1. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n. Para $U \subseteq M$, um referencial ortonormal em U é uma coleção ordenada de campos vetoriais em U, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ onde $e_i \in \Gamma(U, TM)$, tal que para todo $x \in U$, $\{e_1(x), \ldots, e_n(x)\}$ forma uma base ortonormal para T_xM. Demonstre que para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subseteq M$ com $p \in U$ e um referencial ortonormal $\{e_i\}$ em U. [Dica : Aplique o algorítmo de Gram-Schmidt ao referencial $\{\partial_i\}$.]

2. Seja (M, g) uma variedade riemanniana orientada. Seja (x^i) coordenadas definidas numa aberta $U \subseteq M$ tais que

$$\begin{aligned} g &= \sum_{ij} g_{ij} dx^i \otimes dx^j \\ g_{ij} &= g(\partial_i, \partial_j), \end{aligned}$$

supondo que a n-forma $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ seja compativel com a orientação. Defina Ω por

$$\Omega = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \ldots dx^n$$

como uma n-forma diferencial em U.

(a) Demostre que Ω é bem definida, independentemente das coordenadas. Especificamente, se (y^j) é umo outro sistema de coordenadas compatível com a orientação em M, e definida em $V \subseteq M$, então as funções locais $\det(g_{x,ij})$ e $\det(g_{y,ij})$, e as n-formas $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ e $dy^1 \wedge \cdots \wedge d^n$, diferem por funções definidas em $U \cap V$. Conclua que Ω é bem-definida em M e depende somente em g e a orientação.

(b) Demostre que se $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ é um co-referencial ortonormal em U, então Ω é dada por

$$\Omega = \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n.$$

Ω é chamada a *forma de volume* da métrica g. As vezes, ela é denotada $\mathrm{d}vol_g$ ou $d\mu_g$. Observamos que a definição de uma forma de volume numa variedade Riemanniana orientada nos permite integrar funções em M. Isso é dizer, para $f \in C^\infty(M)$, podemos calcular $\int_M f d\mu_g$ como a integral da n-forma $f\Omega$. Observamos que isso não é necessariamente finito se f não tem suporte compacto.

3. Seja (x^i) um sistema de coordenadas numa variedade suave M que é equipada com uma conexão ∇, e considere os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k que são definidos por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Seja (y^α) é um outro sistema de coordenadas em M, com símbolos de Christoffel associados $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$. Demonstre que há a seguinte regra de transformação :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \sum_{i,j,k} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} + \sum_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k}.$$

4. Em $H = (\mathbb{R}_+^2, g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2))$ seja $e_1 = y\partial/\partial x$ e $e_2 = y\partial/\partial y$ campos vetoriais em H. Defina as mátrizes $\Gamma_x = (\Gamma_{xi}^j)$ e $\Gamma_y = (\Gamma_{yi}^j)$ por

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_x} e_i &= \sum_j \Gamma_{xi}^j e_j, \\ \nabla_{\partial_y} e_i &= \sum_j \Gamma_{yi}^j e_j. \end{aligned}$$

Demostre que as mátrizes Γ_x, Γ_y são funções em H com valores em $\mathfrak{so}(2)$, as mátrizes (2×2) anti-simétricas.

Elas podem ser combinada para dar uma 1-forma em H com valores em $\mathfrak{so}(2)$ by $\Gamma = \Gamma_x dx + \Gamma_y dy$.

5. Nesta questão vamos calcular o transporte paralelo ao longo de um caminho específico na esfera S^2. Em coordenadas $(r, \theta) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$, a métrica g_S tem a forma $g_S = dr^2 + \text{sen}^2(r) d\theta^2$.

   (a) Calcule os símbolos de Christoffel da métrica. Specificamente, mostre que Γ pode ser escrito

   $$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \cot(r) \end{pmatrix} dr + \begin{pmatrix} 0 & -\cos(r)\text{sen}(r) \\ \cot(r) & 0 \end{pmatrix} d\theta$$

   (b) Consideramos a curva $\{r = r_0\}$. Isto é, a curva circular centrada no polo de norte, $\gamma : \theta \mapsto (\text{sen}(r_0)\cos(\theta), \text{sen}(r_0)\text{sen}(\theta), \cos(r_0))$. Demostre que o campo $X = X^1 \partial_r + X^2 \partial_\theta$ é parallelo ao longo de γ se e somente se X^1 e X^2 satisfazem

   $$\begin{aligned} X^1_\theta - \cos(r_0)\text{sen}(r_0) X^2 &= 0, \\ X^2_\theta + \cot(r_0) X^1 &= = 0. \end{aligned}$$

   Resolve esse sistéma de equações.

   (c) Calcule $|X(0)|^2 = g(X(0), X(0)$ e $|X(\theta)|^2$ e conclua que transporte paralelo preserve o comprimento de vetores.

   (d) Transporte paralelo ao longo da curva de $\theta = 0$ até $\theta = 2\pi$ define um endomorfismo de $T_p S^2$ para $p = (\text{sen}(r_0), 0, \cos(r_0))$. Descreve a aplicação $P^\gamma_{0,2\pi}$. Conclua que, trocando o *polo de norte* e considerando outras curvas circulares, o grupo de holonomia de S^2 com ponto de base p é igual a $SO(2)$.

   (e) O *círculo grande* $\{r = \pi/2\}$ é um geodésico γ em S^2. Descreve o transporte parallelo ao longo de γ.

6. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Para todo campo vetorial $X \in \Gamma(TM)$ podemos definir uam 1-forma dual θ_X pela fórmula $\theta_X(Y) = g(X, Y)$.

   (A) Demostre que, para todo $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, a conexão de Levi-Civita satisfaz a identidade

   $$2g(\nabla_X Y, Z) = (\mathcal{L}_Y g)(X, Z) + (d\theta_Y)(X, Z).$$

   Dica : Para isso, é necessário usar a definição da derivada exterior de uma 1-forma $\alpha \in \mathcal{E}^1(M) = \Gamma(M, \Lambda^1 T^* M)$ como $d\alpha \in \mathcal{E}^2(M) = \Gamma(M, \Lambda^2 T^* M)$ por

   $$d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]).$$

   Também é necessário a definição da derivada de Lie do tensor g. Vai ter que encontrar a definição certa para que a questão faça sentido.

   (B) Nós já vimos a definição de que um difeomorfismo $\varphi : M \to M$ é uma isometria de g se $\varphi^* g = g$. Um campo vetorial $Y \in \Gamma(TM)$ é um campo de Killing, ou uma isometria infinitesimal, se $\mathcal{L}_Y g = 0$. Demonstre que Y é um campo de Killing se e somente se para todo $x \in M$, o endomorfismo de $T_x M$

   $$\begin{aligned} \nabla Y : T_x M &\to T_x M, \\ X &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

   é anti-simétrica.

7. Nessa questão vamos calcular as geodésicas em $H = (\mathbb{R}^2_+, \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2))$.

   (a) Demostre que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ é um geodésico se e somente se x, y satisfazem

$$\begin{aligned} x'' - 2\frac{x'y'}{y} &= 0 \\ y'' + \frac{x'^2 - y'^2}{y} &= 0. \end{aligned}$$

   (b) Demostre que $x(t) = x_0$ constant satisfaz a primeira equação. Neste caso, demostre que $y(t) = y_0 e^{kt}$ para $y_0 > 0$, k constantes.

   (c) Supondo que $x'(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, demostre que

$$\begin{aligned} \frac{x''}{x'} &= 2\frac{y'}{y} \\ \text{e então} \quad x' &= cy^2. \end{aligned}$$

   (d) A condição do caminho ter velocidade igual a 1 dá a equação $\frac{1}{y^2}(x'^2 + y'^2) = 1$. Combina isso com a equação $x' = cy^2$ para obter a identidade

$$\frac{dy}{y\sqrt{1 - c^2y^2}} = \pm dt.$$

   (e) Integra essa equação para determinar explicitmente $y(t)$ e $x(t)$. Conclua que os geodésicos em H são linhas verticais e meio-círculos com centro no eixo-x.

8. Define uma conexão em $\mathbb{R}^3$ specificando

$$\begin{aligned} \Gamma^3_{12} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^2_{31} = 1 \\ \Gamma^3_{21} = \Gamma^1_{32} = \Gamma^2_{13} = -1 \end{aligned}$$

   e os outros símbolos de Christoffel igual a zero. Demostre que, como uma matriz, Γ é dado por

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & dz & -dy \\ -dz & 0 & dx \\ dy & -dx & 0 \end{pmatrix}.$$

   Demostre que essa conexão é compatível com a métrica eurclideana e tem geodésicas minimizantes, mas nã é simétrica. Dê uma expressão para a torsão.

9. Em coordenadas polares a métrica redonda em $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ é exprimida como $g = dr^2 + \text{sen}^2(r)d\theta^2$. Use essa expressão para a métrica para mostrar que a aplicação exponencial

$$\exp_N : T_N S^2 \to S^2$$

   é dada por

$$(\rho\cos\phi, \rho\,\text{sen}\phi, 0) \mapsto (\text{sen}\rho\cos\phi, \text{sen}\rho\,\text{sen}\phi, \cos\rho).$$

   Aqui, $N = (0,0,1) \in S^2$ e $T_N S^2 = \{(x,y,z)\ ;\ z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

10. Seja $W \subseteq M$ uma vizinhança *normal* de $p \in M$. Seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ uma base ortonormal para T_pM, tal que todo ponto de $\exp_p^{-1}(W) \subseteq T_pM$ possa ser escrito unicamente como $\sum_i x^i E_i$ para $(x^1, \ldots, x^n) \in U \subseteq \mathbb{R}^n$. Demostre que a aplicação
$$(x^1, \ldots, x^n) \mapsto \exp_p(x^1 E_1 + \cdots + x^n E_n)$$
defina um sistema de coordenadas em $W \subseteq M$ tal que a métrica $g = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j$ satisfaça
   (a) $g_{ij}|_p = \delta_{ij}$,
   (b) $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}|_p = 0$.

11. Seja (M, g) uma variedade riemanniana, com $p \in M$. Para $c > 0$, seja $B = \exp_p(B(0, c))$ uma bola normal em M. Para $r < c$ a esfera geodésica $S_r(p)$ é definida como a imagem sob $\exp_p$ da esfera tangente $S(0, r) = \{v \in T_pM \ ; \ |v| = r\}$. Isto é,
$$S_r(p) = \exp_p(S(0, r)).$$
Para $v \in S(0, r)$, seja $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ a geodésica com velocidade inicial v e seja $q = \gamma(1) \in S_r(p)$. Use a lema de Gauss para demostrar que $S_r(p)$ tem espaço tangente em q
$$T_q S_r(r) = \{W \in T_qM \ ; \ \langle W, \gamma'(1) \rangle = 0\}.$$

12. (Geodésicas numa superfície de revolução) Denota por (u, v) as coordenadas em $\mathbb{R}^2$. Demostre que a aplicação $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(u, v) = (f(v)\cos(u), f(v)\text{sen}(u), g(v))$,
$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \ \ u_0 < u < u + 1, \ v_0 < v < v_1\},$$
onde f e g são funções suaves, com $f'(v) + g'(v) \neq 0$ e $f(v) \neq 0$, é uma imersão. A imagem $\varphi(U)$ é a superfície gerada pela rotação da curva $(f(v), g(v)$ ao redor do eixo-z e é chamada a superfície de revolução S. A imagem por φ das curvas $u = \mathit{const}$ e $v = \mathit{const}$ são chamadas *meridianas* e *paralelas*, respeitivamente, de S.
   (a) Demostre que a métrica induzida nas coordenadas (u, v) é dada por
$$g_{11} = f^2, \ g_{12} = 0, \ g_{22} = (f')^2 + (g')^2,$$
$$g_S = f^2 du^2 + \left((f')^2 + (g')^2\right) dv^2.$$
   (b) Demostre que as equações para uma geodésica γ são
$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2ff'}{f^2}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} &= 0 \\ \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 &= 0. \end{aligned}$$
   (c) Obtenha o significado geométrico seguinte : a segunda equação é, exceto as meridianas e paralelas, equivalente ao fato que a "energia" $|\gamma'(t)|^2$ de uma geodésico é constante ao longo de γ; a primeira equação significa que se $\beta(t)$ é o ângulo orientado, $\beta(t) < \pi$, de γ com a paralela P intersetando γ em $\gamma(t)$, então
$$r\cos(\beta) = \mathit{const.},$$
onde r é o raio da paralela P (essa equação se chama a *relação de Clairaut*).
   (d) Use a relação de Clairaut para mostrar que o geodésico do paraboloide
$$(f(v) = v, \ g(v) = v^2, \ v \in (0, \infty), \ u \in (-\varepsilon, 2\pi + \varepsilon)),$$
que não é uma meridiana, se intersecta infinitamente vezes.
   (e) Escreva a esféra unitária $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ como uma superfície de revolução, em coordenadas (r, θ). Escreva e resolva as equações geodésicas em $(r(t), \theta(t)$ no caso que $r(0) \neq 0$.