Nessas questões nós consideramos V um espaço vetorial real de dimensão n.

1. Um *produto interior* em V é uma aplicação $g = \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

   (a) para todo $u, v, w \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $g(\lambda u + \mu v, w) = \lambda g(u, w) + \mu g(v, w)$ e $g(w, \lambda u + \mu v) = \lambda g(w, u) + \mu g(w, v)$ (blinearidade),

   (b) para todo $u, v \in V$, $g(u, v) = g(v, u)$ (simetria),

   (c) para todo $u \in V$, $g(u, u) \geq 0$, e $g(u, u) = 0$ somente se $u = 0 \in V$.

   Usaremos a notação g e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ equivalentemente. Um produto interior em V induz uma norma e uma métrica (como uma função de distância) em V. A norma é definida por $\|v\| = \langle v, v\rangle^{1/2}$ e a distância $d(v, w) = \|v - w\|$. O exemplo padrão é de $V = \mathbb{R}^n$ com $\langle v, w\rangle = v^T w$, considerando v e w como vetores colunas.

   Seja (V, g) um espaço vetorial com um produto interior. Demonstre que a norma satisfaz

$$\begin{aligned} \|v\| &> 0, \text{ se } v \in V \setminus \{0\}, \\ \|cv\| &= |c|\|v\| \quad c \in \mathbb{R}, \ v \in V, \\ \|v + w\| &\leq \|v\| + \|w\|, \\ |\langle v, w\rangle| &\leq \|v\|\|w\|. \end{aligned}$$

2. Seja V^* o espaço dual de V. Isso é dizer, V^* é o espação de todas as aplicações lineares $\alpha : V \to \mathbb{R}$. Dado covetores $\alpha, \beta : V \to \mathbb{R}$ elementos de V^*, podemos definir o produto tensorial $\alpha \otimes \beta \in V^* \otimes V^*$ e considerar isso uma aplicação bilinear em V,

$$\begin{aligned} \alpha \otimes \beta &: V \times V \to \mathbb{R}, \\ \alpha \otimes \beta(v, w) &= \alpha(v)\beta(w). \end{aligned}$$

   (a) Demonstre que toda forma bilinear em V pode ser expressa como uma soma de produtos desse tipo.

   (b) Calcule a dimensão de $V^* \otimes V^*$.

   (c) Considere o conjunto $S^2(V^*)$ de aplicações bilineares *simétricas* em V. Verifique que é um espaço vetorial e calcule a sua dimensão. Observamos que um produto interior em V é um elemento de $S^2(V^*)$, com a condição de positividade.

   (d) Seja $\{e_i\}$ uma base para V, e seja $\{e^i\}$ a base dual de V^* (veja a questão 4). Define elementos de $S^2(V^*)$ por

$$\begin{aligned} e^i \circ e^i &= e^i \otimes e^i, \\ e^i \circ e^j &= \frac{1}{2}\left(e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i\right). \end{aligned}$$

   Verifique que $\{e^i \circ e^j\}_{i \leq j}$ forma uma base para $S^2(V^*)$ e que

$$e^i \circ e^j(e_k, e_l) = \begin{cases} 1 & \text{se } \{i, j\} = \{k, l\}, \\ 0 & \text{se } \{i, j\} \neq \{k, l\}. \end{cases}$$

3. (a) Seja $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interior em V. Demonstre que $g = \sum_{i \leq j} g_{ij} e^i \circ e^j$ onde $g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$.

   (b) Demonstre que a matriz (g_{ij}) é invertível, simétrica e que todos os autovalores são positivos.

4. Seja V^* o espaço dual de V. Isso é dizer, V^* é o espação de todas as aplicações lineares $\alpha : V \to \mathbb{R}$.

   (a) Suponha que $\{e_i\}$ é uma base para V. Verifique que existe uma única base $\{e^j\}$ para V^* que satisfaz a condição

   $$e^j(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

   Observamos que essa correspondência é independente de um produto interior em V. Chamamos $\{e^i\}$ a *base dual* de $\{e_i\}$.

   (b) Demonstre que um produto interior g determine um isomorfismo entre V e V^* pelo seguinte : dado $v \in V$, seja $v^\flat \in V^*$ o covetor

   $$\begin{aligned} \flat &: V \to V^*, \\ v^\flat(w) &= \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

   Demonstre que $\flat$ é um isomorfismo.

   (c) Seja $\{e_i\}$ uma base de V, não necessariamente ortonormal, e defina $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. Se $v = \sum_i v^i e_i \in V$, para $v^i \in \mathbb{R}$, demonstre que $v^\flat = \sum_i v_i e^i$ onde $v_i = \sum_j g_{ij} v^j$.

   (d) Denota por $g^{-1} = (g^{ij})$ a matriz inversa de $g = (g_{ij})$. Demonstre que o inverso de $\flat$, que denotaremos por $\#$, é dado pelo seguinte. Se $\alpha = \sum_i \alpha_i e^i$, então $\alpha^\# = \sum_i \alpha^i e_i$ onde $\alpha^i = \sum_j g^{ij} \alpha_j$.

   Por essa razão, chamamos os isomorfismos entre V e V^* induzidos pelo produto interior os isomorfismos musicais. As mapas $\flat$ e $\#$ baixam e levantam os índices nos coeficientes de vetores e covetores. Reparamos aqui do número e localização dos índices desses vários objetos. O coeficente no vetor $v = \sum_i v^i e_i \in V$ tem um índice por cima. Um covetor $\alpha = \sum_i v_i e^i \in V^*$ tem coeficientes com um índice inferior. A forma bilinear simétrica $g = \sum_{i \le j} g_{ij} e^i \circ e^j$ tem dois índices inferiores.

   Observamos nessa questão que se M é uma variedade diferenciável e $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ é a base que vem através de uma carta de coordenadas, então a base dual é dada pelas 1-formas $\{dx^i\}$.

5. (a) Suponha que $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de V e sejam $\{e_i^\flat\}$ as imagens em V^* dos vetores e_i. Demonstre que $e_i^\flat = e^i$ para cada $i = 1, \dots, n$. Isso é dizer, demonstre que os $e_i^\flat$ satisfazem

   $$e_j^\flat(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

   Isso é dizer que nesse caso, $\{e_i^\flat\}$ coincide com a base dual de V^*.

   (b) Seja $\{e_i\}$ uma base de V, não necessariamente ortonormal, e defina $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. Denota por $g^{-1} = (g^{ij})$ a matriz inversa de $g = (g_{ij})$. Demonstre que, na notação das ítens anteriores, $e^i = \sum_j g^{ij} e_j^\flat$.

6. (a) Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita. Mostra como T canonicamente induz uma mapa $T^* : W^* \to V^*$, e que T é injetiva se e somente se T^* é sobrejetiva. Especificamente, demonstre que $\mathrm{Im} T^* = \{\alpha \in V^* \ ; \ \alpha(v) = 0 \ \forall v \in \ker T\}$.

   Essa mapa tem vários nomes. Poderia ser chamado a *aplicação dual*, mas talvez mais frequentemente seja chamado o *pull-back* de T, por que T puxa covetores para trás, de W para V.

(b) Mostra que se g_W é um produto interior em W, T induz naturalmente uma forma bilinear simétrica em V, que é um produto interior se e somente se T é injetiva.

(c) Mostre que se $V \subseteq W$ é um subespaço vetorial, então um produto interior em W restrige-se a um produto interior em V.

7. Seja (V, g) um espaço vetorial equipado com um produto vetorial. Definimos o *adjunto* ou *transposto* de uma mapa linear $T : V \to V$ pela composição $T^\dagger = \# \circ T^* \circ \flat : V \to V^* \to V^* \to V$. Demonstre que $T^\dagger$ satisfaz $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^\dagger w\rangle$ para todo $v, w \in V$.

8. Um produto interior em V determine naturalmente um produto interior em V^*. Uma maneira para ver isso é observar que $\# : V^* \to V$ é um isomorfismo e definido, para $\alpha, \beta \in V^*$,

$$\langle \alpha, \beta\rangle_{V^*} = \langle \alpha^\#, \beta^\#\rangle_V.$$

Seja $\{e_i\}$ uma base para V, com $g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle_V$. Demonstre que se $\langle e^i, e^j\rangle_{V^*} = g^{ij}$.

9. Consideramos um produto interior num espaço vetorial. Seja $V = M(m\times n, \mathbb{R})$ o espaço de $m\times n$ matrizes reais. Para $A = (A^i_j)$ e $B = (B^i_j)$, definimos o produto interior

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} A^i_j B^i_j = \operatorname{tr}\left(A^t B\right).$$

(a) Verifique a segunda igualdade aqui acima.

(b) Se identificamos $M(m \times n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{mn}$ na óbvia maneira, demonstre que esse produto interior coincide com o produto Euclideano padrão.

(c) Demonstre que uma expressão parecida pode ser utilizada para definir um produto interior em $End(V)$, o espaço de endomorfismos lineares de V, um espaço vetorial equipado com um produto interior g. Especificamente, demonstre que a definição que você dá independe de todas as escolhas que você faz.

(d) Para matrizes $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ e $B \in M(n \times k, \mathbb{R})$, demonstre que

$$\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|.$$

(e) Demonstre que se $R \in O(n)$ e $S \in O(m)$ são matrizes ortogonais, então

$$\|A\|^2 = \|AR\|^2 = \|SA\|^2.$$

10. Demonstre que o conjunto de produtos interiores em V é aberto, como um subconjunto de $S^2(V^*)$.

11. Demonstre que as duas cartas para a esfera S^2 determinadas pelas aplicações seguintes são compatíveis, no sentido da aula :

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1} &: (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to S^2,\\
\varphi^{-1}(r, \theta) &= (\operatorname{sen}(r)\cos(\theta), \operatorname{sen}(r)\operatorname{sen}(\theta), \cos(r)),\\
\psi^{-1} &: \mathbb{R}^2 \to S^2,\\
\psi^{-1}(y_1, y_2) &= \left(\frac{y_1}{1+|y|^2}, \frac{y_2}{1+|y|^2}, \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}\right)
\end{aligned}$$

onde $|y|^2 = y_1^2 + y_2^2$. Aqui, ϕ^{-1} é a aplicação inversa da carta $\varphi : U \subseteq S^2 \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^2$.

Diremos que o sistema de coordenadas (φ, U) é de *coordenadas esféricas*.

12. A aplicação de Hopf é definida como

$$\begin{aligned} \pi &: S^3 \to S^2, \\ \pi(z_1, z_2) &= (\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2), \mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2), |z_1|^2 - |z_2|^2) = (z_1\bar{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2) \end{aligned}$$

em que, na segunda expressão, o primeiro termo é considerado um número complexo. Demonstre que a aplicação de Hopf é diferenciável.

13. (a) Seja $\frac{\partial}{\partial r}$ o campo radial em $\mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial}{\partial x}$ o campo vetorial da coordenada retilinear em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Calcule o colchete de Lie $[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial x}]$. Aqui nós observamos que r e x são relacionados por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos(\theta)$.

    (b) Considere $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Em todo ponto $p \in S^2$ considere a projeção ortogonal $\pi_p : T_p\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$. Seja $\frac{\partial}{\partial z}$ o campo vetorial cordenada retilinear em $\mathbb{R}^3$ e $Z = \pi_p(\frac{\partial}{\partial z})$ o campo vetorial em S^2 obtida considerando em cada ponto o componente de $\frac{\partial}{\partial z}$ tangente a S^2. Seja X o campo

    $$X(x, y, z) = \left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0} (\cos(\theta)x + \mathrm{sen}(\theta)y, -\mathrm{sen}(\theta)x + \cos(\theta)y, z)\,,$$

    onde $(x, y, z) \in S^2$. Calcule o colchete de Lie $[Z, X]$.

    (Dica : escreva os dois campos em coordenadas, em que o colchete pode ser calculada explicitamente).

14. (*Espaço projetivo complexo*) Denote por $\mathbb{CP}^n$ o conjunto de todos os subespaços vetoriais de $\mathbb{C}^{n+1}$ de dimensão 1. Isso é dizer, linhas retas em $\mathbb{C}^{n+1}$, com a topologia quociente herdada pela projeção natural $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$. Demonstre que $\mathbb{CP}^n$ é uma variedade compacta)suave de dimensão $2n$, com um atlas de cartas análogo ao que viu para $\mathbb{RP}^n$.

    Usamos a correspondência

    $$(x^0 + iy^0, \dots, x^n + iy^n) \longleftrightarrow (x^0, y^0, x^1, \dots, x^n, y^n)$$

    para identificar $\mathbb{C}^{n+1}$ com $\mathbb{R}^{2n+2}$.

15. Veremos que as duas definições do espaço tangente de uma variedade são equivalentes.

    Um *elemento função suave* (smooth function element) numa variedade M é um duplo ordenado (f, U), onde U é um subconjunto aberto de M e $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função suave. Dado um ponto $p \in M$, definimos uma relação de equivalência no conjunto de elementos função suave cujos domínios contem o ponto p dizendo que $(f, U) \sim (g, V)$ se $f \equiv g$ em alguma vizinhança de p. A class de equivanência de um elemento função (f, U) é chamado o *germe* de f em p e denotada por $[f]_p$. O conjunto de todos os germes de funções suaves em p é um espaço vetorial denotado por $C_p^\infty(M)$. Além disso, germes de funções podem ser multiplcados para que $C_p^\infty(M)$ tenha a estrutura de um anel comutativa com identidade.

    Uma *derivação* em $C_p^\infty(M)$ é uma aplicação linear $v : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$ que satisfaz

    $$v[fg]_p = f(p)v[g]_p + g(p)v[f]_p.$$

    Igualmente, podemos definir uma relação de equivalência sobre curvas que passam por um ponto.

    Seja $p \in M$ um ponto. Consideramos intervalos abertos J_1 e J_2 em $\mathbb{R}$ que contem 0 e aplicações diferenciáveis $\gamma_1 : J_1 \to M$ e $\gamma_2 : J_2 \to M$ com $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. Dizemos que $\gamma_1 \sim \gamma_2$ se existe uma carta de coordenadas definida numa vizinhança de p, $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que

    $$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi(\gamma_1(t))) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi(\gamma_2(t)))\,.$$

    Denotaremos a classe de equivalência de uma curva γ que passa por p em 0 por $[\gamma]_p$.

(a) Demonstre que a segunda relação sobre curvas independe da carta de coordenadas utilizada na definição.

(b) Demonstre que uma derivação v canonicamente determine uma única classe de equivalência de curvas que passam por p em 0.

(c) Reciprocamente, demonstre que uma classe de curvas $[\gamma]_p$ define canonicamente uma derivação.

Nessa maneira, poderíamos usar qualquer uma dessas duas definições para o espaço tangente da variedade em p.

16. (a) Anuncie e demonstre os teoremas da função inversa e da função implícita.

    (b) Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável e seja $p \in N$ um valor regular de f. Isso é dizer que para todo $x \in M$ com $f(x) = p$, a derivada $df_x = f_{*,x} : T_xM \to T_pN$ é sobrejetiva. Demonstre que a pré-imagem de p, $f^{-1}(p) = \{x \in M \; ; \; f(x) = p\}$ é uma subvariedade diferenciável.