Instituto de Matemática - IM-UFRJ
Geometria Riemanniana
Lista 5 de exercícios, para entregar na aula de 20/12/2021

1. Seja M uma variedade diferenciável e $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial de posto k.
   (a) Demonstre que existe pelo menos uma conexão em E.
   (b) Sejam ∇_1 e ∇_2 conexões em E. Será que $\nabla_1 + \nabla_2$ ainda é uma conexão?
   (c) Demonstre que o espaço de conexões $\mathcal{C}(E)$ é um *espaço afim*[1] sobre $\mathcal{E}^1(M, \mathrm{End}E)$.
   (d) Para $E = M \times \mathbb{R}^k$, considerado como um fibrado vetorial, explica como podemos escrever $\nabla \in \mathcal{C}(E)$ como
   $$\nabla = d + A$$
   para algum $A \in \mathcal{E}^1(M, \mathfrak{gl}(k, \mathbb{R}))$, onde $\mathfrak{gl}(k, \mathbb{R}) = \mathrm{M}(k, \mathbb{R})$ é o conjunto de todas as $k \times k$ matrizes reais.

2. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana.
   (a) Defina $Q : TM \to T^*M$ por $X \to g(X, \cdot)$ e demonstra que Q é um fibrado isomorfismo. Portanto, calcule o que Q faz em coordenadas locais e explica a relação entre levantando e baixando índices. No futuro usaremos a notação
   $$X^\flat : Q(X), \quad \text{and } \omega^\sharp = Q^{-1}(\omega)$$
   para um campo vetorial X e ω uma 1-forma.[2]
   (b) O **gradiente** de uma função $f \in C^\infty(M)$ é dado por
   $$\mathrm{grad}(f) = df^\sharp.$$
   Calcule a expressão de $\mathrm{grad}(f)$ em coordenadas locais. Porque chamamos isso o gradiente?
   (c) Suponha que $g(\mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(f)) \equiv 1$. Demonstre que as curvas integrais do campo vetorial $\mathrm{grad}(f)$ são geodésicas. Encontre uma função f definida em $\mathbb{R}^n$ (ou um subconjunto aberto) que satisfaz $\|\mathrm{grad} f\| = 1$.

3. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e ∇ a conexão de Levi-Civita. Escolhe em torno de $p \in M$ e $0 \in T_pM$ vizinhanças abertos $p \in U$ e $0 \in V$ tais que
   $$\exp_p : V \to U$$
   seja um difeomorfismo. Portanto, podemos identificar $\mathbb{R}^m$ com T_pM ao enviar a base padrão $\{e_1, \ldots, e_m\}$ de $\mathbb{R}^m$ a uma base ortonormal $\{E_1, \ldots, E_m\}$ por
   $$v^i e_i \mapsto v^i E_i.$$
   Isso nos permite a definir as coordenadas normais Riemannianas em torno de p por
   $$x := E^{-1} \circ exp_p^{-1} : U \to \Omega \subseteq R^m.$$
   Demonstre as seguintes propriedades :

[1] Um **espaço afim** $\mathbb{A}$ sobre um espaço vetorial real V é o conjunto $\mathbb{A}$ junto com uma operação de subtração
$$S : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V$$
denotado por simplicidade $S(P, Q) = P - Q$ com as propriedades seguintes:
i. $P - P = 0$ para todo $\mathbb{A}$,
ii. $(P - Q) - (R - Q) = P - Q$ para todo $P, Q, R \in \mathbb{A}$, and
iii. para todo $Q \in \mathbb{A}$ e $v \in V$, existe um único $P \in \mathbb{A}$ tal que $P - Q = v$.
Podemos pensar em espaços afins como espaços vetoriais sem a noção de uma origem, i.e. só entendemos a *diferênça* de dois pontos e não sabemos adicioná-los.

[2] Os isomorfismos $\flat$ e $\sharp$ são também conhecidos como os *isomorfismos musicais*.

(a) Temos $x(p) = 0$.

(b) Para $v \in T_pM$ e uma geodésica $\gamma_v(t)$ com $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma_v'(0) = v$, nós temos

$$x(\gamma_v(t)) = tE^{-1}(v).$$

Isso é dizer, as geodésicas que passam por p são retas radiais saindo da origem.

(c) $\partial_{x_i}|_p = E_i$ e $g_{ij} = \delta_{ij}$.

(d) Os símbolos de Christoffel satisfazem $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ e as primeiras derivadas da métrica se anulam em p, i.e. $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(p) = 0$.

4. (a) A topologia da variedade M e a geometria da métrica podem influenciar a completude de métricas em M. Seja $M = \mathbb{R}^n$, como uma variedade diferenciável. Já sabemos que a métrica Riemanniana Euclideana padrão g_{euc} é *completa*. Seja

$$g = e^{-|x|^2} g_{euc},$$

onde $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Demonstre que a métrica g não é completa.

(b) Seja (N, g) uma variedade Riemanniana completa[3]. Demonstre que uma subvariedade mergulhada fechada $\iota : M \to N$, com a métrica induzida $\iota^* g$ também é uma variedade Riemanniana completa.

5. Seja $\widetilde{M}$ um espaço de recobrimento de uma variedade Riemanniana M. Demonstre que é possível dar a $\widetilde{M}$ uma estrutura Riemanniana tal que a aplicação de recobrimento $\pi : \widetilde{M} \to M$ seja uma isometria local. Demonstre que $\widetilde{M}$ é completa se e somente se M é completa.

6. Demonstre que toda variedade diferenciável admite uma metrica Riemanniana *completa*.

7. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa. Para $v \in T_pM$, denota por γ_v a geodésica $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$. Considere o conjunto seguinte.

$$I_v = \{T \in \mathbb{R} \ ; \ \gamma_v \text{ é minimizante em } [0, T]\}.$$

(a) Demonstre que I_v é um intervalo fechado $I_v = [0, \rho(v)]$, com $\rho(v)$ possivelmente infinito.

(b) Demonstre que $\rho(v) = \lambda\rho(\lambda v)$ para todo $\lambda > 0$.

Como podemos considerar geodésicas parametrizadas por comprimento de arco, podemos igualmente considerar a função ρ em vetores de comprimento 1. Isso é dizer, na esfera unitária $S(0,1) \subseteq T_pM$. Além disso, é possível demonstrar que a função ρ, com valores em $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, é contínua.

Se $I_v = [0, \rho]$ para $\rho < \infty$, podemos dizer que $\gamma_v(\rho)$ é o *ponto de corte* (cut point) de $p = \gamma_v(0)$ ao longo de γ_v. Seja $U_p \subseteq T_pM$ o conjunto de vetores $\rho(v)v \in T_pM$, onde $|v| = 1$ e $\rho(v) < \infty$, e seja $Cut(p) = \exp_p(U_p) \subseteq M$ a imagem de U_p pela aplicação exponencial. $Cut(p)$ é chamado o *locus de corte* de p.

$Cut(p)$ consiste-se de todos os pontos de corte de p para todas as geodésicas emanando de p, e chamamos U_p o *locus de corte tangencial* de p.

8. Seja ∇ uma conexão em TM, não necessáriamente a conexão de Levi-Civita de alguma métrica. Seja $\{E_i\}$ um referencial local em $U \subseteq M$. Isso é dizer que cada $E_i \in \Gamma(U, TM)$ é um campo vetorial definido no conjunto aberto $U \subseteq M$ e que para todo $p \in U$, $\{E_1(p), \ldots, E_n(p)\}$ é uma base para T_pM. Seja $\{\varphi^i = E^i\}$ o co-referencial de 1-formas em U, que quer dizer que para todo $p \in U$, $\{\varphi^i(p)\}$ é a base dual de $\{E_i(p)\}$.

[3]Uma variedade Riemanniana é *completa* se uma das condições equivalentes do Teorema de Hopf-Rinow vale.

(a) Demonstre que existe uma unicamente determinada matriz de 1-formas $\omega_i^j \in \mathcal{E}^1(U)$ (chamadas as 1-formas da conexão) tal que

$$\nabla_X E_i = \sum_j \omega_i^j(X) E_j,$$

para todo $X \in T_pM$ e $p \in U$.

(b) Demonstre a primeira equação estrutural de Cartan :

$$d\varphi^j = \sum_i \varphi^i \wedge \omega_i^j + \tau^j,$$

onde $\{\tau^1, \dots, \tau^n\}$ são 2-formas diferenciais definidas em U em termos da *torsão* da conexão T^∇ e o referencial $\{E_i\}$ por

$$T^\nabla(X, Y) = \sum_j \tau^j(X, Y) E_j.$$

Observamos que as formas $\tau^j \equiv 0$ se a conexão ∇ é livre de torsão.

9. Continuando a questão anterior, seja ∇ a conexão de Levi-Civita de alguma métrica Riemanniana em M, e sejam ω_i^j as 1-formas da conexão ∇ com respeito a esse referencial. Define uma matriz de 2-formas Ω_i^j, chamadas as 2-formas de curvatura, por

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2} R_{kli}^j \varphi^k \wedge \varphi^l,$$

onde as funções $R_{kli}^j \in C^\infty(U)$ são os coeficientes da curvatura dadas por $R_{E_k E_l} E_i = \sum_j R_{kli}^j E_j$.

Demonstre que as formas Ω_i^j também são dadas por

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j.$$

Essa equação é conhecida como a segunda equação estrutural de Cartan.