_j\}$, definido em $U \subseteq M$, é **unitário**, se para todo $x \in U$,

$$h_x(\sigma_i(x), \sigma_j(x)) = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Pelo argumento de Gram-Schmidt, para qualquer $x \in M$, existe um referencial unitário definido numa vizinhança de x. Uma outra definição equivalente de uma métrica Hermitiana num fibrado é o seguinte. Consideramos o fibrado vetorial *real* $\mathrm{Herm}(E)$ dado como o subfibrado do produto tensorial complexo $E^* \otimes_{\mathbb{C}} \bar{E}^*$ de elementos h que satisfazem $Ch = h$, para um certo automorfismo real C. Uma métrica Hermitiana em E é uma seção suave de $\mathrm{Herm}(E)$ que é positivo definido em todo ponto.

Definição 5.11. Uma conexão no fibrado vetorial complexo E é uma aplicação linear

$$D : \mathscr{E}^0(M, E) \longrightarrow \mathscr{E}^1(M, E)$$

que satisfaz a regra de Leibniz, que para $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ e $\sigma \in \mathscr{E}^0(M, E)$,

$$D(f \cdot \sigma) = df \otimes \sigma + f \cdot D\sigma.$$

Proposição 5.12. *Sejam D uma conexão em E e $U \subseteq M$ um subconjunto aberto. Se a seção $\sigma \in \mathscr{E}^0(M, E)$ tem suporte no conjunto U, então o suporte de $D\sigma$ também é contindo em U.*

Omitimos a demonstração desse resultado elementar. Uma consequência disso é que podemos diferenciar seções locais e descrever uma conexão localmente. D pode ser restrita para uma aplicação linear

$$D : \mathscr{E}^0(U, E) \longrightarrow \mathscr{E}^1(U, E|_U)$$

para qualquer subconjunto aberto $U \subseteq M$. Seja $\{e_1, \dots, e_k\}$ um referencial para E no conjunto aberto $U \subseteq M$. Então, $De_i \in \mathscr{E}^0(U, E|_U)$, e

$$De_i = \sum_j e_j \otimes \theta_i^j,$$

onde $\theta_i^j \in \mathscr{E}^1(U)$ é uma 1-forma definida em U. Para qualquer seção local $\sigma \in \mathscr{E}^0(U, E)$, temos $\sigma = \sum_{i=1}^k e_i \sigma^i$, para $\sigma^i \in C^\infty(U, \mathbb{C})$ funções suaves. Então

$$\begin{aligned} D\sigma = \sum_i D(e_i \sigma^i) &= \sum_i \left((De_i)\sigma^i + e_i \otimes d\sigma^i \right), \\ &= \sum_{i,j} e_j \otimes \theta_i^j \sigma^i + \sum_i e_i \otimes d\sigma^i, \\ &= \sum_i e_i \otimes \left(d\sigma^i + \sum_{j=1}^k \theta_j^i \sigma^j \right). \end{aligned}$$

Então se uma seção local σ é localmente dada pela função $\alpha = (\sigma^1, \dots, \sigma^k)^t$ com valores em $\mathbb{C}^k$, considerada como uma vetor de coluna, então $D\sigma$ é identificada com $d\alpha + \theta\alpha$. Uma conexão é, localmente, determinada pela derivada exterior mais um termo dado por uma matriz de 1-formas. A matriz θ é, por sua vez, determinada pelo referencial local $\{e_i\}$.

Em geometria Riemanniana, a conexão de Levi-Civita ∇ em TM é localmente determinada por seus símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k, tal que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Relacionamos isso com a expressão anterior ao escrever como

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes \left(\sum_i \Gamma_{ij}^k dx^i \right)$$

e a matriz $\theta = (\theta_j^k)$ é nesse caso $\theta_j^k = \sum_i \Gamma_{ij}^k dx^i$.

Sejam

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^k, \\ \varphi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) &\longrightarrow U_\beta \times \mathbb{C}^k, \end{aligned}$$

trivializações locais do fibrado vetorial complexo $\pi : E \to M$. Assim, obtemos referenciais locais $\{e_j^\alpha\}$ e $\{e_j^\beta\}$ em U_α e U_β respetivamente. Os referenciais são relacionadas em $U_\alpha \cap U_\beta$ por

$$e_i^\beta = \sum_{l=1}^k e_l^\alpha g_i^l$$

onde as funções de transição são $g_{\alpha\beta} = (g_i^j) : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$. Dada uma conexão D em E, cada referencial determina uma matriz de 1-formas da D :

$$De_i^\alpha = \sum_j e_j^\alpha \otimes (\theta^\alpha)_i^j, \qquad De_i^\beta = \sum_j e_j^\beta \otimes (\theta^\beta)_i^j.$$

Então,

$$\begin{aligned}
De_i^\beta &= \sum_j e_j^\beta \otimes (\theta^\beta)_i^j, \\
&= \sum_{j,l} e_l^\alpha \otimes g_j^l \otimes (\theta^\beta)_i^j, \\
&= D\left(\sum_l e_l^\alpha g_i^l\right), \\
&= \sum_{j,l} e_j^\alpha \otimes (\theta^\alpha)_l^j \cdot g_i^l + \sum_l e_l^\alpha \otimes dg_i^l.
\end{aligned}$$

Então, as matrizes de 1-formas em $U_\alpha \cap U_\beta$, onde ambas são definidas, satisfazem

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\beta}\theta^\beta &= \theta^\alpha g_{\alpha\beta} + dg_{\alpha\beta}, \\
\theta^\beta &= g_{\alpha\beta}^{-1}\theta^\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

De modo muito parecido, temos um resultado recíproco.

Exercício. Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial complexo, com trivializações $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ cobrindo M. Sejam $g_{\alpha\beta}$ as funções de transição para essas trivializações. Suponha que em cada aberto U_α, temos uma matriz de 1-formas $\theta^\alpha \in \mathscr{E}^1(U_\alpha, \mathfrak{gl}(k, \mathbb{C}))$ que satisfazem

$$\theta^\beta = g_{\alpha\beta}^{-1}\theta^\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta}$$

em $U_\alpha \cap U_\beta$. Então, demonstre que existe uma única conection D em E tal que, localmente em U_α, $De^\alpha = \sum_j e_j^\alpha \otimes (\theta^\alpha)_i^j$.

Use essa construção para definir o pullback de uma conexão

Definição 5.13. Seja h uma métrica Hermitiana no fibrado vetorial complexo $\pi : E \to M$. Uma conexão D em E é **compatível com** h se para todas as seções $\sigma, \tau \in \mathscr{E}^0(M, E)$,

$$dh(\sigma, \tau) = h(D\sigma, \tau) + h(\sigma, D\tau).$$

Essa condição vale se e somente se para todo $x \in M$ e para todo $X \in T_xM$ um vetor tangente (real),

$$Xh(\sigma, \tau) = h(D_X\sigma, \tau) + h(\sigma, D_X\tau).$$

Notamos que se M é uma variedade complexa, essa condição vale se para todo vetor tangente complexo $X \in T_xM \otimes \mathbb{C}$,

$$Xh(\sigma, \tau) = h(D_X\sigma, \tau) + h(\sigma, D_{\overline{X}}\tau).$$

Supomos de novo que M é uma variedade complexa. Em 1-formas nós temos a decomposição

$$\Lambda^1 T^*M = \Lambda_M^{1,0} \oplus \Lambda_M^{0,1},$$

em que, por exemplos, $dx^i = 1/2dz^i + 1/2d\bar{z}^i$. Então, no produto tensorial de fibrados

$$\Lambda_M^1 \otimes E = \Lambda^{1,0} \otimes E \oplus \Lambda_M^{0,1} \otimes E.$$

Assim, o espaço de seções desses fibrados decompõe-se como $\mathscr{E}^1(M,E) = \mathscr{E}^{1,0}(M,E) \oplus \mathscr{E}^{0,1}(M,E)$. Logo, se D é uma conexão em E, $D : \mathscr{E}^0(M,E) \to \mathscr{E}^1(M,E) = \mathscr{E}^{1,0}(M,E) \oplus \mathscr{E}^{0,1}(M,E)$, então podemos considerar os componentes de $D = D^{1,0} \oplus D^{0,1}$ dos dois sumandos. Pelo outro lado, se E é um fibrado vetorial *holomorfo*, então também existe o operador $\bar{\partial}$:

$$\bar{\partial} : \mathscr{E}^0(M,E) \longrightarrow \mathscr{E}^{0,1}(M,E).$$

Definição 5.14. Uma conexão D é **compatível com a estrutura holomorfa** de E se

$$D^{0,1} = \bar{\partial} : \mathscr{E}^0(M,E) \longrightarrow \mathscr{E}^{0,1}(M,E)$$

Fazemos a observação de que se $\sigma \in \mathscr{E}^0(M,E)$, então

$$\begin{aligned} & \sigma \ \text{ é uma seção holomorfa,} \\ \Leftrightarrow \ & \bar{\partial}\sigma = D^{0,1}\sigma = 0, \\ \Leftrightarrow \ & D\sigma \ \text{ é puramente de tipo } (1,0), \\ \Leftrightarrow \ & D_{\overline{X}}\sigma = 0 \ \text{ for all } \ X \in T^{1,0}M. \end{aligned}$$

Um resultado fundamental da geometria Riemanniana é da existência da conexão de Levi-Civita. Essa conexão é compatível com a métrica no fibrado tangente e cuja torsão é identicamente nula. Com essa conexão, temos uma maneira unicamente determinada de diferenciação. Um ponto para observar é que a torsão é somente definida no fibrado tangente. Em outros fibrados vetoriais, não temos um jeito canonicamente determinado para diferenciar. A proposição seguinte nos dá um resultado parecido, para fibrados vetoriais holomorfos em variedades complexas.

Proposição 5.15. *Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial holomorfo, com uma métrica Hermitiana h. Então, existe uma única conexão D em E que é compatível com a métrica h e também compatível com a estrutura holomorfa de E.*

Essa conexão é chamada a **conexão de Chern** do fibrado holomorfo Hermitiano (E,h).

Demonstração. Primeiro mostramos a unicidade da conexão. Supomos que uma conexão D existe. Em uma trivialização local $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$, com uma referencial local holomorfo $\{e_1, \ldots, e_k\}$, temos

$$De_i = \sum_j e_j \otimes \theta_{ji},$$

onde $\theta = (\theta_{ji})$ é uma matriz de formas de tipo $(1,0)$. A conexão é compatível com a métrica, então seja $h_{ij} = h(e_i, e_j)$, e

$$\begin{aligned} dh_{ij} &= h(De_i, e_j) + h(e_i, De_j), \\ &= \sum_k h(e_k \otimes \theta_{ki}, e_j) + \sum_k h(e_i, e_k \otimes \theta_{kj}), \\ \partial h_{ij} + \bar{\partial} h_{ij} &= \theta_{ki} h_{kj} + h_{ik} \bar{\theta}_{kj}. \end{aligned}$$

Igualando os termos de tipo (1,0 e de tipo $(0,1)$, temos $\partial h = \theta^t h$, ou que $\theta = (\partial h \cdot h^{-1})^t$. Isso é dizer que as duas condições de compatibilidade determinam unicamente a expressão local da conexão, então uma conexão satisfazendo as condições deve ser única.

Para mostrar a existência de uma conexão com as propriedades desejados, sejam $\{(U_\alpha, \varphi)$ trivializações holomorfas de E cobrindo M, com funções de transição $g_{\alpha\beta}$ definidas em $U_\alpha \cap U_\beta$. Então temos funções de matrizes $h^\alpha = (h^\alpha_{ij})$ em cada U_α e podemos definir formas $\theta^\alpha = (\partial h^\alpha \cdot (h^\alpha)^{-1})^t$. Uma conta rápida mostra que em $U_\alpha \cap U_\beta$ temos

$$\theta^\beta \quad = \quad g_{\alpha\beta}^{-1}\theta^\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta},$$

então as formas θ^α determinam uma conexão em E. Pode ser verificado que essa conexão é compatível com a métrica h e com a estrutura holomorfa.

Um caso importante é de um fibrado de linhas. Seja $\pi : L \to M$ um fibrado de linhas holomorfo, com uma métrica hermitiana h. L é trivializada por uma seção holomorfa local $e \in \mathcal{O}_M(U, L)$ que não anula-se em U. A matriz $h_{ij} = h(e, e)$ é nesse caso somente uma função positiva suave em U. Para quaisquer seções locais $\sigma = f.e$ e $\tau = g.e$,

$$h(\sigma, \tau) = h(f.e, g.e) = f, \bar{g}.h(e, e).$$

A conexão de Chern é localmente dada pela forma $\theta = \partial h.h^{-1}$, observando que para $k = 1$ temos $\theta^t = \theta$, o que simplifica como $\theta = \partial h.h^{-1} = \partial \log h$.

Exemplo. Consideramos o espaço projetivo $M = \mathbb{P}^n$ com o fibrado vetorial trivial de posto $n+1$, $E = \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$. Uma seção σ de E pode ser identificada com uma função $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{C}^{n+1}$, por $\sigma(l) = (l, f(l))$. Temos nesse caso a conexão trivial $\nabla\sigma = (l, df_l) \in \mathscr{E}^1(\mathbb{P}, E)$, que escreveremos como $\nabla = d$. Assim, observamos que $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$ e a conexão trivial é compatível com a estrutura complexa trivial. Se colocamos a métrica Hermitiana em $E = \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$,

$$h((l, v), (l, w)) = v \cdot \bar{w},$$

então vemos rapidamente que $\nabla = d$ é a conexão de Chern de (E, h).

Exemplo. Um segundo e mais importante exemplo é do fibrado tautológico em $M = \mathbb{P}^n$. Seja $\pi : \Lambda \to \mathbb{P}^n$ o fibrado dado por

$$\Lambda = \{(l, v) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in l\}.$$

Então, $\Lambda_l = \pi^{-1}(l) = l \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$, e temos que Λ é um sub-fibrado do fibrado trivial acima. Podemos restringir a cada fibra Λ_l a métrica Hermitiana no fibrado trivial. Uma seção $\sigma \in \mathscr{E}^0(\mathbb{P}^n, \Lambda)$ é uma aplicação $\sigma : \mathbb{P}^n \to \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $\sigma(l) \in l$ para todo $l \in \mathbb{P}^n$. A derivada exterior de σ,e em l, é um elemento de $\mathbb{C}^{n+1} \otimes T_l^*\mathbb{P}^n$ mas não é necessariamente em $\Lambda_l \otimes T_l^*\mathbb{P}^n$. A derivada direcional $X\sigma \in \mathbb{C}^{n+1}$ em l não é necessariamente um elemento de $\Lambda_l = l$. Seja $\pi_l : \mathbb{C}^{n+1} \to \Lambda_l \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ a projeção ortogonal. Definimos uma conexão

$$\begin{aligned} \nabla : \mathscr{E}^0(\Lambda) &\longrightarrow \mathscr{E}^1(\Lambda), \\ \nabla\sigma)_l &= \pi_l(d\sigma). \end{aligned}$$

Isso é dizer que para $X \in T_l\mathbb{P}^n$, $\nabla_X\sigma = \pi_l(X\sigma)$. Um exercício imediato verifica que ∇ é uma conexão em Λ. Localmente, se $l \in U_0 = \{[z^0 : \cdots z^n] \mid z^0 \neq 0\}$, então $l = [1 : x^1 : \cdots : x^n]$ para um elemento $x = (x^i) \in \mathbb{C}^n$ unicamente determinado, e o vetor $v = (1, x)$ gera a linha l. Consideramos v como um referencial local holomorfo em U_0. Projeção ortogonal em l é dada por $\pi_l(\xi) = \langle \xi, \frac{v}{|v|}\rangle \frac{v}{|v|} = \frac{\langle \xi, v\rangle}{|v|^2} v$. Seja σ uma seção local de Λ. Então em U_0, $\sigma = f.v = f.(1, x)$. Temos

$$\begin{aligned}
d\sigma &= df.(1, x) + f(0, dx),\\
\nabla\sigma &= \pi(d\sigma) = df.(1, x) + f\frac{(0, dx)\cdot(1, x)}{1 + |x|^2}(1, x),\\
&= v \otimes (df + \theta f),
\end{aligned}$$

onde $\theta = \frac{\sum_i dx^i \bar{x}^i}{1+|x|^2}$. Essa 1-forma local pode ser reconhecida como

$$\theta = \partial \log(1 + |x|^2) = \partial \log |v|^2.$$

Isso é dizer que ∇ é a conexão de Chern do fibrado tautológico Λ, com a metrica Hermitiana h induzida em Λ como um sub-fibrado do fibrado trivial em $\mathbb{P}^n$.

Sejam $E \to M$ e $F \to M$ fibrados vetoriais complexos numa variedade diferenciavel. Sejam ∇^E e ∇^F conexões neles. Então, são induzidas conexões nos fibrados vetoriais associados E^*, $E \otimes F$, $\mathrm{Hom}(E, F)$, $\Lambda^k E^*$, entre muitos outros. Uma seção $\alpha \in \mathscr{E}^0(M, E^*)$ pode ser considerada um homomorfismo de $C^\infty(M)$-módulos

$$\alpha : \mathscr{E}^0(M, E) \to C^\infty(M),$$

enquanto uma 1-forma com valores em E, $\Phi \in \mathscr{E}^1(M, E^*)$, é equivalente a um homomorfismo

$$\Phi : \mathscr{E}^0(M, E) \longrightarrow \mathscr{E}^1(M).$$

Logo, definimos uma conexão

$$\begin{aligned}
\nabla^{E^*} : \mathscr{E}^0(M, E^*) &\longrightarrow \mathscr{E}^1(M, E^*),\\
(\nabla^{E^*}\alpha)(v) &= d(\alpha(v)) - \alpha(\nabla^E v)
\end{aligned}$$

para qualquer $v \in \mathscr{E}^0(M, E)$. Para $\Phi \in \mathscr{E}^0(M, E)$ e $\Psi \in \mathscr{E}^0(M, F)$, $\Phi \otimes \Psi \in \mathscr{E}^0(M, E \otimes F)$, e definimos

$$\nabla^\otimes(\Phi \otimes \Psi) = (\nabla^E\Phi) \otimes \Psi + \Phi \otimes (\nabla^F\Psi) \in \mathscr{E}^1(M, E \otimes F).$$

Nem toda seção é decomponível como o produto de seções de E e F, mas seções dessa forma geram $\mathscr{E}^0(M, E \otimes F)$ como um $C^\infty(M)$-módulo. Para $A \in \mathscr{E}^0(M, \mathrm{Hom}(E, F))$, definimos a derivada como

$$(\nabla^{\mathrm{Hom}} A)(v) = \nabla^F(A(v)) - A(\nabla^E v),$$

para todo $v \in \mathscr{E}^0(M, E)$. O espaço $\mathscr{E}^0(M, \Lambda^k E^*)$ é gerado por seções da forma $\Psi = \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^k$ para $\varepsilon^i \in \mathscr{E}^0(M, E^*)$. Definimos

$$\begin{aligned}
\nabla\Psi &= \nabla(\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^k),\\
&= (\nabla^{E^*}\varepsilon^1) \wedge \varepsilon^2 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^k + \varepsilon^1 \wedge (\nabla^{E^*}\varepsilon^2) \wedge \cdots \wedge \varepsilon^k +\\
&\qquad \cdots + \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge (\nabla^{E^*}\varepsilon^k).
\end{aligned}$$

Exercício. Demonstre que essas são conexões e que são bem definidas. Demonstre que se ∇^E e ∇^F são as conexões de Chern, então as conexões definidas acima são as conexões de Chern para as estruturas holomorfas e Hermitianas associadas.

Exercício. Seja ∇ uma conexão no fibrado E e seja $e = \{e_i\}$ um referencial local de E em $U \subseteq M$. O fibrado dual de E admite uma trivialização local determinado pelo referencial dual $e^* = \{e^i\}$, onde

$$e^i_p(e_{j_p}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

em todo ponto $p \in U$. Os elementos $\{e_i \otimes e^j\}$ formam um referencial local para $E \otimes E^* \cong \mathrm{End}(E)$ em U. Demonstre que se uma conexão ∇ é dado por $\nabla e_i = \sum_j e_j \otimes \theta^j_i$, e

$$\nabla(\sum_i e_i \sigma^i) = \sum_j e_j \otimes (d\sigma + \sum_k \theta^j_k \sigma^k),$$

então a conexão ∇^{E^*} satisfaz $\nabla^{E^*} e^i = -\sum_j e^j \otimes \theta^i_j$, ou

$$\nabla^{E^*}(\sum_i e^i \sigma_i) = \sum_j e^j \otimes (d\sigma_j - \sum_k \theta^k_j \sigma_k),$$

e que se $\Phi = \sum_{ij} e_i \otimes e^j A^i_j$, demostre que $\nabla\Phi = \sum_{ij} e_i \otimes e^j \otimes B^i_j$ onde

$$B = dA + [\theta, A].$$

Definição 5.16. Seja ∇ uma conexão no fibrado vetorial complexo. A **curvatura** F^∇ de ∇ é a aplicação multilinear

$$\begin{aligned} F^\nabla \quad &: \quad \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \mathscr{E}^0(M,E) \longrightarrow \mathscr{E}^0(M,E), \\ F^\nabla_{X,Y}\sigma \quad &= \quad \nabla_X\nabla_Y\sigma - \nabla_Y\nabla_X\sigma - \nabla_{[X,Y]}\sigma. \end{aligned}$$

Quando não existe risco de confusão, escrevemos a curvatura como F, ao invés de F^∇.

Proposição 5.17. *Para $f \in C^\infty(M)$, a curvatura satisfaz*

$$F^\nabla_{fX,Y}\sigma = F^\nabla_{X,fY}\sigma = F^\nabla_{X,Y}(f\sigma) = fF^\nabla_{X,Y}\sigma.$$

Demonstração. A prova é muito padrão e daremos apenas para uma das igualdades.

$$\begin{aligned} F^\nabla_{X,fY}\sigma \quad &= \quad \nabla_X(f\nabla_Y\sigma - f\nabla_Y\nabla_X\sigma - \nabla_{[x,fY]}\sigma, \\ &= \quad Xf\cdot\nabla_Y\sigma + f\nabla_X\nabla_Y\sigma - f\nabla_Y\nabla_X\sigma - \nabla_{(Xf\cdot Y + f[X,Y])}\sigma, \\ &= \quad fF^\nabla_{X,Y}\sigma. \end{aligned}$$

Em particular, isso implica que F^∇ é um tensor em todos os seus argumentos.

$$F^\nabla \quad : \quad \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \mathscr{E}^0(M,E) \longrightarrow \mathscr{E}^0(M,E)$$

é um homomorfismo multi-linear de $C^\infty(M)$-módulos, que é anti-simétrico entre X e Y, então F^∇ é uma seção do fibrado $\Lambda^2T^*M\otimes\mathrm{End}(E))$ e $F^\nabla\in\mathscr{E}^2(\mathrm{End}(E))$. Em todo ponto $x\in M$, temos uma aplicação multi-linear

$$F_x^\nabla : T_xM\times T_xM\times E_x\longrightarrow E_x$$

que varia diferenciavelmente com x.

Queremos agora dar uma expressão local para a curvatura de uma conexão. Suponha que $e=\{e_1,\ldots,e_k\}$ é um referencial local, definido num conjunto aberto $U\subseteq M$. Então $\nabla e_i=\sum_j e_j\otimes\theta_i^j$, ou $\nabla_X e_i=\sum_j e_j\theta_i^j(X)$ para $X\in T_pM$. Então

$$\begin{aligned}\nabla_X\nabla_Y e_i=\nabla_X(e_j\theta_i^j(Y)) &= \nabla_X e_k.\theta_i^j(Y)=e_j.X(\theta_i^j(Y)),\\ &= e_k\theta_j^k(X)\theta_i^j(Y)+e_k(X(\theta_i^k(Y))).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}&\nabla_X\nabla_Y e_i-\nabla_Y\nabla_X e_i-\nabla_{[X,Y]}e_i\\ =\;& e_k\left[X(\theta_i^k(Y))-Y(\theta_i^k(X))-\theta_i^k([X,Y])+\theta_j^k(X)\theta_i^j(Y)-\theta_j^k(Y)\theta_i^j(X)\right],\\ =\;& e_k\left(d\theta_i^k(X,Y)+\sum_j\theta_j^k\wedge\theta_i^j(X,Y)\right).\end{aligned}$$

Isso é dizer que se a conexão é, com respeito a esse referencial, dado por $\nabla e_i=\sum_k e_k\otimes\theta_i^k$, para $\theta=(\theta_j^k)$ uma matriz de 1-formas em U, então a curvatura

$$F_x : E_x\longrightarrow\Lambda^2T_x^*M\otimes E_x$$

é dado por $F^\nabla e_i=\sum_k e_k\otimes\Theta_i^k$, para $\Theta=(\Theta_i^k)$ uma matriz de 2-formas, onde

$$\Theta=d\theta+\theta\wedge\theta.$$

Nos conjuntos U_α, U_β, sejam $e^\alpha=\{e_i^\alpha\}$ e $e^\beta=\{e_i^\beta\}$ referenciais locais satisfazendo $e_i^\beta=\sum_j e_j^\alpha g_i^j$, onde $g_{\alpha\beta}=(g_i^j)$ é a matriz de funções de transição, em $U_\alpha\cap U_\beta$. As trivializações determinam 1-formas da conexão $\theta^\alpha\in\mathscr{E}^1(U_\alpha,\mathfrak{gl}(k))$ e $\theta^\beta\in\mathscr{E}^1(U_\beta,\mathfrak{gl}(k))$.

Proposição 5.18. *As matrizes da curvatura Θ^α e Θ^β são relacionadas em $U_\alpha\cap U_\beta$ por*

$$\Theta^\beta=g_{\alpha\beta}^{-1}\cdot\Theta^\alpha\cdot g_{\alpha\beta}.$$

Isso é dizer, por conjugação pelas funções de transição.

Demonstração. Escreveremos $g=g_{\alpha\beta}$, e usaremos a identidade $d(g^{-1})=-dg^{-1}\cdot dg\cdot g^{-1}$. Isso segue pois $g\cdot g^{-1}=\mathrm{Id}$ implica que $d(g\cdot g^{-1})=0=dg\cdot g^{-1}+g\cdot d(g^{-1})$. As matrizes da conexão satisfazem

$$\theta^\beta=g^{-1}\theta^\alpha g+g^{-1}dg.$$

Logo,

$$\begin{aligned} d\theta^\beta &= -g^{-1}dgg^{-1}\theta^\alpha g + g^{-1}d\theta^\alpha g - g^{-1}\theta^\alpha \wedge dg - g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg, \\ \theta^\beta \wedge \theta^\beta &= g^{-1}\theta^\alpha \wedge \theta^\alpha g + g^{-1}\theta^\alpha \wedge dg + g^{-1}dgg^{-1}\theta^\alpha g + g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg. \end{aligned}$$

Então temos $\Theta^\beta = g^{-1}(d\theta^\alpha + \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha)g = g^{-1}\Theta^\alpha g$.

Temos muitos usos da curvatura de uma conexão num fibrado vetorial. Podemos estender e generalizar várias ideias da geometria Riemanniana para esse caso. Podemos utilizá-la para entender certos tipos de integrabilidade. Pode ser usada para imitar a construção da derivada exterior. E ao considerar condições adicionais que a curvatura pode satisfazer, obtemos equações diferenciais parciais interessantes cujas soluções influenciam, ou que são influenciadas por, a geometria da variedade.

Proposição 5.19. *Seja $\nabla : \mathscr{E}^0(M,E) \to \mathscr{E}^1(M,E)$ uma conexão no fibrado vetorial complexo E. Para todo $k \geq 0$, existe um único operador*

$$d^\nabla : \mathscr{E}^k(M,E) \longrightarrow \mathscr{E}^{k+1}(M,E)$$

tal que,

1. *se $k = 0$, $d^\nabla = \nabla$,*
2. *se $\sigma \in \mathscr{E}^0(M,E)$ e $\alpha \in \mathscr{E}^k(M)$, com $\sigma \otimes \alpha \in \mathscr{E}^k(M,E)$, então*
$$d^\nabla(\sigma \otimes \alpha) = (\nabla\sigma) \wedge \alpha + \sigma \otimes d\alpha.$$

A multiplicação no primeiro termo à direita é o morfismo de fibrados

$$\wedge : E \times \Lambda^1 \otimes \Lambda^k \longrightarrow E \otimes \Lambda^{k+1}.$$

dado por multiplicação exterior em formas.

Demonstração. Um elemento $\Phi \in \mathscr{E}^k(M,E)$ pode ser escrito localmente como $\Phi = \sum_i e_i \otimes \alpha^i$, onde $e = \{e_i\}$ oe um referencial local e $\alpha^i \in \mathscr{E}^k(U)$ são formas locais. Então definimos

$$d^\nabla \Phi = \sum_i e_i \otimes (d\alpha^i + \sum_j \theta^i_j \wedge \alpha^i),$$

onde $\theta = (\theta^i_j)$ é a matriz de 1-formas para a conexão ∇ com respeito ao referencial e. Em duas trivializações em U_α e U_β, as matrizes de ∇ relacionam-se por $\theta^\beta = g^{-1}_{\alpha\beta}\theta^\alpha g_{\alpha\beta} + g^{-1}_{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}$. Deixamos como um exercício mostrar que isso implica que o operador d^∇ é bem definido, independente do referencial local.

Além disso, afirmamos (sem demonstração) que d^∇ admite uma expressão invariante global. Para $X_0, \ldots, X_k \in \Gamma(TM)$ são campos vetoriais, então

$$\begin{aligned} (d^\nabla\Phi)(X_0,\ldots,X_k) &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \nabla_{X_i}\Big(\Phi(X_0,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,X_k)\Big) \\ &\quad + \sum_{0\leq i<j\leq k}(-1)^{i+j}\Phi\Big([X_i,X_j],X_0,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,\widehat{X_j},\ldots,X_k\Big). \end{aligned}$$

Então, temos uma sequência

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}^0(E) \xrightarrow{\nabla} \mathscr{E}^1(E) \xrightarrow{d^\nabla} \mathscr{E}^2(E) \xrightarrow{d^\nabla} \mathscr{E}^3(E) \xrightarrow{d^\nabla} \cdots$$

mas $(d^\nabla)^2 \not\equiv 0$ por que, por exemplo se $\sigma \in \mathscr{E}^0(E) = \Gamma(E)$ e $X, Y \in \Gamma(TM)$,

$$\begin{aligned} d^\nabla(\nabla\sigma)(X,Y) &= \nabla_X(\nabla\sigma(Y)) - \nabla_Y(\nabla\sigma(X)) - \nabla\sigma([X,Y]), \\ &= \nabla_X\nabla_Y\sigma - \nabla_Y\nabla_X\sigma - \nabla_{[X,Y]}\sigma, \\ &= F^\nabla_{X,Y}\sigma. \end{aligned}$$

Então, $F^\nabla \in \mathscr{E}^2(\mathrm{End}(E))$ é o impedimento ou a obstrução de ter $(d^\nabla)^2 = 0$.

Se ∇ é uma conexão num fibrado vetorial E, induz uma conexão ∇^{End} no fibrado $\mathrm{End}(E)$, o que estende-se a um operador

$$d^\nabla : \mathscr{E}^k(M, \mathrm{End}(E)) \longrightarrow \mathscr{E}^{k+1}(M, \mathrm{End}(E)).$$

Proposição 5.20. *(Segunda Identidade de Bianchi)*

$$d^\nabla F^\nabla = 0.$$

Demonstração. Para $A \in \mathscr{E}^2(M, \mathrm{End}(E))$ e $X_), X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$,

$$(d^\nabla A)_{X_0,X_1,X_2} = \sum_0^2 (-1)^i \nabla_{X_i}(X_j, X_k)) - \sum_{i<j} (-1)^{i+j} A([X_i, X_j], X_k).$$

Para avaliar $(d^\nabla F^\nabla)_{X,Y,Z}$ em $p \in M$, suponho que X, Y, Z são campos locais tais que $[X,Y](p) = 0$, etc. Logo,

$$\begin{aligned} (d^\nabla F^\nabla)_{X,Y,Z} &= \nabla^{\mathrm{End}}_X(F^\nabla_{Y,Z}) + \nabla^{\mathrm{End}}_Y(F\nabla_{Z,X}) + \nabla^{\mathrm{End}}_Z(F^\nabla_{X,Y}), \\ (d^\nabla F^\nabla)_{X,Y,Z}\sigma &= \nabla_X(F^\nabla_{Y,Z}\sigma) - F^\nabla_{Y,Z}(\nabla_X\sigma) + \nabla_Y(F^\nabla_{Z,X}\sigma) - F^\nabla_{Z,X}(\nabla_Y\sigma) \\ &\qquad + \nabla_Z(F^\nabla_{X,Y}\sigma) - F^\nabla_{X,Y}(\nabla_Z\sigma), \\ &= \nabla_X\nabla_Y\nabla_Z\sigma - \nabla_X\nabla_Z\nabla_Y\sigma + \text{ 10 outros termos}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vamos entender essa identidade localmente. Seja $e = \{e_i\}$ um referencial local em M que determine a matriz $\theta = (\theta_i^j)$ para a conexão ∇. Então,

$$\begin{aligned} \nabla e_i &= \sum_j e_j \otimes \theta_i^j, \\ F^\nabla e_i &= \sum_j e_j \otimes \Theta_i^j \end{aligned}$$

para $\Theta = d\theta + \theta \wedge \theta$. Por algumas observações muito parecidas com o Exercício *** acima, vemos que os coeficientes nesse referencial da derivada $d^\nabla F^\nabla$ são dados pela matriz de 3-formas

$$\begin{aligned} d\Theta + \theta \wedge \Theta - \Theta \wedge \theta &= d\theta \wedge \theta - \theta \wedge d\theta + \theta \wedge (d\theta + \theta \wedge \theta) - (d\theta + \theta \wedge \theta) \wedge \theta, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Antes de terminar essa discussão, enfatizamos que a segunda identidade de Bianchi vale para toda conexão em qualquer fibrado vetorial. Isso é em contraste com a *primeira* identidade de Bianchi, que é válida apenas para conexões no fibrado tangente de uma variedade que são livres de torção.

Seja (E, h) um fibrado vetorial Hermitiano numa variedade complexa. Uma conexão em E é compatível com h se para todos $\sigma, \tau \in \mathscr{E}^0(M, E)$ e $X \in T_pM \otimes \mathbb{C}$,

$$Xh(\sigma, \tau) = h(\nabla_X \sigma, \tau) + h(\sigma, \nabla_{\overline{X}} \tau).$$

Deixamos como um exercício mostrar que isso implica que a curvatura satisfaz

$$0 = h(F^{\nabla}_{X,Y} \sigma, \tau) + h(\sigma, F^{\nabla}_{\overline{X},\overline{Y}} \tau).$$

Em particular, para vetores tangentes reais $X, Y \in T_pM$ (com $X = \overline{X}$ por exemplo) , $F^{\nabla}_{X,Y}$ define um endomorfismo *anti-auto-adjunto* de E_p.

Sejam M uma variedade complexa, $E \to M$ um fibrado vetorial holomorfo, h uma métrica Hermitiana em E e ∇ a conexão de Chern de (E, h). A priori, a curvatura de uma conexão toma valores em $\mathscr{E}^2(M, \mathrm{End}(E))$, mas para a conexão de Chern em (E, h) existem mais restrições sobre a curvatura.

Proposição 5.21. *Se ∇ é a conexão de Chern num fibrado holomorfo Hermitiano (E, h), então curvatura F^{∇} é uma forma puramente de tipo $(1, 1)$, com valores no fibrado $\mathrm{End}(E)$. Isso é,*

$$F^{\nabla} \in \mathscr{E}^{1,1}(M, \mathrm{End}(E)).$$

Demonstração. Essa condição é equivalente a $F^{\nabla}_{X,Y} = 0$ se ambos $X, Y \in T_pM_{\mathbb{C}}$ são vetores de tipo $(1, 0)$ ou de tipo $(0, 1)$. Numa vizinhança de um ponto $p \in M$, seja $e = \{e_i\}$ um referencial holomorfa local e $f = \{f_i\}$ um referencial unitário local. . Eles são relacionados por $f_i = \sum_j e_j g_{ji}$, para $g = (g_{ji})$ uma matriz de funções suaves. A derivada dos campos satisfazem $\nabla e_i = \sum_j e_j \otimes \theta^e_{ji}$, onde $\theta^e = (\theta^e_{ji})$ é uma matriz de 1-formas de tipo $(1, 0)$. Então, a curvatura satisfaz $F^{\nabla} = e_i \otimes e^j \otimes \Theta^e_{ji}$, onde $\Theta^e = d\theta^e + \theta^e \wedge \theta^e$. Em particular, notamos que o componente de tipo de $(0, 2)$ de Θ^e se anula identicamente : $(\Theta^e)^{0,2} \equiv 0$, e logo $(F^{\nabla})^{0,2} \equiv 0$. A conexão também e compatível com a metrica h, então

já fiz a definição de ref. unitário?

$$h(F^{\nabla}_{X,Y} \sigma, \tau) = -h(\sigma, F^{\nabla}_{\overline{X},\overline{Y}} \tau).$$

Se X e Y são ambos de tipo $(1, 0)$, então $\overline{X}, \overline{Y} \in T^{0,1}_p$ e $F^{\nabla}_{\overline{X},\overline{Y}} = 0$. Logo $h(F^{\nabla}_{X,Y} \sigma, \tau) = 0$ para todo σ, τ e concluimos que $F^{\nabla} \in \mathscr{E}^{1,1}(M, \mathrm{End}(E))$.

Esse resultado pode ser refinado ainda mais. Com respeito a um referencial holomorfo $e = \{e_i\}$, a matriza da conexão de Chern ∇ tem expressão $\theta = (\partial h . h^{-1})^t$, então,

$$\begin{aligned} \Theta &= d\theta + \theta \wedge \theta, \\ &= \bar{\partial}\theta + (\partial\theta + \theta \wedge \theta). \end{aligned}$$

O primeiro termo é puramente de tipo $(1, 1)$, enquanto o segundo é de tipo $(2, 0)$ e logo deve anular-se identicamente. Logo, a curvatura tem a expressão muito concreta $\Theta = \bar{\partial}\theta = (\bar{\partial}(\partial h.h^{-1}))^t$.

Se $\pi : L \to M$ é um fibrado de linhas, com posto $k = 1$, então aproveitamos ao observar que o espaço de endomorfismos de um espaço vetorial complexo de dimensão 1 é canonicamente isomorfo a $\mathbb{C}$, e consiste-se apenas dos escalares. O fibrado $\mathrm{End}(L) \cong L \otimes L^* \cong \underline{\mathbb{C}}$ e a curvatura de qualquer conexão em L toma valores em $\mathscr{E}^2(M, \mathrm{End}(L)) = \mathscr{E}^2(M)$. Suponha que L é holomorfo e munido com uma métrica Hermitiana h. Se e é uma seção local não-nula, assim dando um referencial local, então $h = h(e, e)$ é uma função positiva não-nula. A 1-forma local da conexão é $\theta = \partial \log h$ e a matriz da conexão é $F = \Theta = \bar{\partial}\partial \log h$. Isso implica que

1. A 2-forma $F = F^{\nabla}$ é fechada : $dF = 0$.
2. $iF = i\bar{\partial}\partial \log h$ é uma $(1, 1)$-forma real, pois $\overline{iF} = iF$.
3. A função $\log h$ não é globalmente definida, mas a forma $F = i\bar{\partial}\partial \log h$ é bem definida independente da trivialização holomorfa usada na definição.

Exemplo. Seja $\Lambda \to \mathbb{P}^n$ o fibrado tautológico no espaço projetivo. No conjunto

$$U_0 = \{l = [1 : x^1 : \cdots : x^n] \mid x = (x^i) \in \mathbb{C}^n\}$$

Λ pode ser trivializado, com referencial holomorfo $e(l) = (l, (1, x)) \in \Lambda_l$ para $l \in U_0$. O fibrado Λ herda uma métrica Hermitiana por ser um sub-fibrado de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$. Então $h(e, e) = |(1, x)|^2 = 1 + |x|^2$. A forma local da conexão é $\partial \log(1 + |x|^2)$ e a curvatura é $F = \bar{\partial}\partial \log(1 + |x|^2)$. Nós já vimos essa forma na discussão de métricas Hermitianas.

$$\begin{aligned} iF &= i\bar{\partial}\partial \log(1 + |x|^2), \\ &= -i\partial\bar{\partial} \log(1 + |x|^2), \\ &= -\omega_{FS}, \end{aligned}$$

onde ω_{FS} é a 2-forma associada à métrica de Fubini-Study em $\mathbb{P}^n$.

5.4 Fibrados de Linha Holomorfos

Agora colocamos mais atenção em fibrados vetoriais holomorfos de posto 1, o que é dizer em fibrados de linha. Seja M uma variedade complexa e $\pi : L \to M$ um fibrado de linha holomorfo. Suponha que M admite uma cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, e que temos trivializações holomorfas $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}$ definindo as funções de transição por

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C} &\longrightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}, \\ (x, v) &\longmapsto (x, g_{\alpha\beta}(x)v). \end{aligned}$$

As aplicações folomorfas $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ determinam $g = (g_{\alpha\beta}) \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_M^*)$ uma co-cadeia de Čech, com valores no feixe $\mathcal{O}_M^*$. As funções satisfazem

- $g_{\alpha\alpha} \equiv 1$ em U_α,
- $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$ em $U_\alpha \cap U_\beta$,

- $g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} \cdot g_{\gamma\alpha} \equiv 1$ em $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Essas são exatamente as condições para o co-cadeia g ser *fechada* no sentido da teoria de Čech : $(\delta g)_{\alpha\beta\gamma} = g_{\beta\gamma} g_{\alpha\gamma}^{-1} g_{\alpha\beta} = 1$, e $\delta g = 1 \in \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{O}_M^*)$. Um fibrado de linhas holomorfo determine um co-cíclo de Čech, e logo uma classe $[g] \in \check{H}^1(M, \mathcal{O}_M^*)$.

Pelo outro lado, suponha que $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de M e que $g = (g_{\alpha\beta}) \in \check{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_M^*)$ é um 1-co-cíclo de Čech com respeito a $\mathcal{U}$. Então, podemos construir um fibrado de linhas em M que realiza esse co-cíclo como suas funções de transição. Consideramos o conjunto

essa parte é redundante se fizer a mesma construção para quaisquer cocliclos

$$\bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{C})$$

com relação de equivalência que $U_\alpha \times \mathbb{C} \ni (x, v) \sim (y, w) \in U_\beta \times \mathbb{C}$ se e somente se $x = y \in U_\alpha \cap U_\beta$ e $v = g_{\alpha\beta}(y) w$. Então, deixamos como um exercício mostrar que o conjunto de classes de equivalência

$$L = \left(\bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{C}) \right) / \sim$$

admite a estrutura de um fibrado de linhas holomorfo, que admite trivializações em U_α e cujas funções de transição são as $g_{\alpha\beta}$.

Suponha que L e L' são fibrados de linha holomorfas, determinados por co-cíclos de Čech $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}$, e que temos um *isomorfismo* de fibrados $\varphi : L \to L'$ entre eles. Supomos que os fibrados admitem trivializações nos mesmos conjuntos abertos $U_\alpha \subseteq M$. O isomorfismo φ é um biholomorfismo

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & L' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

tal que $\pi' \circ \varphi = \pi$ e tal que $\varphi : L_x \to L'_x$ seja um isomorfismo linear para todo $x \in M$. φ é uma seção global do fibrado holomorfo $\mathrm{Hom}(L, L')$, então pode ser escrita em termos das suas funções de transição. Em particular φ é dado por uma família de funções $\{f_\alpha \in \mathcal{O}_M(U_\alpha)\}$ tais que $f_\alpha = h_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} f_\beta$. Além disso, por φ ser um isomorfismo, as funções f_α não tem zeros e temos, em $U_\alpha \cap U_\beta$,

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} \frac{f_\beta}{f_\alpha}.$$

Isso é dizer que os cocíclos de L e L' determinam a mesma classe de cohomologia em $\check{H}^1(M, \mathcal{O}_M^*)$. Por um argumento muito parecido, se $[g] = [h]$, os fibrados são isomorfos, então podemos concluir que o grupo $\check{H}^1(M, \mathcal{O}^*)$ é identificado com o conjunto de classes de isomorfismo de fibrados de linha holomorfa em M.

Definição 5.22. O **grupo de Picard** $\mathrm{Pic}(M)$ de M é definido como o grupo de classes de isomorfismo de fibrados de linha em M, com produto dado por produto tensorial. Pela discussão acima, $\mathrm{Pic}(M)$ é isomorfo a $\check{H}^1(M, \mathcal{O}_M^*)$.

Já vimos que a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_M \longrightarrow \mathcal{O}_M^* \longrightarrow 1$$

induz uma sequência exata longa em cohomologia

$$\check{H}^1(M,\mathcal{O}_M) \longrightarrow \check{H}^1(M,\mathcal{O}_M^*) \xrightarrow{\delta_*} \check{H}^2(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow \check{H}^1(M,\mathcal{O}_M) \longrightarrow \cdots$$

Para um elemento $[L] \in \mathrm{Pic}(M)$, seja $g = \{g_{\alpha\beta}\}$ um co-cíclo de funções de transição para o fibrado L, com respeito a uma cobertura $\mathcal{U}$ de M. Supomos, depois de refinar a cobertura, que todas interseções $U_\alpha \cap U_\beta$ são simplesmente conexos. Por isso podemos definir o 2-co-cadeia

$$h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi i}\log(g_{\alpha\beta}) \in \mathcal{O}_M(U_\alpha \cap U_\beta).$$

Então, seja $f = \delta h \in \check{C}^2(\mathcal{U},\mathcal{O}_M)$,

$$f_{\alpha\beta\gamma} \quad = \quad h_{\beta\gamma} - h_{\alpha\gamma} + h_{\alpha\beta}|_{U_\alpha\cap U_\beta \cap U_\gamma}\,.$$

Observamos que não podemos simplificar mais por que não existe *comunicação* entre os ramos diferentes do logarítmos. Porém,

$$\exp(2\pi i f_{\alpha\beta\gamma}) = e^{\log g_{\beta\gamma}} e_{-\log g_{\alpha\gamma}} e^{\log g_{\alpha\beta}} \equiv 1.$$

Logo $f \in \check{C}^2(\mathcal{U},\mathbb{Z})$ e $\delta f = 0$. A definição de $\delta_*[g] = [f] \in \check{H}^2(M,\mathbb{Z})$.

Definição 5.23. Para L um fibrado de linha holomorfo em M, determinado por um co-cíclo $g = \{g_{\alpha\beta}\}$, definimos **a primeira classe de Chern de** L por

$$c_1(L) = \delta_*[g] \in \check{H}^2(M,\mathbb{Z}).$$

Em particular, δ_* é um homomorfismo entre os grupos de cohomologia, e a estrutura de grupo de $\mathrm{Pic}(M)$ é induzida pelo produto tensorial de fibrados, nós temos $c_1(L\otimes L') = c_1(L) + c_1(L')$.

Exemplo. Já vimos que para o espaço projetivo complexo $M = \mathbb{P}^n$,

- $\check{H}^1(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0$,
- $\check{H}^2(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0$,
- $\check{H}^2(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Logo, a sequência exata longa induzida pela sequência de Euler é, nesse caso,

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

e todo fibrado de linha holomorfa em $\mathbb{P}^n$ é unicamente determinado, ao menos isomorfismo holomorfo, por sua primeira classe de Chern.

6 A Teoria de Chern-Weil

6.1 Polinômios Invariantes e Formas Fechadas

Para começar, consideramos um espaço vetorial complexo V de dimensão finita. Seja $\bar{p} : V \to \mathbb{C}$ um polinômio homogêneo em V de grau k. Então $\bar{p}(\lambda v) = \lambda^k \bar{p}(v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in V$. $\bar{p}$ é equivalente a uma aplicação k-multi-linear $p \in \mathrm{Sym}^k(V^*) \subseteq V^* \otimes \cdots \otimes V^*$

$$p : V \times \cdots \times V \to \mathbb{C}$$

definida por $p(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \lambda_k} |_{\lambda=0} \bar{p}(\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_k v_k)$. Dado forma simétrica p, obtemos polinômio $\bar{p}(v) = p(v, v, \ldots, v)$.

Por exemplo, para $v = (z_1, z_2) \in V = \mathbb{C}^2$ e $\bar{p}$ o polinômio cúbico $\bar{p}(z_1, z_2) = z_1^2 z_2$, temos

$$p(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{3} \left(z_1 w_1 x_2 + z_1 x_1 w_2 + w_1 x_1 z_2 \right),$$

onde $v_1 = (z_1, z_2)$, $v_2 = (w_1, w_2)$ e $v_3 = (x_1, x_2)$.

Dado $r \geq 1$, consideramos o espaço vetorial $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ de todas as $r \times r$ matrizes complexos, com colchete de Lie $[A, B] = AB - BA$. O grupo $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ age em $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ por $g \cdot A = gAg^{-1}$. Um polinômio

$$p : \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}) \times \cdots \times \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

é **invariante** se para todo $A_i \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ e $g \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$,

$$p(A_1, \ldots, A_k) = p(gA_1 g^{-1}, \ldots, gA_k g^{-1}).$$

Por exemplo, para $\bar{p}(A) = \mathrm{tr}(A^2)$, com polarização $p(A_1, A_2) = \mathrm{tr}(A_1 A_2)$, temos

$$p(gA_1 g^{-1}, gA_2 g^{-1}) = \mathrm{tr}(gA_1 A_2 g^{-1}) = \mathrm{tr}(A_1 A_2).$$

Lema 6.1. *Se $\bar{p}$ é um polinômio homogêneo invariante em $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$, então para todo $B, B_1, B_2, \ldots, B_k$,*

$$\sum_{i=1}^{k} p(B_1, \ldots, B_{j-1}, [B, B_j], B_{j+1}, \ldots, B_k) = 0.$$

Demonstração. Considere a curva $g_t = e^{tB} \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$, $g_0 = I$, $\frac{d}{dt}|_{t=0} e^{tB} = B$. Então, para todo $A \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$, $\frac{d}{dt}|_{t=0}(g_t A g_t^{-1}) = [B, A]$, e

$$\begin{aligned}
p(B_1, \ldots, B_k) &= p(e^{tB} B_1 e^{-tB}, \ldots, e^{tB} B_k e^{-tB}), \\
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} p(B_1, \ldots, B_k) = 0 &= \sum_{j=1}^{k} p(B_1, \ldots, \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (g_t B_j g_t^{-1}), \ldots, B_k), \\
&= \sum_{j=1}^{k} p(B_1, \ldots, B_{j-1}, [B, B_j], B_{j+1}, \ldots, B_k) = 0.
\end{aligned}$$

Essa relação pode ser generalizada um pouco. Seja $\Lambda^i = \Lambda^i(\mathbb{R}^n)^*$ o espaço de i-covetores em $\mathbb{R}^n$ e $\Lambda^* = \bigoplus_{i=0}^n \Lambda^i$ a álgebra exterior em $\mathbb{R}^n$. Estendemos a aplicação k-multi-linear p para

$$p : \Lambda^{i_1} \otimes \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}) \times \cdots \times \Lambda^{i_k} \otimes \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}) \longrightarrow \Lambda^{i_1 + \cdots + i_k} \otimes \mathbb{C}.$$

Em elementos decomponíveis $\Phi_1 = \alpha_1 \otimes B_1$, ... , $\Phi_k = \alpha_k \otimes B_k$, para $\alpha_j \in \Lambda^{i_j}$ e $B_j \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} p(\Phi_1, \ldots, \Phi_k) &= p(\alpha_1 \otimes B_1, \ldots, \alpha_k \otimes B_k), \\ &= \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k . p(B_1, \ldots, B_k). \end{aligned}$$

Proposição 6.2. *Suponha que $i_j = 2a_j$ e $\Phi_j \in \Lambda^{2a_j} \otimes \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ para todo j e que $\theta \in \Lambda^i \otimes \mathfrak{gl}(r\mathbb{C})$. Então se p é um polinômio homogêneo invariante em $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$, então*

$$\sum_{j=1}^k p(\Phi_1, \ldots \Phi_{j-1}, [\theta, \Phi_j], \ldots, \Phi_k) = 0.$$

Observação. Esse resultado também vale caso os valores i_j não seja pares. Nesse caso, um fator de $(-1)^X$ aparece na soma, e o colchete deve ser modificado para que $\Lambda^* \otimes \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ tenha a estrutura de uma álgebra de Lie graduada. A demonstração é igual mas ficamos com o caso mais simples para facilitar a exposição.

Demonstração. A expressão é linear em todos os termos Φ_j e θ, então podemos supor que $\Phi_j = \alpha_j \otimes B_j$ e $\theta = \alpha \otimes B$. Definimos uma ação de $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ em $\Lambda^{i_j} \otimes \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ por

$$g_t \cdot \Phi_j = g \cdot (\alpha_j \otimes B_j) = \alpha_j \otimes g B_j g^{-1}.$$

Então, se $g_t = e^{tB}$ como acima,

$$p(g_t \cdot \Phi_1, \ldots, g_t \cdot \Phi_k) \quad = \quad \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k p(g_t B_1 g_t^{-1}, \ldots, g_t B_k g_t^{-1}) = p(\Phi_1, \ldots, \Phi_k).$$

Logo,

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} p(g_t \cdot \Phi_1, \ldots, g_t \cdot \Phi_k) \quad = \quad = \sum_{j=1}^k p(\Phi_1, \ldots, [B, \Phi_j], \ldots, \Phi_k).$$

Então, se $\theta = \alpha \otimes B$, para Λ^i,

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \wedge \sum_{j=1}^k p(\Phi_1, \ldots, [B, \Phi_j], \ldots, \Phi_k), \\ &= \sum_{j=1}^k p(\Phi_1, \ldots, [\alpha \otimes B, \Phi_j], \ldots, \Phi_k), \end{aligned}$$

porque todos os covetores $\Phi_j \in \Lambda^{2a_j} \otimes \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ tem grau *par*, logo comutam com α.

Agora relacionamos essas observações à geometria de variedades e dos fibrados nelas. Seja M uma variedade diferenciável e $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial complexo de posto r em M. Seja ∇ uma conexão em E. Lembramos que a curvatura de ∇ é uma 2-forma com valores no fibrado $\mathrm{End}(E)$. Seja p um polinômio homogêneo invariante de grau k no espaço vetorial $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$. O fibrado vetorial E pode ser trivializado em conjuntos U_α cobrindo M, e seja $e^\alpha = \{e_i\}$ um referencial em U_α. Com respeito a esse referencial, a curvatura de ∇ tem a forma

$$\begin{aligned} F^\nabla &= \sum_{ij} e^i \otimes e_j \otimes \Theta_i^j, \\ \text{onde} \quad \Theta^\alpha = (\Theta_i^j) &= d\theta^\alpha + \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha \end{aligned}$$

é uma matriz $r \times r$ de 2-formas em U_α. Consideramos a $2k$-forma $p(\Theta^\alpha, \dots, \Theta^\alpha) = \bar{p}(\Theta^\alpha) \in \mathscr{E}^{2k}(U_\alpha)$. Se e^β é uma outra referencial, com $e_i^\beta = \sum_j e_j^\alpha\, g_{ji}$, então na interseção $U_\alpha \cap U_\beta$, $\Theta^\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} \cdot \Theta^\alpha \cdot g_{\alpha\beta}$. O ponto crucial que segue disso é que na interseção $U_\alpha \cap U_\beta$,

$$\bar{p}(\Theta^\beta) = \bar{p}(g_{\alpha\beta}^{-1} \cdot \Theta^\alpha g_{\alpha\beta}) = \bar{p}(\Theta^\alpha).$$

As duas $2k$-formas coincidem em toda dupla-interseção de elementos da cobertura, então as formas locais $\bar{p}(\Theta^\alpha)$ determinam uma $2k$-forma global em M, que denotaremos por $p(F^\nabla)$ ou $p(F^\nabla, \dots, F^\nabla)$. Vamos investigar as propriedades dessa forma.

Lema 6.3.

$$dp(F^\nabla) = 0.$$

Demonstração. Temos Seja Θ a forma de curvatura de ∇ em uma trivialização local. Então, $p(F^\nabla) = p(\Theta, \dots, \Theta)$, onde p é k-multi-linear. Logo, usando que Θ tem grau dois,

$$dp(F^\nabla) = \sum_j p(\Theta, \dots, d\Theta, \dots, \Theta).$$

Pela segunda identidade de Bianchi, $d\Theta + [\theta, \Theta] = 0$, e

$$dp(F^\nabla) = -\sum_j p(\Theta, \dots, [\theta, \Theta], \dots, \Theta) = 0$$

pela invariânça do polinômio $\bar{p}$.

Observamos que esse cálculo pode ser escrito invariantemenete, sem falar de referenciais, como

$$dp(F^\nabla, \dots, F^\nabla) = \sum_j p(F^\nabla, \dots, d^\nabla F^\nabla, \dots, F^\nabla) = 0,$$

pois $d^\nabla F^\nabla = 0$. Essa equação vale em um pouco mais generalidade. Se $\Phi_j \in \mathscr{E}^{i_j}(\mathrm{End}(E))$ são formas de grau i_j, com valores em endomorfismos de E, temos

$$dp(\Phi_1, \dots, \Phi_k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{i_1 + \cdots i_{j-1}} p(\Phi_1, \dots, d^\nabla \Phi_j, \dots, \Phi_k).$$

A demonstração dessa fórmula é muito parecida a o que já vimos, e utiliza a extensão do colchete de Lie em $\mathfrak{gl}(r,\mathbb{C})$ para a álgebra de Lie graduada $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathfrak{gl}(r,\mathbb{C})$ e a fórmula em coordenadas para a derivada covariante exterior em $\mathscr{E}^i(\mathrm{End}(E))$ que vimos em Exercício ***.

Dado um fibrado vetorial complexo E de posto r com uma conexão ∇, e dado um polinômio invariante $\bar{p}$ na álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(r,\mathbb{C})$ de grau k, obtemos uma $2k$-forma $\bar{p}(F^\nabla) \in \mathscr{E}^{2k}(M,\mathbb{C})$ em M.

Proposição 6.4. *Se ∇ e ∇' são duas conexões em E, então*

$$\bar{p}(F^{\nabla'}) - \bar{p}(F') = d\alpha$$

para alguma $2k-1$-forma $\alpha \in \mathscr{E}^{2k-1}(M,\mathbb{C})$.

Isso é dizer, as formas $\bar{p}(F^{\nabla'})$ e $\bar{p}(F^\nabla)$ definem a mesma classe de cohomologia $[\bar{p}(F^\nabla)] \in H^{2k}_{dR}(M)$.

Lema 6.5. *Se ∇' e ∇ são conexões em E, então a diferênça $A = \nabla' - \nabla$ é um tensor, pertencendo no espaço $\mathscr{E}^1(\mathrm{End}(E))$.*

Demonstração. Seja $f \in C^\infty(M)$ e $\sigma \in \mathscr{E}^0(E)$. Então

$$\begin{aligned} A(f\sigma) &= \nabla'(f\sigma) - \nabla(f\sigma), \\ &= df \otimes \sigma + f\nabla'\sigma - df \otimes \sigma - f\nabla\sigma, \\ &= fA\sigma. \end{aligned}$$

então $A : \Gamma(E) \to \Gamma(\Lambda^1 \otimes E)$ é um morfismo de $C^\infty(M)$-módulos, então é dado por uma seção do fibrado $\mathrm{Hom}(E, \Lambda^1 \otimes E) = \Lambda^1 \otimes \mathrm{End}(E)$.

Lema 6.6. *Se ∇ é uma conexão em E e $A \in \mathscr{E}^1(\mathrm{End}(E))$ é uma 1-forma com valores em endormorfismos, então $\nabla' = \nabla + A$ é uma conexão em E*

A demonstração é imediata, assim de mostrar que o mapa

$$\nabla' : \mathscr{E}^0(E) \longrightarrow \mathscr{E}^1(E)$$

satisfaz a regra de Leibniz.

Lema 6.7. *Se $\nabla' = \nabla + A$, então a curvatura da conexão ∇' é dada por*

$$F^{\nabla'} \quad = \quad F^\nabla + d^\nabla A + A \wedge A,$$

Aqui $d^\nabla : \mathscr{E}^1(\mathrm{End}(E)) \to \mathscr{E}^2(\mathrm{End}(E))$ é a extensão de ∇^{End} para 1-formas com valores em endomorfismos. O produto $A \wedge A$ é dado pontualmente

$$\Lambda^1 \otimes \mathrm{End}(E) \times \Lambda^1 \otimes \mathrm{End}(E) \longrightarrow \Lambda^2 \otimes \mathrm{End}(E).$$

combinando o produto exterior em covetores com composição de endomorfismos.

Demonstração. Mostramos a identidade em algum ponto $x \in M$. Sejam $X, Y \in \Gamma(TM)$ campos vetoriais, e supomos que $[X,Y](x) = 0$. Seja $\sigma \in \Gamma(E)$. Então, em x,

$$\begin{aligned} F^{\nabla'}_{X,Y}\sigma &= (\nabla_X + A_X)(\nabla_Y + A_Y)\sigma - (\nabla_Y + A_Y)(\nabla_X + A_X)\sigma, \\ &= (\nabla_X\nabla_Y\sigma - \nabla_Y\nabla_X\sigma) \\ &\qquad +[\nabla_X, A_Y]\sigma - [\nabla_Y, A_X]\sigma + (A_XA_Y - A_YA_X)\sigma, \\ &= F^\nabla_{X,Y}\sigma + (d^\nabla A)_{X,Y}\sigma + (A \wedge A)_{X,Y}\sigma. \end{aligned}$$

Teorema 6.8. *Sejam $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial complexo de posto r, ∇, ∇' conexões em E e $\bar{p}$ um polinômio homogêneo invariante de grau k em $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$. Então*

$$p(F^{\nabla'}) = p(F^{\nabla}) + d\alpha$$

para alguma forma $\alpha \in \mathscr{E}^{2k-1}(M)$.

Demonstração. Temos o tensor $\nabla' - \nabla = A \in \mathscr{E}^1(\mathrm{End}(E))$, então consideramos uma família de conexões

$$\nabla_t = \nabla + tA$$

para $t \in [0,1]$. Isso define uma curva no espaço de todas as conexões em E, com $\nabla_0 = \nabla$ e $\nabla_1 = \nabla'$. Afirmamos

$$d^{\nabla_t} A = d^{\nabla} A + 2tA \wedge A.$$

A prova disso é imediata, por uma conta muito parecida à demonstração do último lema. Também, pelo Lema 6.7 a curvatura da conexão ∇_t é dada por $F^{\nabla_t} = F^{\nabla} + td^{\nabla} A + t^2 A \wedge A$ e logo

$$\frac{d}{dt} F^{\nabla_t} = d^{\nabla} A + 2tA \wedge A = d^{\nabla_t} A.$$

Agora, considerando o polinômio $\bar{p}$, e mapa multi-linear simétrico associado p,

$$\begin{aligned} d\, p(A, F^{\nabla_t}, \ldots, F^{\nabla_t}) &= p(d^{\nabla_t} A, F^{\nabla_t}, \ldots, F^{\nabla_t}), \\ &= p(\frac{d}{dt} F^{\nabla_t}, F^{\nabla_t}, \ldots, F^{\nabla_t}), \\ &= \frac{1}{k} p(F^{\nabla_t}, \ldots, F^{\nabla_t}). \end{aligned}$$

A primeira equação segue da observação após o Lema 6.3. A última igualdade segue por que p é simétrica :

$$\frac{d}{dt} p(F^{\nabla_t}, \ldots, F^{\nabla_t}) = \sum_1^k p(F^{\nabla_t}, \ldots, \frac{d}{dt} F^{\nabla_t}, \ldots, F^{\nabla_t}) = k\, p(\frac{d}{dt} F^{\nabla_t}, F^{\nabla_t}, \ldots, F^{\nabla_t}).$$

Logo, nós temos

$$\begin{aligned} p(F^{\nabla'}) - p(F^{\nabla}) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} p(F^{\nabla_t}, \ldots, F^{\nabla_t}) dt, \\ &= k \int_0^1 dp(A, F^{\nabla_t}, \ldots, F^{\nabla_t}) dt, \\ &= d\alpha, \end{aligned}$$

para $\alpha = k \int_0^1 p(A, F^{\nabla_t}, \ldots, F^{\nabla_t}) dt \in \mathscr{E}^{2k-1}(M)$.

Podemos concluir o seguinte. Se $E \to M$ é um fibrado vetorial complexa numa variedade diferenciável M e ∇, ∇' são conexões em E, então aplicando o polinômio $\bar{p}$ nas curvaturas de ∇ e ∇' determina a mesma classe de cohomologia de De Rham.

$$\underline{p}(E) = [p(F^{\nabla})] = [p(F^{\nabla'})] \in H^{2k}(M, \mathbb{C}).$$

A classe independe de qual conexão de usamos para definir-la, então determina um invariante apenas do fibrado E.

definição de uma classe característica?

6.2 As Classes de Chern

Numa certa forma, essa seção consiste-se de um exemplo estendido da construção que acabamos de ver. As classes de Chern são classes de cohomologia associadas a cada fibrado vetorial complexo, com a propriedade adicional de ser bem adaptadas com respeito à soma direta de fibrados vetoriais. Essa propriedade facilita altamente as contas para calculá-las.

Consideramos o polinômio em $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ dado por

$$B \longmapsto \operatorname{tr}(I + B).$$

Observamos que é invariante, pois $\det(I + gBg^{-1}) = \det(g(I + B)g^{-1}) = \det(I + B)$. Segundo, a expressão não é homogêneo em B, então decompomos o determinante em termos homogêneos :

$$\det(I + B) = 1 + p_1(B) + p_2(B) + \cdots + p_r(B),$$

onde $p_k(B)$ satisfaz $p_k(\lambda B) = \lambda^k p_k(B)$. $p_k(B)$ é dado por

$$\left.\frac{d^k}{dt^k}\right|_{t=0} \det(I + tB) = \left.\frac{d^k}{dt^k}\right|_{t=0} p_k(tB) = k! p_k(B).$$

Por exemplo, para $k = 1$, $p_1(B) = \operatorname{tr}(B)$. Observamos que a expressão $\det(I+B)$ é invariante pela ação adjunta de $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$, então os polinômios homogêneos também o são.

Definição 6.9. Seja $E \to M$ um fibrado vetorial complexo de posto r com conexão ∇.

1. A **k-éssima forma de Chern** do duplo (E, ∇) é

$$c_k(E, \nabla) = p_k\left(\frac{i}{2\pi} F^\nabla\right) \in \mathscr{E}^{2k}(M, \mathbb{C}).$$

2. A **k-éssima classe de Chern** de E é

$$c_k(E) = \left[p_k\left(\frac{i}{2\pi} F^\nabla\right)\right] \in H^{2k}(M, \mathbb{C}).$$

3. A **classe de Chern total** de E é a soma

$$\begin{aligned} c(E) &= 1 + c_1(E) + c_2(E) + \cdots + c_r(E), \\ &= \left[\det\left(I + \frac{i}{2\pi} F^\nabla\right)\right], \\ &\in H^{2*}(M, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Exemplo. Para $k = 1$, já vimos que $p_1(B) = \operatorname{tr}(B)$, e logo $c_1(E, \nabla) = \frac{i}{2\pi}\operatorname{tr}(F^\nabla)$. Em particular, se $L \to M$ é um fibrado de linhas, $c_1(L, \nabla) = \frac{i}{2\pi} F^\nabla$ e $c_1(L) = [\frac{i}{2\pi} F^\nabla]$. Nós já vimos a definição da primeira classe de Chern de um fibrado de linha holomorfa. Veremos mais tarde que as duas definições coincidem.

Queremos entender melhor os polinômios p_k. Supomos que a matriz $B \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ tem r auto-valores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Em particular, isso implica que B é diagonalizavel. Observamos que o sub-conjunto de $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ de matrizes satisfazendo essa condição é denso. Então se

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix} \\ \text{então,} \quad \det(I + B) &= \prod_{j=1}^{r} (1 + \lambda_j), \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{r} \lambda^r + \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j + \cdots, \\ &= \sigma_0(\lambda) + \sigma_1(\lambda) + \cdots + \sigma_r(\lambda), \end{aligned}$$

onde os termos σ_j são os polinômios elementares simétrics em $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$. Temos $\sigma_0(\lambda) \equiv 1$, $\sigma_1(\lambda) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$, e em geral,

$$\sigma_j(\lambda) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_j \le r} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_j}.$$

Também, $p_r(B) = \sigma_r(\lambda) = \lambda_1 \cdots \lambda_r = \det(B)$. Como já vimos na demonstração do teorema da preparação de Weierstrass, esses polinômios podem ser espressados algebricamente em termos dos polinômios $\sum_{i=1}^r \lambda_i^j$, para $1 \le j \le r$. Por exemplo, como vimos naquele caso,

$$\begin{aligned} p_1(B) = \sigma_1(\lambda) &= \operatorname{tr}(B), \\ p_2(B) = \sigma_2(\lambda) &= \frac{1}{2}((\lambda_1 + \cdots + \lambda_r)^2 - (\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_r^2)) = \frac{1}{2}(\operatorname{tr}B)^2 - \operatorname{tr}(B^2)), \\ p_3(B) = \sigma_3(\lambda) &= \frac{1}{6}((\operatorname{tr}B)^3 - 3\operatorname{tr}(B^2)\operatorname{tr}B + 2\operatorname{tr}(B^3)). \end{aligned}$$

Observamos que o teorema de Newton sobre geradores do espaço de polinômios invariantes em r variáveis implica essas identidades para matrizes diagonalizáveis B, mas pela densidade de matrizes diagonalizáveis em $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$, essas expressões valem para qualquer matriz complexa.

Corolário 6.10. *Seja (E, ∇) um fibrado vetorial complexa com uma conexão. Então temos relações entre classes de cohomologia.*

1. $c_1(E) = \left[\frac{i}{2\pi}\operatorname{tr}(F^\nabla)\right] \in H^2(M, \mathbb{C})$.

2. $$\begin{aligned} c_2(E) &= \left[p_2\left(\frac{i}{2\pi}F^\nabla\right)\right], \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\operatorname{tr}\frac{i}{2\pi}F^\nabla\right)^2 - \operatorname{tr}\left((\frac{i}{2\pi}F^\nabla)^2\right)\right], \\ &= \frac{1}{2}c_1(E)^2 + \frac{1}{8\pi^2}\left[\operatorname{tr}(F^\nabla \wedge F^\nabla)\right]. \end{aligned}$$

O produto na última linha é o produto *cup* na álgebra de cohomologia que, em cohomologia de De Rham, é determinado pelo produto exterior em formas.

A normalização por $\frac{i}{2\pi}$ na definição das classes de Cherno é para garantir que $c_k(E) \in H^{2k}(M, \mathbb{Z})$, o pelo menos na imagem de $H^{2k}(M, \mathbb{Z})$ em $H^{2k}(M, \mathbb{C})$ induzida pela inclusão de feixes $\underline{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \underline{\mathbb{C}}$.

Proposição 6.11. *As classes de Chern satisfazem as propriedades seguintes.*

1. *(Naturalidade) Se $E \to N$ é um fibrado vetorial e $f : M \to N$ é uma aplicação suave e $f^*E \to M$ o fibrado pull-back sobre M, então a classe de Chern total satisfaz,*
$$c(f^*E) = f^*c(E),$$
onde $f^* : H^{2*}(N, \mathbb{C}) \to H^{2*}(M, \mathbb{C})$ é o mapa induzido por pull-back de formas.

2. *(Fórmula de Whitney) Se E, F são fibrados vetoriais em M e $E \oplus F \to M$ é o fibrado soma direto, então*
$$c(E \oplus F) = c(E) \cdot c(F),$$
onde $\cdot$ é o produto em cohomologia $H^{2*}_{dR}(M, \mathbb{C})$ induzido pelo produto exterior de formas.

3. *(Normalização) A primeira classe de Chern do fibrado tautológico $\Lambda \to \mathbb{P}^1$ é*
$$c_1(\Lambda) = -\left[\frac{1}{2\pi}\omega_{FS}\right],$$
onde ω_{FS} é a forma Hermitiana da métrica de Fubini-Study em $\mathbb{P}^n$.

Demonstração. A prova da primeira afirmação é omitida (por enquanto) porque não foi discutido o pull-back de conexões e curvatura, mas com isso a demonstração é imediata.

A forma de Chern total de um fibrado com conexão (E, ∇) é
$$c(E, \nabla) = \det\left(I + \frac{i}{2\pi}F^{\nabla}\right),$$
e a classe de Chern total de E é a classe de cohomologia dessa forma. No fibrado soma direto $E \oplus F$, podemos considerar a conexão $\nabla^E + \nabla^F$, cuja curvatura satisfaz
$$I + \frac{i}{2\pi}F^{\nabla^E + \nabla^F} = \begin{pmatrix} I_E + \frac{i}{2\pi}F^{\nabla^E} & 0 \\ 0 & I_F + \frac{i}{2\pi}F^{\nabla^F} \end{pmatrix} \in \mathscr{E}^2(\mathrm{End}(E \oplus F)).$$
O determinante decompõe-se
$$\det\left(I + \frac{i}{2\pi}F^{\nabla^E + \nabla^F}\right) = \det\left(I_E + \frac{i}{2\pi}F^{\nabla^E}\right) \wedge \det\left(I_F + \frac{i}{2\pi}F^{\nabla^F}\right)$$

como desejado. No fibrado tautológico $\Lambda \to \mathbb{P}^1$, temos a conexão $\nabla = \pi_\Lambda \circ d$, pois $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2$ é um sub-fibrado do fibrado trivial. Já vimos que a curvatura é dada em $U_0 = \mathbb{P}^1 \setminus \{[1;0]\}$ por $F^\nabla = \bar{\partial}\partial \log(1+|z|^2)$. Logo,

$$c_1(\Lambda) = \left[\frac{i}{2\pi} F^\nabla\right] = \left[\frac{-1}{2\pi} i\partial\bar{\partial}\log(1+|z|^2)\right] = \frac{-1}{2\pi}[\omega_{FS}]$$

Esse último ponto pode ser desenvolvido mais. Já sabemos que $H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ e o isomorfismo (em cohomologia de De Rham) é dado por integração de 2-formas fechadas em $\mathbb{P}^1$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{P}^1} : H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ [\alpha] &\longmapsto \int_{\mathbb{P}^1} \alpha. \end{aligned}$$

Temos $c_1(\Lambda) = [\frac{i}{2\pi}F^\nabla]$, e $\bar{\partial}\partial \log(1+|z|^2) = \frac{1}{(1+|z|^2)^2} d\bar{z} \wedge dz = \frac{2ir}{(1+r^2)^2} dr \wedge d\theta$. Logo,

$$\frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{P}^1} F^\nabla = \frac{-1}{\pi}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r\, dr d\theta}{(1+r^2)^2} = -1.$$

Por isso, e por outros motivos vindo da geometria algébrica, escrevemos o fibrado tautológico em $\mathbb{P}^n$ como $\Lambda = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$. Já vimos que $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$ e Λ é o único fibrado vetorial holomorfo L em $\mathbb{P}^n$, ao menos isomorfismo, com $c_1(L)[\mathbb{P}^1] = -1$.

Consideramos o fibrado dual Λ^* ao fibrado tautológico. Uma conexão ∇^Λ em Λ induz uma conexão ∇^{Λ^*} em Λ^*. Se $\alpha \in \mathscr{E}^0(\Lambda^*)$ e $v \in \mathscr{E}^0(\Lambda)$, $\alpha(v) \in C^\infty(\mathbb{P}^n)$. ∇^{Λ^*} é definida por

$$(\nabla^{\Lambda^*}\alpha)(v) = d(\alpha(v)) - \alpha(\nabla^\Lambda v).$$

Deixamos como um exercício verificar que $F^{\nabla^{\Lambda^*}} = -F^{\nabla^\Lambda}$, e então

$$c_1(\Lambda^*) = \left[\frac{i}{2\pi}F^{\nabla\Lambda^*}\right] = -c_1(\Lambda).$$

Assim, $c_1(\Lambda^*)[\mathbb{P}^1] = +1$ e denotamos $\Lambda^* = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$.

Para terminar esse capítulo, estudamos em mais detalhe a variedade $\mathbb{P}^n$ e o fibrado tangente $V = T\mathbb{P}^n$. Primeiro, por $\mathbb{P}^n$ ser uma variedade diferenciável de dimensão real $2n$, $T\mathbb{P}^n$ é um fibrado vetorial real de posto $2n$. Porém, o fibrado de vetores complexos de tipo $(1,0)$

$$T^{1,0}\mathbb{P}^n = \{X - iJX \mid X \in T\mathbb{P}^n\}$$

é um fibrado vetorial complexo de posto n em $\mathbb{P}^n$. Até esse ponto, já consideramos

1. o fibrado trivial $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{P}^n$;
2. o fibrado tautológico $\Lambda \to \mathbb{P}^n$;
3. o fibrado produto tensorial $\mathbb{C}^{n+1} \otimes \Lambda^* = \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{C}^{n+1}) \to \mathbb{P}^n$.

Proposição 6.12. *Existe um homomorfismo (holomorfo) de fibrados vetoriais* $\Psi : \mathbb{C}^{n+1} \otimes \Lambda^* \to T^{1,0}\mathbb{P}^n$ *tal que, para todo* $\xi \in \mathbb{P}^n$,

$$\Psi_\xi : \mathbb{C}^{n+1} \otimes \Lambda^*_\xi \longrightarrow T^{1,0}_\xi \mathbb{P}^n$$

é sobrejetiva.

Demonstração. Dado $\xi \in \mathbb{P}^n$, um vetor $X \in T^{1,0}_\xi \mathbb{P}^n$ é dado ou por uma mapa holomorfa $\gamma : \Delta_\varepsilon \in \mathbb{P}^n$, com $\gamma(0) = \xi$, onde $\Delta_\varepsilon = B(0, \varepsilon) \subseteq \mathbb{C}$, ou por uma derivação $X : C^\infty_\xi \to \mathbb{C}$ em germes suaves em ξ tal que $X \cdot f = 0$ se f é anti-holomorfo em ξ. Para $\xi \in \mathbb{P}^n$, seja $v \in \xi$ um elemento daquela linha. Dado $\phi \in (\mathbb{C}^{n+1} \otimes \Lambda^*)_\xi = \mathrm{Hom}\xi, \mathbb{C}^{n+1})$ uma aplicação linear, definimos

$$\begin{array}{rcl} \gamma_\phi : \Delta_\varepsilon & \longrightarrow & \mathbb{P}^n, \\ \gamma_\phi(z) & = & [v + z\phi(v)], \\ & = & \text{ a linha gerada por } \ v + z\phi(v), \\ & = & \mathrm{Im}\{I + z\phi : \xi \to \mathbb{C}^{n+1}\}. \end{array}$$

Primeiro, observamos que isso é bem definido e independente do vetor $v \in \xi$. Assim, o germe do mapa γ_ϕ determine um vetor tangente X em ξ. Como uma derivação, X é dado por, para $f \in C^\infty_\xi$,

$$X \cdot f = \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{z=0} f(\gamma_\phi(z)).$$

Definimos $\Psi(\phi) = X$. Mostramos que X é de tipo $(1,0)$ e que Φ_ξ é sobrejetivo. Em uma carta de coordenadas $U_0 = \{\xi = [1 : w^1 : \cdots : w^n]\} \subseteq \mathbb{P}^n$, escrevemos X em termos dos vetores $\partial/\partial w^j$. Pegamos $\xi = [1 : w^1 : \cdots : w^n]$ e $v = (1, w^1, \ldots, w^n)$. Para $\phi : \xi \to \mathbb{C}^{n+1}$, seja $\eta = \phi(v) = (\eta^0, \eta^1, \ldots, \eta^n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Então,

$$\begin{array}{rcl} \gamma_\phi(z) = [v + z\phi(v)] & = & (1, w^1, \ldots, w^n) + z(\eta^0, \ldots, \eta^n)], \\ & = & [1 + z\eta^0 : w^1 + z\eta^1 : \cdots : w^n + z\eta^n], \\ & = & \left[1 : \dfrac{w^1 + z\eta^1}{1 + z\eta^0} : \cdots : \dfrac{w^n + z\eta^n}{1 + z\eta^0}\right]. \end{array}$$

Logo, usando a expressão $X \cdot f = \frac{\partial}{\partial z}\big|_{z=0} f(\gamma_\phi(z))$, vemos que

$$\begin{array}{rcl} X & = & (\eta^1 - w\eta^0)\dfrac{\partial}{\partial w^1} + \cdots (\eta^1 - w^n\eta^0)\dfrac{\partial}{\partial w^n}, \\ & = & \Psi_\xi(\phi) \in T^{1,0}_\xi \mathbb{P}^n. \end{array}$$

Variando os valores possíveis de $(\eta^0, \ldots, \eta^n) \sim \phi$ demonstra que Ψ é sobrejetiva.

Para determinar o núcleo de Ψ, primeiramente observamos que o fibrado tautológico Λ é um sub-fibrado, de posto um, de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Proposição 6.13. $\ker \Psi = \Lambda \otimes \Lambda^* \subseteq \mathbb{C}^{n+1} \otimes \Lambda^*$.

Além disso, lembramos que para qualquer fibrado de linha L, o produto $L \otimes L^*$ é trivial.

Demonstração. Seja $\phi \in \mathbb{C}^{n+1} \otimes \Lambda_\xi^*$ tal que $\Psi(\phi) = 0$. Usando a notação da última demonstração, temos $\xi = [1 : w]$, $v = (1, w)$ e $\eta = \phi(v) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Então,

$$\Psi(\phi) = (\eta^1 - w^1\eta^0)\frac{\partial}{\partial w} + \cdots + (\eta^n - w\eta^n)\frac{\partial}{\partial w^n} = 0$$

se e somente se todos os coeficientes são iguais a zero, o que é dizer que $\eta = (\eta^0, \eta^1, \ldots, \eta^n) = \eta^0(1, w^1, \ldots, w^n) = \eta^0.v \in \xi$. Isso é dizer, se e somente se $\phi : \xi \to \xi$, e $\phi \in \Lambda_\xi \otimes \Lambda_\xi^*$.

Logo, temos uma sequência exata curta de fibrados vetoriais

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \otimes \Lambda^* \longrightarrow T^{1,0}\mathbb{P}^n \longrightarrow 0,$$

e isomorfismos de fibrados

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{n+1} \otimes \Lambda^* &\cong \Lambda^* \oplus \Lambda^* \oplus \cdots \oplus \Lambda^*, \\ &\cong \underline{\mathbb{C}} \oplus E, \end{aligned}$$

onde $E = (\underline{\mathbb{C}})^\perp$ é um sub-fibrado de $\mathbb{C}^{n+1} \otimes \Lambda^*$, com um isomorfismo

$$\Psi : E \longrightarrow T^{1,0}\mathbb{P}^n.$$

Próximo, a primeira classe de $\Lambda^* = \mathbb{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ já foi calculada como $c_1(\Lambda^*) = [\frac{1}{2\pi}\omega_{FS}]$, o que denotaremos por α. A classe de Chern total é logo $c(\Lambda^*) = 1 + \alpha$. Pela Fórmula de Decomposição de Whitney, temos

$$\begin{aligned} c(\Lambda^* \oplus \cdots \oplus \Lambda^*) &= c(\Lambda^*) \cdot c(\Lambda^* \cdot \cdots \cdot c(\Lambda^*), \\ &= (1 + \alpha)^{n+1}, \\ &= c(\underline{\mathbb{C}} \oplus T^{1,0}\mathbb{P}^n), \\ &= c(\underline{\mathbb{C}}) \cdot c(T^{1,0}\mathbb{P}^n) = c(T^{1,0}\mathbb{P}^n). \end{aligned}$$

Isso é dizer que nós calculamos todas as classes de Chern do fibrado tangente de $\mathbb{P}^n$. Em particular, temos $c_k(T^{1,0}\mathbb{P}^n) = \binom{n+1}{k}\alpha^k \in H^{2k}(\mathbb{P}^n)$ para $k = 0, 1, \ldots, n$.

7 Geometria Kähleriana

7.1 Propriedades Locais de Métricas Kählerianas

Como nas seções anteriores, supomos que M^{2n} é uma variedade diferenciável real de dimensão real $2n$. Seja $J \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ um campo de endomorfismos de TM que satisfaz $J^2 = -\mathrm{Id}$. Lembramos que uma métrica Riemanniana g é *Hermitiana* se

pseudo-Hermitian?

$$g(Jv, Jw) = g(v, w)$$

para todo $v, w \in T_pM$ e todo $p \in M$. Nesse caso, o tensor ω definido por $\omega(v, w) = g(Jv, w)$ é uma 2-forma anti-simétrica.

Proposição 7.1. *A forma de volume Riemanniana da métrica g é dada por*

$$dvol_g = \frac{\omega^n}{n!} \in \mathscr{E}^{2n}(M).$$

Antes de demonstrar isso, observamos que para a forma de volume ser definida, é necessário impor uma orientação na variedade. Mas, já vimos que uma estrutura complexa numa variedade induz naturalmente uma orientação.

Demonstração. Em um ponto $x \in M$, $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ uma base ortonormal de T_xM tal que $Je_{2j-1} = e_{2j}$ e $Je_{2j} = -e_{2j-1}$ e seja $\{e^1, \dots, e^{2n}\}$ a base dual de T_x^*M. Então, verifique-se que, com respeito a essa base $g = \sum_{j=1}^{2n} e^j \otimes e^j$ e $\omega = \sum_{j=1}^{n} e^{2j-1} \wedge e^{2j}$. Logo,

$$\begin{aligned} \omega^n &= \left(\sum_{i_1} e^{2i_1-1} \wedge e^{2i_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_n} e^{2i_n-1} \wedge e^{2i_n}\right), \\ &= n! e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^{2n}. \end{aligned}$$

Faremos agora um resumo rápido sobre a geometria Riemanniana. Uma conexão $\nabla : \mathscr{E}^0(TM) \to \mathscr{E}^1(TM)$ no fibrado tangente TM é compativel com uma métrica g se e somente se $\nabla g = 0$, o que é dizer que para todo $X, Y \in \mathscr{E}^0(TM)$,

$$(\nabla g)(X, Y) = d\, g(X, Y) - g(\nabla X, Y) - g(X, \nabla Y) = 0.$$

A torção de uma conexão ∇ em TM é o tensor definido por

$$T^\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

∇ é *livre de torção* se $T^\nabla \equiv 0 \in \mathscr{E}^2(TM)$.

Teorema 7.2. *Para toda métrica Riemanniana g em TM, existe uma única conexão ∇ que é compatível com a métrica g e é livre de torção. Essa conexão é chamada a conexão de Levi-Civita de g.*

Em uma carta de coordenadas (x^i), com referencial local $\{\partial/\partial x^i\}$ de TM, escrevemos

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial/\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} &= \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \\ \text{ou} \quad \nabla \frac{\partial}{\partial x^i} &= \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes \left(\sum_i \Gamma_{ij}^k dx^i\right), \end{aligned}$$

onde

$$\Gamma_{ij}^k \quad = \quad \frac{1}{2}\sum_l g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right).$$

Aqui as funções g_{ij} são dadas por $g_{ij} = g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)$ e $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ é a matriz inversa.

Proposição 7.3. *Seja M^{2n} uma variedade suave de dimensão $2n$, com estrutura quase-complexa $J \in \mathscr{E}^0(\mathrm{End}(TM))$. Seja g uma métrica Hermitiana com respeito a J e seja $\omega = g(J\cdot,\cdot)$ a forma anti-simétrica associada. Então, para todo $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, temos*

$$d\omega(JX, Y, Z) + d\omega(X, JY, Z) \quad = \quad 2g(JY, (\nabla_Z J)X) - g(N_J(X, Y), Z),$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita da métrica g.

A demonstração é fácil, utilizando as definições e observações seguintes. Primeiro, a conexão ∇, em endomorfismos, satisfaz

Nijenhuis wasn't defined earlier

$$(\nabla_Z J)(X) \quad = \quad \nabla_Z(JX) - J(\nabla_Z X).$$

Segundo, a derivada exterior $d\omega$ é dada por

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) \quad = \quad & X\omega(Y, Z) - Y\omega(X, Z) + Z\omega(X, Y) \\ & -\omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X). \end{aligned}$$

Finalmente, o tensor de Nijenhuis N_J é definido por

$$N_J(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY].$$

Teorema 7.4. *Seja J uma estrutura quase-complexa em M^{2n}. Então, existe um atlas de cartas $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tal que $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ é holomorfa e com estrutura quase-complexa $J_{\mathscr{A}} = J$ se e somente se $N_J \equiv 0$.*

Esse resultado implica em particular que M admite a estrutura de uma variedade complexa, com estrutura quase-complexa igual a J, se e somente se $N_J = 0$.

Definição 7.5. Uma métrica Hermitiana g numa variedade complexa é uma **métrica de Kähler** se $d\omega = 0$. Uma **variedade de Kähler** é um triplo (M, J, g), onde (M, J) é uma variedade complexa e g é uma métrica de Kähler em M. Uma variedade complexa (M, J) é de tipo Kähler, se admite alguma métrica de Kähler.

Corolário 7.6.
1. *Se (M, J, g) é uma variedade de Kähler, então $\nabla J = 0$, onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de g.*
2. *Se (M, J) é uma variedade quase-complexa e g é uma métrica Hermitiana em M tal que $\nabla J = 0$, então (M, J, g) é uma variedade de Kähler.*

Demonstração: Para o primeiro item, segue da equação (2) que $g((\nabla_Z J)(X), Y) = 0$ para todo X, Y, Z, e logo $\nabla J = 0$. Para o segundo, uma conta, usando o fato da conexão de Levi-Civita ser livre de torção, mostra que $N_J = 0$. Logo $d\omega(JX, Y, Z) + d\omega(X, JY, Z) = 0$ para todos os campos X, Y e Z. Usando que ω é Hermitiana, o resultado segue.

Seja ∇ uma conexão no fibrado tangente TM. Então, ∇ extende naturalmente como uma conexão $\mathbb{C}$-linear em $TM \otimes \mathbb{C}$.

Proposição 7.7. *Sejam (M, J, g) uma variedade de Kähler e ∇ a conexão de Levi-Civita de g. Então se $X = v - iJv \in \mathscr{E}^0(T^{1,0}M)$ é um campo vetorial de tipo $(1,0)$, então $\nabla X \in \mathscr{E}^1(T^{1,0}M)$.*

Isso é dizer que ∇ é uma conexão no sub-fibrado $T^{1,0}M \subseteq TM \otimes \mathbb{C}$. O mesmo resultado vale para o sub-fibrado $T^{0,1}M$.

Demonstração: Temos

$$J\nabla X = \nabla(JX) = \nabla(iX) = i\nabla X,$$

e logo $\nabla X \in \mathscr{E}^1(T^{1,0}M)$.

O fibrado $T^{1,0}M$ admite a métrica Hermitiana (sesqui-linear)

$$h(X, Y) = g(X, \overline{Y}).$$

Afirmamos as propriedades imediatas :

1. $\nabla(\overline{Y}) = \overline{\nabla Y}$.
2. ∇ é compativel com h.

Então nos chega uma pergunta quase óbvia. Será que existe uma relação entre a conexão de Levi-Civita, considerada no fibrado $T^{1,0}M$, e a conexão de Chern, que é definida em qualquer fibrado holomorfo Hermitiano. Veremos no seguinte que são iguais.

Escrevemos a métrica localmente como

$$g = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\bar{\beta}} \left(dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta + d\bar{z}^\beta \otimes dz^\alpha \right),$$

e verificamos que a forma de Kähler é dada por

$$\omega = i \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta.$$

Lema 7.8. *Se a métrica g é de Kähler, então em qualquer sistema de coordenadas holomorfas,*

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^\gamma} &= \frac{\partial g_{\gamma\bar{\beta}}}{\partial z^\alpha}, \\ e \quad \frac{\partial g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial \bar{z}^\gamma} &= \frac{\partial g_{\alpha\bar{\gamma}}}{\partial \bar{z}^\beta}, \end{aligned}$$

para todo $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n$.

Demonstração: A condição $d\omega = 0$ implica que $\partial\omega = 0 = \bar{\partial}\omega = 0$. Logo, temos

$$\begin{aligned} \partial\omega &= i \sum_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^\gamma} dz^\gamma \wedge dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta, \\ 0 &= i \sum_{\beta} \sum_{\gamma<\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^\gamma} - \frac{\partial g_{\gamma\bar{\beta}}}{\partial z^\alpha} \right) dz^\gamma \wedge dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta. \end{aligned}$$

As formas $\{dz^\gamma \wedge dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta\}$, para $\gamma < \alpha$, são linearmente independentes, então concluimos que $\frac{\partial g_{\alpha\bar\beta}}{\partial z^\gamma} = \frac{\partial g_{\gamma\bar\beta}}{\partial z^\alpha}$.

Consideramos a conexão de Levi-Civita em mais detalhe. Primeiro, lembramos que os campos locais $\partial/\partial z^\alpha$ são de tipo $(1,0)$ e os campos $\partial/\partial\bar{z}^\beta$ tem tipo $(0,1)$. Então escrevemos

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}} \frac{\partial}{\partial z^\beta} = \sum_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial z^\gamma} + \sum_\gamma \Gamma^{\bar\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\gamma}.$$

Porém, pela observação acima $\nabla_{\partial/\partial z^\alpha} \partial/\partial z^\beta$ deve ser de tipo $(1,0)$, então todos os coeficientes $\Gamma^{\bar\gamma}_{\alpha\beta} = 0$. Pelo mesmo argumento, vemos que $\Gamma^{\bar\gamma}_{\bar\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\bar\beta} = 0$ e pela simetria da conexão de Levi-Civita, $\Gamma^\gamma_{\bar\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\beta\bar\alpha} = 0$ e $\Gamma^{\bar\gamma}_{\alpha\bar\beta} = \Gamma^{\bar\gamma}_{\bar\beta\alpha} = 0$. Concluimos que os simbolos de Christoffel podem ser não-nulos apenas quando todos as entradas tem, ou todos não tem, bares.

Seja X um campo vetorial suave complexo de tipo $(1,0)$, localmente dado por $X = \sum_\beta X^\beta \partial/\partial z^\beta$. Então,

$$\begin{aligned}
\nabla X &= dX^\beta \otimes \frac{\partial}{\partial z^\beta} + X^\beta \nabla\left(\frac{\partial}{\partial z^\beta}\right), \\
&= \frac{\partial}{\partial z^\gamma} \otimes \left(\partial X^\gamma + (\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} dz^\alpha) X^\beta\right) + \frac{\partial}{\partial z^\gamma} \otimes \bar\partial X^\gamma.
\end{aligned}$$

O primeiro termo, como uma forma com valores em $T^{1,0}M$, é de tipo $(1,0)$, enquanto o segundo termo tem tipo $(0,1)$. Concluimos então que $\nabla^{0,1}X = \bar\partial X$, onde agora $\bar\partial$ é o operador definido em seções suaves do fibrado holomorfo $T^{1,0}M$, e $\nabla^{0,1} = \bar\partial$. A conexão de Levi-Civita é compativel com a métrica h, então verificamos que no fibrado tangente holomorfo de uma variedade de Kähler, a conexão de Levi-Civita coincide com a conexão de Chern. Em particular, pela Lema 7.8,

$$\begin{aligned}
\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} g^{\gamma\bar\sigma} \left(\frac{\partial g_{\bar\sigma\alpha}}{\partial z^\beta} + \frac{\partial g_{\bar\sigma\beta}}{\partial z^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \bar{z}^\sigma}\right) = g^{\gamma\bar\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha} g_{\beta\bar\sigma}\right), \\
\theta^\gamma_\beta &= \sum_\alpha \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} dz^\alpha = g^{\gamma\bar\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha} g_{\beta\bar\sigma}\right) dz^\alpha = h^{-1}\partial h,
\end{aligned}$$

o que pode ser comparado com a expressão local para a conexão de Chern. Em particular, escrita assim fica muito mais simples do que a expressão para os símbolos de Christoffel para uma métrica Riemanniana real.

Proposição 7.9. *Seja (M, J, g) uma variedade de Kähler, com forma de Kähler ω. Então, para todo $x \in M$, existe um sistema de coordenadas $\varphi = (z^1, \dots, z^n)$, com $\varphi(x) = 0 \in \mathbb{C}^n$ tal que*

$$\omega = i \sum_{\alpha\beta} \left(\delta_{\alpha\bar\beta} + O(|z|^2)\right) dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta.$$

Isso é dizer que $\omega = i \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\bar\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$, onde

1. $g_{\alpha\bar\beta}(0) = \delta_{\alpha\bar\beta}$, e $\{\partial/\partial z^\alpha\}$ forma uma base unitária no ponto x,

2. $\frac{\partial g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^\gamma}(0) = 0$ para todo α, β, γ, que é dizer que as expansões de Taylor em x dos coeficientes nessas coordenadas não tem termos lineares.

Demonstração: Seja $w = (w^\alpha)$ um sistema de coordenadas tal que o ponto x corresponde com $0 \in B(0, \varepsilon)$ e tal que $g(\partial/\partial w^\alpha, \partial/\partial \bar{w}^\beta) = \delta_{\alpha\bar{\beta}}$. Então

$$\begin{aligned} \omega &= i \sum_{\alpha\beta} h_{\alpha\bar{\beta}} dw^\alpha \wedge d\bar{w}^\beta, \\ &= i \sum_{\alpha\beta} \left(\delta_{\alpha\bar{\beta}} + a_{\alpha\bar{\beta}\gamma} w^\gamma + a_{\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}} \bar{w}^\gamma + O(|w|^2)\right) dw^\alpha \wedge d\bar{w}^\beta, \end{aligned}$$

para $a_{\alpha\bar{\beta}\gamma}$, etc, números complexos constantes. Então, por ω ser uma forma Hermitiana, temos $h_{\alpha\bar{\beta}} = \overline{h_{\beta\bar{\alpha}}}$, e logo (1) $a_{\alpha\bar{\beta}\gamma} = \overline{a_{\beta\bar{\alpha}\bar{\gamma}}}$ e pela condição de Kähler $\partial h_{\alpha\bar{\beta}}/\partial w^\gamma = \partial h_{\gamma\bar{\beta}}/\partial w^\alpha$, temos (2) $a_{\alpha\bar{\beta}\gamma} = a_{\gamma\bar{\beta}\alpha}$. Considere o mapa quadrático

$$\begin{aligned} B(0, \varepsilon) &\longrightarrow B(0, \varepsilon'), \\ w^\alpha &= z^\alpha - \frac{1}{2} \sum_{\beta\gamma} b_{\alpha\beta\gamma} z^\beta z^\gamma, \end{aligned}$$

para algumas constantes $b_{\alpha\beta\gamma} \in \mathbb{C}$ a serem determinadas, com $b_{\alpha\beta\gamma} = b_{\alpha\gamma\beta}$. Por essa simetria, a derivada simplifica como

$$dw^\alpha = dz^\alpha - b_{\alpha\beta\gamma} z^\beta dz^\gamma,$$

e

$$\begin{aligned} \omega &= i \left[\delta_{\alpha\bar{\beta}} + a_{\alpha\bar{\beta}\gamma} z^\gamma + a_{\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}} \bar{z}^\gamma + O(|z|^2)\right] (dz^\alpha - b_{\alpha\delta\gamma} z^\delta dz^\gamma) \wedge (d\bar{z}^\beta - \overline{b_{\beta\delta\gamma}} \bar{z}^\delta d\bar{z}^\gamma), \\ &= i \left[\delta_{\alpha\bar{\beta}} + a_{\alpha\bar{\beta}\gamma} z^\gamma + a_{\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}} \bar{z}^\gamma - b_{\beta\gamma\alpha} z^\gamma - \overline{b_{\alpha\gamma\beta}} \bar{z}^\gamma + O(|z|^2)\right] dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta. \end{aligned}$$

Seja $b_{\beta\gamma\alpha} = a_{\alpha\bar{\beta}\gamma}$. Então condição (2) implica que $b_{\beta\gamma\alpha} = b_{\beta\alpha\gamma}$, como desejado, e condição (1) nos dá que $\overline{b_{\alpha\gamma\beta}} = \overline{a_{\beta\bar{\alpha}\gamma}} = a_{\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}}$, para que

$$\omega = i \sum_{\alpha\beta} \left(\delta_{\alpha\bar{\beta}} + O(|z|^2)\right) dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta,$$

como requisitado.

Agora mudamos a nossa atenção para questões da curvatura Riemanniana, no contexto de métricas Kählerianas. O tensor de curvatura Riemanniana $R \in \mathscr{E}^2(\mathrm{End}(T))$ é dado por

$$R_{XY} Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Por se definida no fibrado tangente e por ser livre de torção, a curvatura Riemanniana admite mais simetrias que o tensor de curvatura de outras conexões. Por exemplo, temos

1. $\langle R_{XY} Z, W\rangle = -\langle R_{YX} Z, W\rangle = -\langle R_{XY} W, Z\rangle$,
2. $\langle R_{XY} Z, W\rangle = \langle R_{ZW} X, Y\rangle$,
3. $R_{XY} Z + R_{YZ} X + R_{ZX} Y = 0$

em cada ponto $p \in M$ e para $X, Y, Z, W \in T_pM$. Escrevendo $\overline{R}$ para o $(4,0)$-tensor

$$\overline{R}(X, Y, Z, W) = \langle R_{XY}Z, W\rangle,$$

a condição (1) implica que $\overline{R} \in \Lambda^2 \otimes \Lambda^2$. Condição (2) quer dizer que $\overline{R} \in \mathrm{Sym}^2(\Lambda^2) \subseteq \Lambda^2 \otimes \Lambda^2$, enquanto ponto (3), chamada a primeira identidade de Bianchi, implica que $\overline{R} \subseteq \ker(\beta)$ para uma aplicação linear

$$\begin{array}{rcl} \beta : \mathrm{Sym}^2(\Lambda^2) & \longrightarrow & T^* \otimes T^* \otimes T^* \otimes T^*, \\ \beta(S)(X, Y, Z, W) & = & S(X, Y, Z, W) + S(Y, Z, X, W) + S(Z, X, Y, W). \end{array}$$

Exercício:

1. Mostra que β toma valores no subespaço $\Lambda^4 \subseteq T^* \otimes T^* \otimes T^* \otimes T^*$.

2. Mostra que, au menos um fator constante, a aplicação β é igual ao produto exterior $\Lambda^2 \circ \Lambda^2 \to \Lambda^4$. Mostra que β é sobrejetiva sobre Λ^4.

Seja (M, J, g) uma variedade de Kähler. Já vimos que em $T^{1,0}M$, a conexão de Levi-Civita coincide com a conexão de Chern. Também, sabemos que a curvatura da conexão de Chern é de tipo $(1,1)$, então $R \in \mathscr{E}^{1,1}(\mathrm{End}(T^{1,0}M))$. Então $\overline{R} \in \mathrm{Sym}^2(\Lambda^{1,1})$ e portanto

$$\overline{R} \in \ker\{\beta : \Lambda^{1,1} \circ \Lambda^{1,1} \to \Lambda^{2,2}\}.$$

Para ilustrar o mesmo fato, lembramos que $\nabla(JX) = J\nabla X$, então $R_{XY}JZ = JR_{XY}Z$ e

$$\begin{array}{rcl} \langle R_{JX,JY}Z, W\rangle & = & \langle R_{ZW}JX, JY\rangle, \\ & = & \langle JR_{ZW}X, JY\rangle, \\ & = & \langle R_{ZW}X, Y\rangle, \\ & = & \langle R_{XY}Z, W\rangle. \end{array}$$

Em coordenadas locais (z^α), temos

$$\begin{array}{rcl} R_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}} \dfrac{\partial}{\partial z^\gamma} & = & \displaystyle\sum_\delta R^\delta_{\gamma\ \alpha\bar{\beta}} \frac{\partial}{\partial z^\delta}, \\ & = & \nabla_{\partial_{z^\alpha}} \nabla_{\partial_{\bar{z}^\beta}} \partial_{z^\gamma} - \nabla_{\partial_{\bar{z}^\beta}} \nabla_{\partial_{z^\alpha}} \partial_{z^\gamma}, \\ & = & -\nabla_{\partial_{\bar{z}^\beta}} (\Gamma^\delta_{\alpha\gamma} \dfrac{\partial}{\partial z^\delta}), \\ & = & -\left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta} \Gamma^\delta_{\alpha\gamma}\right) \dfrac{\partial}{\partial z^\delta}. \end{array}$$

Assim temos uma expressão explícita para a curvatura Riemanniana em coordenadas holomorfas

$$R^\delta_{\gamma\ \alpha\bar{\beta}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}\left(g^{\delta\bar{\sigma}} \frac{\partial g_{\gamma\bar{\sigma}}}{\partial z^\alpha}\right).$$

Isso pode ser comparado com a expressão $\Theta = \bar{\partial}\theta$ que obtivemos para a curvatura da conexão de Chern num fibrado holomorfo Hermitiano.

Em uma variedade Riemanniana (M,g), para $X,Y \in T_xM$, consideramos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} R_{\cdot X}Y : T_xM & \longrightarrow & T_xM, \\ Z & \longmapsto & R_{ZX}Y. \end{array}$$

Definição 7.10. O tensor de Ricci de uma variedade Riemanniana (M,g) é o campo de formas bilineares simétricas definido por

$$\mathrm{Ric}(X,Y) \quad = \quad \mathrm{tr}\{Z \mapsto R_{ZX}Y\}.$$

Se $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de T_xM, a curvatura de Ricci é dada por

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R_{e_i,X}Y, e_i\rangle.$$

Em particular, e como mencionado acima, $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X)$.

Seja (M,J,g) uma variedade de Kähler de dimensão complexa n. Em $x \in M$, seja $\{e_1,\ldots,e_n, Je_1,\ldots,Je_n\}$ uma base ortonormal de T_xM. Então

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_i \langle R_{e_i,X}Y, e_i\rangle + \sum_i \langle R_{Je_i,X}Y, Je_i\rangle.$$

Essa expressão pode ser simplificada. Consideramos o segundo termo

$$\begin{array}{rcl} \langle R_{Je_i,X}Y, Je_i\rangle & = & -\langle JR_{Je_i,X}Y, e_i\rangle = -\langle R_{Je_i,X}JY, e_i\rangle, \\ & = & \langle R_{X,JY}Je_i, e_i\rangle + \langle R_{JY,Je_i}X, e_i\rangle, \\ & = & \langle R_{X,JY}Je_i, e_i\rangle - \langle R_{e_i,Y}X, e_i\rangle, \\ & = & \langle R_{X,JY}Je_i, e_i\rangle - \langle R_{e_i,X}Y, e_i\rangle, \end{array}$$

e logo,

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_i \langle R_{X,JY}Je_i, e_i\rangle.$$

Corolário 7.11. $\mathrm{Ric}(JX,JY) = \mathrm{Ric}(X,Y)$.

A demonstração é imediata.

Por causa desse lema, podemos considerar a curvatura de Ricci como uma forma diferencial.

Definição 7.12. A **forma de Ricci** ρ é definida por

$$\rho(X,Y) = \mathrm{Ric}(JX,Y) = \sum_i \langle R_{JX,JY}Je_i, e_i\rangle = \sum_i \langle R_{X,Y}Je_i, e_i\rangle.$$

Em particular, observamos que $\rho \in \mathscr{E}^{1,1}(M)$ é uma 2-forma diferencial, de tipo $(1,1)$. Para melhor entender a forma ρ, considere o fibrado *anti-canônico* $K_M^{-1} = \Lambda^n T^{1,0}M$, isso sendo o maior produto exterior do fibrado tangente holomorfo. K_M^{-1} é um fibrado de linha holomorfo, e uma seção holomorfo local é dado por

$$\Phi = \frac{\partial}{\partial z^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial z^n}.$$

Ao invés de ϕ, vamos considerar um referencial unitário. Seja $\{e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n\}$ um referencial ortonormal de TM, adaptado à estrutura complexa J. Consideramos $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ um referencial de $T^{1,0}M$, onde $\varepsilon_j = e_j - iJe_j$. Logo,

$$h(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = g(\varepsilon_j, \overline{\varepsilon_k}) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k, \\ 2 & \text{se } j = k. \end{cases}$$

Então, $\Psi = \varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n$ é uma suave seção local não-nula de K_M^{-1}. Calculamos

$$\begin{aligned} \nabla_Y \nabla_X (\varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n) &= \sum_j \nabla_Y (\varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \nabla_X \varepsilon_j \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n), \\ &= \sum_{k<j} \varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \nabla_Y \varepsilon_k \wedge \cdots \wedge \nabla_X \varepsilon_j \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n \\ &\quad + \sum_j \varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \nabla_Y \nabla_X \varepsilon_j \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n \\ &\quad + \sum_{j<k} \varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \nabla_X \varepsilon_j \wedge \cdots \wedge \nabla_Y \varepsilon_k \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n, \end{aligned}$$

e nós concluimos que

$$\begin{aligned} (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})\Psi &= \sum_j \varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge R_{XY} \varepsilon_j \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n, \\ &= \sum_j \varepsilon_j \wedge \cdots \wedge \langle R_{XY} \varepsilon_j, \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{\varepsilon_j} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_j \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n, \\ &= \frac{1}{2} \sum_j \langle R_{XY} \varepsilon_j, \overline{\varepsilon_j} \rangle \Psi. \end{aligned}$$

A curvatura da conexão induzida em K_M^{-1} pela conexão de Levi-Civita é a 2-forma escalar dada por

$$\begin{aligned} R_{XY}^{K^{-1}} &= \frac{1}{2} \sum_j \langle R_{XY}(e - iJe_j), e_j + iJe_j \rangle, \\ &= -i \sum_j \langle R_{XY} Je_j, e_j \rangle, \\ &= -i\rho(X, Y). \end{aligned}$$

Proposição 7.13. $\rho = iR^{K^{-1}}$.

Corolário 7.14. $d\rho = 0$.

Demonstração: Isso vale porque a curvatura de uma conexão num fibrado de linhas é sempre fechado. Isso também pode ser visto usando a segunda identidade de Bianchi no tensor de curvatura Riemanniana.

Corolário 7.15. *Para qualquer métrica de Kähler g na variedade complexa (M,J), a forma de Ricci ρ_g sempre representa a mesma classe de cohomologia de De Rham :*

$$\left[\frac{1}{2\pi}\rho_g\right] = \left[\frac{i}{2\pi}R_g^{K^{-1}}\right] = c_1(K^{-1}).$$

Corolário 7.16.

$$\left[\frac{1}{2\pi}\rho\right] \in H^2(M,\mathbb{Z}) \subseteq H^2(M,\mathbb{R}).$$

Esse resultado sai porque as classes de Chern de qualquer fibrado vetorial são sempre integrais.

Corolário 7.17.

$$c_1(T^{1,0}M) = c_1(K_M^{-1}) = \left[\frac{1}{2\pi}\rho\right].$$

Demonstração: A primeira classe de Chern de $T^{1,0}M$ é a classe de $\frac{i}{2\pi}\mathrm{tr}(R)$, para R a curvatura de qualquer conexão em $T^{1,0}M$. Em particular, para R a curvatura Riemanniana de uma métrica de Kähler,

$$\mathrm{tr}(R_{XY}) \quad = \quad \sum_j \langle R_{XY}(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_j, \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\varepsilon_j}\rangle = -i\sum_j \langle R_{XY}Je_j, e_j\rangle = -i\rho(X,Y).$$

Proposição 7.18. *Em coordenadas locais (z^α), a forma de Ricci é dada por*

$$\rho = i\bar{\partial}\partial\log(\det(g_{\alpha\bar{\beta}})).$$

deveria incluir a prova disso

Terminamos essa seção com o cálculo da curvatura de Ricci da métrica de Fubini-Study no espaço projetivo complexo. Lembramos a expressão de ω_{FS} em cordenadas no conjunto $U_0 \subseteq \mathbb{P}^n$,

$$\begin{aligned}
\omega_{FS} &= i\partial\bar{\partial}\log(1+|z|^2), \\
&= i\left[\frac{\sum_\alpha dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\alpha}{1+|z|^2} - \frac{(\sum_\alpha \bar{z}^\alpha dz^\alpha)\wedge(\sum_\beta z^\beta d\bar{z}^\beta)}{(1+|z|^2)^2}\right], \\
&= \frac{i}{1+|z|^2}\sum_{\alpha\beta}\left[\delta_{\alpha\bar{\beta}} - \frac{\bar{z}^\alpha z^\beta}{1+|z|^2}\right] dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta.
\end{aligned}$$

Observamos por curiosidade que nesse sistema de coordenadas a métrica oscula a segunda ordem à métrica Euclideana na origem $z=0$. Os coeficientes da métrica são então $g_{\alpha\bar{\beta}} = (1+|z|^2)^{-1}(\delta_{\alpha\bar{\beta}} - (1+|z|^2)^{-1}z^\alpha\bar{z}^\beta) = (1+|z|^2)^{-1}(I+A)$, e logo $\det(g_{\alpha\bar{\beta}}) = (1+|z|^2)^{-n}\det(I+A)$. Observamos que a matriz

$$(A_{\alpha\bar{\beta}}) = \left(\frac{-z^\alpha\bar{z}^\beta}{1+|z|^2}\right)$$

é de posto 1, e tem autovalores $\lambda_1 = \frac{-|z|^2}{1+|z|^2}$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Logo, $I+A$ tem autovalores $\lambda_1' = \frac{1}{1+|z|^2}$, $\lambda_2' = \cdots = \lambda_n' = 1$ e nós temos $\det(g_{\alpha\bar{\beta}}) =$

$(1+|z|^2)^{-(n+1)}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\rho_{\omega_{FS}} &= i\bar{\partial}\partial \log \det(g_{\alpha\bar{\beta}}),\\ &= (n+1)i\partial\bar{\partial}\log(1+|z|^2),\\ \rho_{\omega_{FS}} &= (n+1)\omega_{FS}.\end{aligned}$$

Isso é dizer que $\mathrm{Ric}_{g_{FS}} = (n+1)g_{FS}$ e que a métrica de Fubini-Study é uma métrica de Einstein.

7.2 A Decomposição de Hodge

Primeiro, voltamos a lembrar alguns fatos importantes da geometria Riemanniana. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão real n. A métrica g define uma isomorfismo

$$\begin{aligned}\gamma : T_xM &\longrightarrow T_x^*M,\\ v &\longmapsto g(v, \cdot).\end{aligned}$$

Em coordenadas, se $v = \sum_i v^i\partial/\partial x^i$, temos $\gamma(v) = \sum_{ij} v^i g_{ij} dx^j$. Isso induz um produto interior em T^*M por $\langle\alpha, \beta\rangle = g(\gamma^{-1}(\alpha), \gamma^{-1}(\beta))$. Equivalentemente, temos $\langle\alpha, \beta\rangle = \sum_i \alpha(e_i)\beta(e_i)$, onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de T_xM. Em coordenadas, se $\alpha = \sum_i \alpha_i dx^i$ e $\beta = \sum_j \beta_j dx^j$, então $\langle\alpha, \beta\rangle = \sum_{ij} g^{ij}\alpha_i\beta_j$. Um produto interior é induzido no fibrado exterior $\Lambda^j T^*M$ por, para $\Phi = \alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^k$ e $\Psi = \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^k$,

$$\langle\Phi, \Psi\rangle = \det(\langle\alpha^i, \beta^j\rangle).$$

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de T_xM, a base dual $\{e^1, \ldots, e^n\}$ é uma base ortonormal de T_x^*M e $\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{e_k}\}$, para $1 \le i_1 < \cdots i_k \le n$ é uma base ortonormal de $\Lambda^k T_x^*M$. Se M é orientada, existe uma forma de volume

$$\Omega = dvol_g = e^1 \wedge \cdots e^n \in \mathscr{E}^n(M),$$

onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal compatível com a orientação. Essa expressão é independente da escolha de base ortonormal orientada. A forma $dvol_g$ anula-se em ponto nenhum e se $g = \sum_{ij} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ em coordenadas orientadas

$$dvol_g = \sqrt{\det(g_{ij})}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Para $k \ge 0$, temos o produto exterior e um produto escalar :

$$\begin{aligned}(1) \qquad \Lambda_x^k \times \Lambda_x^{n-k} &\longrightarrow \Lambda_x^n,\\ \alpha\ ,\ \beta &\longmapsto \alpha \wedge \beta,\\ (2) \qquad \Lambda_x^k \times \Lambda_x^k &\longrightarrow \Lambda_x^n,\\ \alpha\ ,\ \sigma &\longmapsto \langle\alpha, \sigma\rangle dvol_g\end{aligned}$$

Notamos que o co-domínio dos produtos é em cada caso um espaço vetorial de dimensão 1. Ambos os produtos são não-degenerados no sentido que, para o produto (1), para qualquer $\alpha \in \Lambda_x^k$, existe algum $\beta \in \Lambda_x^{n-k}$ tal que $\alpha\,\wedge$

$\beta \neq 0$. Logo, temos injeções (que por causa da igualdade das dimensões, são isomorfismos)

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_x^{n-k} & \xrightarrow{\sim} & (\Lambda_x^k)^* \otimes \Lambda_x^n, \\ \Lambda_x^k & \xrightarrow{\sim} & (\Lambda_x^k)^* \otimes \Lambda_x^n. \end{array}$$

Concluimos que a métrica e a orientação em M determinam uma aplicação, que chamamos a **estrela de Hodge**, $* : \Lambda_x^k \to \Lambda_x^{n-k}$ determinado para a propriedade que

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle dvol_g$$

para cada par de k-covetores $\alpha, \beta \in \Lambda_x^k$.

Exercícios:

1. Demonstre que $*^2 = (-1)^{k(n-k)} : \Lambda_x^k \to \Lambda_x^k$.
2. Seja $\{e_i\}$ uma base ortonormal orientada de T_xM e $\{e^i\}$ a base dual de $\Lambda_x^1 = T_x^*M$. Demonstre que
$$*(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}) = e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_{n-k}},$$
onde $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{n-k})$ é uma permutação *par* de $(1, 2, \ldots, n)$.
3. Demonstre que $\langle *\alpha, *\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ para $\alpha, \beta \in \Lambda_x^k$.
4. Se $v \in TM$ e $v^\flat = \gamma(v) \in \Lambda_x^1$, então para $\alpha \in \Lambda_x^k$, demonstre que
$$*(v^\flat \wedge \alpha) = XXXi_v(*\alpha) \in \Lambda_x^{n-k-1},$$
onde $i_v : \Lambda_x^l \to \Lambda_x^{l-1}$ é a contração definida por $i_v\beta = \beta(v, \cdot, \cdots, \cdot)$.

Agora, seja (M, J, g) uma variedade complexa de dimensão n, com uma métrica Hermitiana (não necessariamente de Kähler). Do mesmo modo, estendemos g para formas complexas. Para $\alpha, \beta \in \Lambda_{x,\mathbb{C}}^1$, definimos

$$g(\alpha, \beta) = \sum_j \alpha(e_j)\beta(e_j)$$

onde $\{e_j\}$ é uma base ortonormal do espaço tangente real T_xM. Verificamos que $\Lambda^{1,0}$ e $\Lambda^{0,1}$ são sub-espaços isotrópicos e, para $\alpha = \sum_i \alpha_i dz^i \in \Lambda^{1,0}$ e $\beta = \sum_j \beta_j d\bar{z}^j \in \Lambda^{0,1}$, temos $g(\alpha, \beta) = \sum_{ij} \alpha_i \beta_j g^{i\bar{j}}$.

O produto escalar é estendido para formas de grau mais alto por, para $\Phi = \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k$ e $\Psi = \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^k$,

$$g(\Phi, \Psi) \quad = \quad \det(g(\alpha^i, \beta^j)).$$

Nesse caso, se $\Psi \in \Lambda^{p,k-p}$ e $\Psi \in \Lambda^{q,k-q}$ são k-formas puramente de certos tipos, $g(\Phi, \Psi) = 0$ a não ser que $q = k - p$. Notamos que com essa definição, g é bilinear sobre $\mathbb{C}$. Então definimos a forma *sesquilinear*

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = g(\Phi, \overline{\Psi}),$$

para $\Phi, \Psi \in \Lambda^{p,k-p}$. A estrela de Hodge pode ser endendida nesse contexto pelos produtos

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^{p,q} \times \Lambda^{n-p,n-q} & \longrightarrow & \Lambda^{n,n}, \\ \alpha \ , \ \beta & \longmapsto & \alpha \wedge \beta, \\ \Lambda^{p,q} \times \Lambda^{p,q} & \longrightarrow & \Lambda^{n,n}, \\ \alpha \ , \ \sigma & \longmapsto & \langle \alpha, \sigma \rangle \dfrac{\omega^n}{n!}. \end{array}$$

De novo, esses produtos são não-degenerados, então induzem uma aplicação, a extensão da estrela de Hodge para formas complexas, $* : \Lambda^{p,q} \to \Lambda^{n-p,n-q}$ determinada pela condição

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \frac{\omega^n}{n!}$$

para todo $\alpha, \beta \in \Lambda^{p,q}$. Um ponto novo comparado com o caso Riemanniano é que a estrela de Hodge é *conjugado linear*, $*(\lambda\alpha) = \bar{\lambda} * \alpha$, para $\lambda \in \mathbb{C}$, pois o produto escalar é sesquilinear enquanto o produto exterior é bilinear sobre $\mathbb{C}$.

Se $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1} = Je_1, \ldots, e_{2n} = Je_n\}$ é uma base ortonormal de T_xM, seja $\{e^1, \ldots, e^{2n}\}$ a base dual de Λ^1_x. Então $\{\varepsilon_j = \frac{1}{2}(e_j - iJe_j)\}$ é uma base de $T^{1,0}_x M$ e $\{\varphi^j = e^j + ie^{j+n}\}$, é a base dual de $\Lambda^{1,0}_x$. Observamos que $|\varphi^j| = \sqrt{2}$.