1. O *catenóide* é a superfícia de revolução em $\mathbb{R}^3$ com o eixo-z como o eixo de revolução e o *catenário* $x = \cosh(z)$ no plano-xz como curva geradora. A *helicóide* é a superfície *reglada* em $\mathbb{R}^3$ de retas paralelas ao plano-xy que se intersectam o eixo-z e o hélice $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$.

   (a) Escreve parametrizações naturais para o catenóide e o helicóide.

   (b) Considere o catenóide e o helicóide com métricas induzidas de $\mathbb{R}^3$ e encontre expressões para essas métricas com repeito às parametrizações em item (a).

   (c) Mostre que as expressões locais em item (b) coincidem, possivelmente com um troco de coordenadas, e deduza que o catenóide e o helicóide são localmente isométricos.

   (d) Demostre que que o catenóide e o helicóide não podem ser isométricos, por causa de topologia.

2. Na aula nós vimos a métrica hiperbólica pela primeira vez. Os próximos exemplos mostrarão que a mesma métrica pode ser realizada em vários espaços diferentes. A diferença é pequena. A hipersuperfície H, o disco $\mathbf{D}$ e o meio-espaço $\mathbb{R}^n_+$ são todos difeomorfos, mas a métrica hiperbólica exibe propriedades diferentes (simetrias diferentes) mais obviamente nos modelos diferentes.

   Faremos com todos os detalhes a conta que foi feita na aula. Em $\mathbb{R}^{n+1}$, consideramos um produto interior com assinatura $(n, 1)$ (também dito *Lorenziano*)

   $$g_{lor} = -(dy^0)^2 + (dy^1)^2 + \cdots + (dy^n)^2.$$

   Seja $H \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ a hipersuperfície $H = \{(y^0, \ldots, y^n) \ ; \ -(y^0)^2 + (y^1)^2 + \ldots + (y^n)^2 = -1, \ y_0 > 0\}$.

   (a) Demonstre que para todo ponto $p \in H$, a linha entre p e $S = (-1, 0, \ldots, 0)$ encontre o plano $y^0 = 0$ num único ponto $q = (0, x)$, onde $x = (x^1, \ldots, x^n)$ satisfaz $\|x\| < 1$. Assim, obtemos um difeomorfismo $f : \mathbf{D} \to H$, onde $\mathbf{D}$ é o disco unitário em $\mathbb{R}^{n+1}$.

   (b) Demonstre que a métrica induzida em $\mathbf{D}$ é dada por

   $$g_D = f^* g_{lor} = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} \left((dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2 \right)$$

   $(\mathbf{D}, g_D)$ é chamado o *modelo do disco de Poincaré* de H.

3. Considere o disco unitário aberto $\mathbf{D}$ equipado com a métrica g_D do exercício anterior. Prove que a inversão em $\mathbb{R}^n$ na esfera de centro $(-1, 0, \ldots, 0)$ e raio $\sqrt{2}$ define um difeomorfísmo F entre $\mathbf{D}$ e o meio-espaço superior

   $$\mathbb{R}^n_+ = \{(z_1, \ldots, z_n) \ ; \ z_1 > 0\}$$

   e tal que a métrica $g_+ = F^* g_D$ seja dada por

   $$g_+ = \frac{1}{z_1^2} \left(dz_1^2 + \cdots + dz_n^2 \right),$$

   onde $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n_+$. $(\mathbb{R}^n_+, g_+)$ é chamado o *modelo de meio-espaço superior de Poincaré*.

   Essa questão pode ser simplificada primeiro considerando o caso $n = 2$. Assim, podemos usar um pouco de análise complexa. Identificamos $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$ e consideramos $\hat{\mathbb{C}}$ a esfera de Riemann obtida adicionando o ponto ∞ a $\mathbb{C}$ para ter $\mathbb{R}^2_+ \subseteq \mathbb{C} \subseteq \hat{\mathbb{C}}$.

   (a) Demonstre que a transformação de Möbius $Sz = \frac{iz+1}{z+i}$ envia a tripla $\{0, 1, \infty\}$ para $\{-i, 1, i\}$. Demonstre que S envia o semi-plano superior $\mathbb{R}^2_+ = \{x + iy \ ; \ y > 0\}$ para o disco unitário $\mathbf{D} = \{u + iv \ ; \ u^2 + v^2 < 1\}$. Mais especificamente, demonstre que

   $$|S(x + yi)|^2 = 1 - \frac{4y}{x^2 + (y + 1)^2}.$$

(b) Considere a métrica Riemanniana $g_D = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2}(du^2+dv^2)$ em $\mathbf{D}$. Demonstre que $S^*g_D = g_+ = \frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2)$.

(c) Em $\mathbb{R}^n$, a inversão na esfera unitária S^{n-1} é dada por $T(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2}\xi$ (definida para $\xi \neq 0$). A inversão na esfera $S(p,R)$ com centro o ponto p e de raio $R > 0$ é dada por $F(\xi) = \frac{R^2}{|\xi-p|^2}(\xi - p) + p$. Demonstre que a mapa acima S (composta com conjugação complexa) satisfaz $\overline{Sz} = \frac{2}{|z-i|^2}(z+i) - i$. Isso é dizer que $\overline{S}$ é inversão na esfera $S(-i, \sqrt{2})$.

(d) Demonstre a afirmação acima que inversão F na esfera $S((-1,0\ldots,0),\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{R}^n$ defina um difeomorfismo entre $\mathbb{R}^n_+$ e $\mathbf{D}$ tal que $F^*g_D = g_+$.

4. (a) Encontre uma função $r = r(y)$, especificando o domínio, tal que (r,x) forneça um sistema de coordenadas em que a métrica acima $g_+ = \frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2)$ é escrita como um produto torcido $g_+ = dr^2 + f(r)dx^2$.

   (b) Lembramos que as coordinadas radiais na esfera S^2 são obtidas considerando S^2 como a superfície de revolução associada à curva $\gamma(r) = (\mathrm{sen}(r), 0, \cos(r))$ e que a métrica redonda nessas coordenadas é $g_{red} = dr^2 + \mathrm{sen}^2(r)d\theta^2$. Encontre uma curva $\sigma(r)$ em $\mathbb{R}^{2,1}$ tal que a hipersuperfície $H = \{(x,y,z)\ ;\ -z^2+x^2+y^2 = -1,\ z > 0\}$ que carrega a métrica hiperbólica seja a superfície de revolução de σ. Utilize isso para escrever a métrica hiperbólica como $g_{hip} = dr^2 + F(r)d\theta^2$, para alguma função $F(r)$. Note que essa expressão não é a mesma de que em parte (a).

5. Considere a curva parametrizada

$$\begin{aligned} x &= t - \tanh t \\ y &= \frac{1}{\cosh t}. \end{aligned}$$

A superfície de revolução em $\mathbb{R}^3$ construida por uma revolução da curva no eixo-x é chamada a *pseudo-esfera*. Note que a pseudo-esfera é singular ao longo do círculo obtido girando o ponto $(0,1)$.

   (a) Prove que a pseudo-esfera com círculo singular removido é localmente isométrico ao modelo do meio-espaço superior de H.

   (b) Demostre que a curvatura gaussiana da pseudo-esfera é igual a -1.

6. Considere o modelo de meio-espaço superior de Poincaré $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ y > 0\}$ com a métrica $g_+ = \frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2)$. Confirme que as seguintes transformações de $\mathbb{R}^2_+$ são isometrias :

   (a) $\tau_a(x,y) = (x+a, y)$,

   (b) $h_r(x,y) = (rx, ry)$,

   (c) $R(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$.

   Deduza que $\mathbb{R}^2_+$ é homogêneo.

7. (a) Demostre que o polinômio $p(a,b,c) = ac - b^2$ é a forma quadrática associada a uma métrica de Minkowski em $\mathbb{R}^3$. Isto é, um produto interior de assinatura $(1,2)$.

   (b) Seja $S^2\mathbb{R}^2$ o conjunto de 2×2 mátrizes simétricos. Defina uma aplicação linear $T : S^2\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T^*q = -\det$ em $S^2\mathbb{R}^2$, onde q é a forma quadratica

$$q(x_0, x_1, x_2) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2.$$

   Isto é, $q(T(A)) = -\det A$ para todo $A \in S^2\mathbb{R}^2$.

(c) Demostre que o espaço hiperbólico real H admite uma ação fiel de $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$ por isometrias.

8. Considere a esféra unitária $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ como o conjunto de pontos $(z_1, z_2) \subseteq \mathbb{C}^2$ que satisfazem $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Encontre coordenadas (t, θ_1, θ_2) em S^3 tais que a métrica redonda seja escrita

$$g_{S^3} = dt^2 + \operatorname{sen}^2(t)d\theta_1^2 + \cos^2(t)d\theta_2^2.$$

9. Sejam A e B funções em $\mathbb{R}^2$ que não se anulam e considere a métrica $g = A^2dx^2 + B^2dy^2$, onde x, y são as coordenadas padrões em $\mathbb{R}^2$.

   (a) Calcule os coeficientes de Christoffel de g.

   (b) Escreva as equações geodésicas de g.