1. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. Para quaisquer bases $\{e_i\}$ e $\{f_i\}$ de V, sabemos que existe uma matriz invertível $A = (a_{ij}) \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$ tal que $e_j = \sum_i f_i a_{ij}$. Dizemos que $\{e_i\}$ e $\{f_i\}$ são equivalentes se $\det(a_{ij}) > 0$.

   (1) Demonstre que isso define uma relação de equivalência sobre o conjunto de bases para V. Demonstre que existe exatamente duas classes de equivalência para a relação.

   Uma **orientação** em V é uma escolha das classes de equivalência. Seja M uma variedades diferenciável de dimensão n. Uma **orientação** em M é uma escolha de orientação em T_pM para todo $p \in M$ que varia diferenciavelmente com o ponto p. Essa definição não é suficientemente precisa, e uma orientação não existe sempre, então é necessário fazer a definição em termos da estrutura diferencial de M.

   M é **orientável** se existe um sub-atlas $\mathcal{A}' = \{(\varphi, U)\} \subseteq \mathcal{A}$ tal que (1) os domínios U das cartas (φ, U) em $\mathcal{A}'$ cobrem M, e (2) se $(\varphi, U), (\psi, V) \in \mathcal{A}'$ tem $U \cap V \neq \emptyset$, então $\det(\mathrm{Jac}(\varphi \circ \psi^{-1})) = \det(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}) > 0$.

   (2) Demonstre que se $(\varphi, U), (\psi, V) \in \mathcal{A}'$ e se $p \in U \cap V \neq \emptyset$, e se $\{\partial/\partial x^i\}$ e $\{\partial/\partial y^i\}$ são as bases para T_pM induzidas pelas cartas (φ, U) e (ψ, V) respetivamente, então elas são equivalentes pela relação dada em cima sobre bases de T_pM.

   Uma **orientação** em M é uma escolha de sub-atlas $\mathcal{A}'$ com essas propriedades.

   (3) Seja M uma n-variedade diferenciável. Demonstre que o conjunto

   $$\widetilde{M} = \{(p, \sigma_p)\ ;\ p \in M,\ \sigma_p \text{ é uma orientação no espaço vetorial } T_pM\}$$

   admite a estrutura de uma variedade diferenciável tal que a mapa

   $$\begin{array}{rcl} \pi : \widetilde{M} & \to & M, \\ (p, \sigma_p) & \mapsto & p, \end{array}$$

   seja suave.

   (4) Demonstre que a $(\widetilde{M}, \pi)$ é um espaço de recobrimento de M cujas fibras são de cardinalidade 2.

   (5) Demonstre que $(\widetilde{M}, \pi)$ é trivial como um espaço de recobrimento (é dizer, $\tilde{M}$ é a união desjunta de duas cópias de M) se e somente se M é orientável.

   (6) Demonstre que uma variedade diferenciável conexa cujo grupo fundamental não contem um subgrupo de índice 2 deve ser orientável. Em particular, demonstre que toda variedade simplesmente conexa é orientável.

   (Pode ver mais sobre a teoria de espaços de recobrimento e o grupo fundamental nos livros de Massey (Algebraic Topology, Springer) ou Lima (Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento, Projeto Euclides). Para a última parte, a seguinte proposiçaõ (de Lima pga. 152) pode ser útil. Seja $p :\ \widetilde{X} \to X$ um recobrimento, com $\widetilde{X}$ conexo por caminhos. Para cada $x \in X$, o grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ opera transitivamente à direita na fibra $p^{-1}(x)$. O grupo de isotropia da cada ponto $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ é $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})$.)

2. Seja $X \in \Gamma(TM)$ um campo vetorial suave numa variedade diferenciavel.

(a) Demonstre que para todo $p \in M$, existe um subconjunto aberto $U \subseteq M$, $\varepsilon > 0$ e uma aplicação suave $\varphi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tais que

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= x, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) &= X(\varphi(x, t)) \end{aligned}$$

para todo $x \in U$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. A aplicação φ será chamada o **fluxo** do campo X.

(b) Demonstre que a solução desse sistema de EDO's é única, no sentido de que se φ (com domínio $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$), e ψ (com domínio $V \times (-\delta, \delta)$) são soluções do sistema, e se $p \in U \cap V$ e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\delta, \delta)$, então nós temos $\varphi(p, t) = \psi(p, t)$.

Os detalhes mais importantes desse exercício seguem do resultado fundamental de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias. O que é necessário aqui é translадar aqueles resultados para campos vetoriais numa variedade. Esse resultado é demonstrado em Appendix D do livro de Lee (Introduction to Smooth Manifolds, GTM, Springer).

3. (a) Encontre fluxos $\varphi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ para os seguintes campos vetoriais em $\mathbb{R}^2$:
   i. $X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$,
   ii. $Y = x^2\frac{\partial}{\partial x}$,
   iii. $Z = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$.

   (b) Encontre um exemplo de uma variedade M e um campo vetorial X em M cujo fluxo φ *não* é definido em $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, para nenhum $\varepsilon > 0$.

4. Seja $\varphi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ o fluxo do campo vetorial X em M, sejam $s, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tais que $s + t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e seja $\widetilde{U} \subseteq U$ tal que se $x \in \widetilde{U}$, $\varphi_s(x) = \varphi(x, s) \in U$.

   (i) Demonstre que $\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{t+s}(x)$.

   (ii) Em particular, mostre que se $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, φ_t é um difeomorfismo entre os conjuntos abertos U e $\varphi_t(U)$.

5. (a) Sejam M uma variedade compacta e $X \in \Gamma(TM)$ um campo vetorial em M. Demonstre que o máximo domínio de definição do fluxo φ de X é $M \times \mathbb{R}$. Isso é dizer, $\varphi : M \times \mathbb{R} \to M$.

   (b) Demonstre que φ define um homomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \to Diff(M)$ para o grupo de diffeomorfismos de M.

6. Seja $X \in \Gamma(TM)$ um campo vatorial suave em M e $\varphi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ o seu fluxo, definido numa vizinhança de p. Ao considerar vetores tangentes em p como classes de equivalência de curvas que passam por p, demonstre que a derivada direcional de uma função $f \in C^\infty(M)$ é dada por

$$(Xf)(x) = \frac{d}{dt}\left(f(\varphi_t(x))\right)\bigg|_{t=0}.$$

7. Seja $F : M \to N$ uma aplicação suave de variedades diferenciáveis. Em cada $p \in M$, temos uma aplicação linear $F_{*,p} : T_pM \to T_{F(p)}N$. Para campos vetoriais $X \in \Gamma(TM)$ e $Y \in \Gamma(TN)$, dizemos que X e Y são F-**relacionados** se para todo $p \in M$, $F_{*,p}(X(p)) = Y(F(p))$.

(1) Seja $F : M \to N$ uma aplicação suave entre variedades, e sejam $X \in \Gamma(TM)$ e $Y \in \Gamma(TN)$ campos vetoriais. Se X e Y são F-relacionados, então demonstre que para toda $f \in C^\infty(N)$, X e Y agem como derivações como

$$X(f \circ F) = (Yf) \circ F.$$

Observamos que para uma aplicação suave $F : M \to N$ e campo vetorial $X \in \Gamma(TM)$, não existe necessariamente um campo $Y \in \Gamma(TN)$ que é F-relacionado a X.

(2) Sejam M e N variedades diferenciáveis, e $F : M \to N$ um difeomorfismo. Demonstre que para todo $X \in \Gamma(TM)$, existe um único campo vetorial suave Y em N que é F-relacionado com X.

Chamamos o campo vetorial Y obtido aqui o **avanço**, ou **campo empurrado para frente**, de X e o denotamos por $Y = F_*X$. De novo, emfatizamos que o avanço é bem definido somente quando F é um difeomorfismo.

(3) Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$. Demonstre que o campo $\frac{d}{dt} \in \Gamma(T\mathbb{R})$ é F-relacionado com $Y \in \Gamma(T\mathbb{R}^2)$ dado por

$$Y = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

8. Sejam $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ campos vetoriais suaves em M e $f, g \in C^\infty(M)$ funções suaves. Demonstre que o colchete de Lie satisfaz as identidades

$$\begin{aligned} [X, Y] &= -[Y, X], && \text{anti-simetria} \\ [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] &= 0, && \text{identidade de Jacobi,} \\ [fX, gY] &= fg[X, Y] + (fXg)Y - (gYf)X. \end{aligned}$$

9. Seja $F : M \to N$ uma aplicação suave entre variedades, e sejam $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ e $Y_1, Y_2 \in \Gamma(TN)$ campos de vetores tais que X_1 é F-relacionado com Y_i para $i = 1, 2$. Demonstre que $[X_1, X_2]$ é F-relacionado com $[Y_1, Y_2]$.

10. Queremos diferenciar campos de vetores. Tem várias maneiras para fazer isso. A derivada covariante vai ser um dos objetos mais importantes nessa disciplina. Já vimos o colchete de Lie, que pelas últimas questões é um operador diferencial. Agora daremos uma outra caracterização do colchete de Lie.

Seja $X \in \Gamma(TM)$ um campo vetorial e $\varphi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ o seu fluxo. Já vimos que para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, φ_t é um difeomorfismo entre U e $\varphi_t(U)$, e mais especificamente, $\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) = x$ para todo t. Isso é dizer que a derivada $D\varphi_{-t,\varphi_t(x)} = (\varphi_{-t})_{*,\varphi_t(x)} : T_{\varphi_t(x)}M \to T_xM$ é um isomorfismo para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Seja $Y \in \Gamma(TM)$ um outro campo de vetores. Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $Y(\varphi_{-t}(x)) \in T_{\varphi_{-t}(x)}M$, e logo $(\varphi_{-t})_{*,\varphi_t(x)}(Y(\varphi_{-t}(x))) \in T_xM$. Isso é dizer,

$$t \mapsto (\varphi_{-t})_{*,\varphi_t(x)}(Y(\varphi_{-t}(x)))$$

define uma curva no espaço vetorial T_xM. Definimos a derivada de Lie do campo Y ao longo do campo X por

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)_x &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi_{-t})_{*,\varphi_t(x)}(Y(\varphi_{-t}(x))), \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{(\varphi_{-t})_{*,\varphi_t(x)}(Y(\varphi_{-t}(x))) - Y(x)}{t}. \end{aligned}$$

Primeiro, afirmamos sem demonstrar que $(\mathcal{L}_X Y)_x$ é bem definido em todo ponto, e que $\mathcal{L}_X Y$ é um campo vetorial suave.

(A) Demonstre que $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

Para fazer isso, nós separamos a questão em vários casos. Seja $\mathcal{R}(X) = \{x \in M \ ; \ X(x) \neq 0\}$ o conjunto de pontos *regulares*. Seja $\operatorname{supp} X = \overline{\mathcal{R}(X)}$ o suporte do campo X, e seja $M \setminus \operatorname{supp}(X)$ o complemento do suporte. Notamos que $\mathcal{R}(X)$ e $M \setminus \operatorname{supp}(X)$ são conjuntos abertos em M.

Se $x \in \mathcal{R}(X)$ é um ponto regular, é possível encontrar coordenadas $(y^1, \ldots, y^n)$ numa vizinhança de x tal que X é dado por $X(y) = \frac{\partial}{\partial y^1}$. Calcule explicitamente o fluxo de X nessas coordenadas para calcular $(\mathcal{L}_X Y)_x$ e compare isso com a expressão em coordenadas do colchete $[X, Y]_x$.

Se $x \in \operatorname{supp}(X) \setminus \mathcal{R}(X)$, utilize a continuidade de ambos $\mathcal{L}_X Y$ e $[X, Y]$.

Se $x \in M \setminus \operatorname{supp}(X)$, verifique que $(\mathcal{L}_X Y)_x = 0 = [X, Y]_x$.

O teorema de que é possível encontrar coordenadas (y^i) assim é dado em Teor. 9.22 do livro de Lee sobre a forma canônica de um campo vetorial perto de um ponto regular. Essencialmente, se $X(x) \neq 0$, então a imagem do fluxo $t \to \varphi_t(x)$ é uma curva mergulhada em M, em que t é uma coordenada. O teorema afirma que $t = y^1$ pode ser completada a um sistema de coordenadas em volta de x.

11. A derivada de Lie pode ser estendida para campos de tensores de outros tipos. Primeiro, reparamos que a derivada de Lie de um campo vetorial é um novo campo vetorial. A derivada de Lie de uma função é uma função e a derivada de Lie de uma 1-forma é uma nova 1-forma. Por exemplo, definimos a derivada de uma função $f \in C^\infty(M)$ por um campo vetorial X como a função $\mathcal{L}_X f = Xf \in C^\infty(M)$, e já vimos que isso relaciona-se com o fluxo de X por

$$(\mathcal{L}_X f)_x = (Xf)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f(\varphi_t(x)).$$

Definimos a derivada de Lie de uma 1-forma $\alpha \in \Omega^1(X)$ como no seguinte. Para todo $x \in M$, queremos definir uma aplicação linear $(\mathcal{L}_X \alpha)_x : T_x M \to \mathbb{R}$. Para $Y_x \in T_x M$, estenda Y_x a um campo vetorial suave Y sobre M, e defina

$$(\mathcal{L}_X \alpha)_x(Y_x) = X_x(\alpha(Y)) - \alpha_x([X, Y]_x).$$

(a) Se $f \in C^\infty(M)$ é uma função suave e $Y \in \Gamma(TM)$, demonstre que $(\mathcal{L}_X \alpha)(fY) = f(\mathcal{L}_X \alpha)(Y)$.

Essa linearidade sobre funções é suficiente para concluir que a definição de $(\mathcal{L}_X \alpha)_x(Y_x)$, utilizando uma extensão do vetor Y_x, independe da extensão escolhida. Veremos por que mais tarde.

(b) Demonstre que $\mathcal{L}_X(f\alpha) = (Xf)\alpha + f\mathcal{L}_X \alpha$.

(c) Se $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(T\mathbb{R}^n)$ e $\alpha = dx^j$, calcule $\mathcal{L}_X dx^j$.

(d) Observamos que temos uma paridade, ou produto, entre campos e formas, tomando valores em funções,

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(TM) \times \Omega^1(M) & \to & C^\infty(M), \\ (Y, \alpha) & \mapsto & \alpha(Y). \end{array}$$

Demonstre que a derivada de Lie age como uma derivação com relação a esse produto.

(e) Seja X um campo vetorial suave e ω uma forma diferencial suave (de qualquer ordem) em M. Demonstre as seguintes fórmulas :

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} \qquad \mathcal{L}_X\omega = \iota_X d\omega + d(\iota_X\omega),\\
&\text{(ii)} \qquad d(\mathcal{L}_X\omega) = \mathcal{L}_X(d\omega),
\end{aligned}
$$

onde $\iota_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ é a operação de contração do campo X na forma ω dada por $(\iota_X\omega)(Y_1, \ldots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \ldots, Y_{k-1})$.