1. Seja $f \in C^\infty(M)$ uma função suave em M. Definimos o *gradiente* de f como o campo vetorial $\nabla f = \mathrm{grad} f$ por
$$g(\nabla f(p), X) = Xf,$$
para todo $p \in M$ e todo $X \in T_pM$.

   (a) Demonstre que $\nabla f = (df)^\#$, usando a notação da primeira lista de exercícios para o isomorfismo entre T^* e T induzido pela metrica g.

   (b) Demonstre que se (x^i) são coordenadas num aberto U, então o gradiente de f tem expressão
$$\nabla f = \sum_i \left(\sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$
onde (g^{ij}) é a matriz inversa da matriz (g_{ij}).

   (c) Se $\nabla f(p) \neq 0$, pelo teorema de função implicita, existe um subconjunto aberto $U \ni p$ tal que $M_{f(p)} = U \cap \{x \in M;\ f(x) = f(p)\}$ é uma subvariedade suave de M de dimensão $n-1$. Demonstre que para todo $x \in M_{f(p)}$, o vetor $\nabla f(x)$ é ortogonal à subvariedade.

2. Para essa questão (e algumas outras nessa lista), é necessário um pouco de familiaridade com formas diferenciais. Particularmente, 1-formas, $(n-1)$-formas e n-formas numa variedade de dimensão n. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana orientada com forma de volume $\Omega = d\mu_M$, como vimos na última lista de exercícios. O operador de divergência $\mathrm{div} : \Gamma(TM) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ é definido por
$$d(i_X \Omega) = (\mathrm{div} X)\Omega,$$
onde i_X denota *contração* ou *multiplicação interior* por X : para cada k-forma ω, $i_X\omega$ é a $(k-1)$-forma definida por
$$i_X\omega(V_1, \ldots, V_{k-1}) = \omega(X, V_1, \ldots, V_{k-1}).$$

   (a) Seja M uma variedade riemanniana, orientada e compacta e com bordo ∂M. O bordo ∂M herda uma orientação canonicamente de uma orientação em M, como está descrito no final dessa questão.

   Prove o *teorema de divergência* para $X \in \Gamma(TM)$:
$$\int_M \mathrm{div} X d\mu_M = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle d\mu_{\partial M},$$
onde N é o normal em ∂M direcionado para o exterior e $d\mu_{\partial M}$ é a $(n-1)$-forma de volume em ∂M.

   (b) Demostre que o operador de divergência satisfaz a seguinte regra de produto para uma função suave $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$:
$$\mathrm{div}(uX) = u\mathrm{div} X + \langle \nabla u, X \rangle,$$
e deduza a fórmula de “integração por partes” :
$$\int_M \langle \nabla u, X \rangle d\mu_M = -\int_M u \mathrm{div} X d\mu_M + \int_{\partial M} u \langle X, N \rangle d\mu_{\partial M}.$$

(c) Demostre que em coordenadas (x^i) a divergência do campo vetorial $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ é dada por

$$\mathrm{div} X = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_i \partial_i \left(\sqrt{\det(g)} X^i \right).$$

Para essa questão, há algumas coisas para lembrar. Se M é uma variedade suave com bordo orientada, então o seu bordo ∂M naturalmente admite uma orientação determinada pelo campo vetorial ao longo de ∂M *saido* de M. Se M é Riemanniana, então ∂M admite uma métrica (obviamente), e a sua forma de volume $\Omega_{\partial M} = d\mu_{\partial M}$ é dada por $\Omega_{\partial M} = i^*_{\partial M}(i_N \Omega_M) = i_N \Omega_M$, onde $i_{\partial M} : \partial M \hookrightarrow M$ é a inclusão do bordo em M, e N é o campo únitario normal a ∂M, saindo de M, e $I_N \Omega_M$ é a contração de N na n-forma de volume Ω_M.

Para mexer com a operação de contração, pode observar várias coisas. Primeiro, se X é um campo vetorial, α é uma p-forma e β é uma q-forma, então $i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (i_X \beta)$. Por causa disso, se $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, então

$$i_X(dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} X^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n$$

onde $\widehat{dx^i}$ na expressão significa que aquele termo foi omitido do produto. Essa conta, ou alguma coisa parecida, é necessária para comparar $i_X \Omega_M|_{\partial M}$ e $\Omega_{\partial M}$. Você pode verificar essas propriedades de contração, ou somente utilizá-las para mostrar partes (a), (b) e (c).

3. Uma *curva divergente* em uma variedade Riemannian M é uma aplicação diferenciável $\alpha : [0, \infty) \to M$ tal que para todo compacto $K \subseteq M$ existe um $t_0 \in (0, \infty)$ com $\alpha(t) \notin K$ para $t > t_0$. (isto é, α sai de qualquer compacto de M). Define-se o comprimento de uma curva divergente por

$$\lim_{T \to \infty} \int_0^T |\alpha'(t)| dt.$$

(a) Demonstre que M é completa se e somente se o comprimento de qualquer curva divergente é infinito.

(b) Considere o semi-plano superior $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y > 0\}$ com a métrica $g = \frac{1}{y}(dx^2 + dy^2)$. Demostre que (M, g) não é completa, encontrando uma curva divergente com comprimento limitado.

4. Em questões anteriores (Q's 1 e 10 da Lista 4), já vimos os fatos seguintes :

(A) Para todo $p \in M$, existe $U \ni p$ e campos $e_i \in \Gamma(U, TM)$ tal que para todo $x \in U$, $\{e_1(x), \ldots, e_n(x)\}$ seja uma base ortonormal de $T_x M$;

(B) Para todo $p \in M$, existe $U \ni p$ e uma sistema de coordenadas (x^i) em U tal que $\{\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p)\}$ seja uma base ortonormal para $T_p M$, e tal que $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(p) = 0$.

Utilize a construção com a aplicação exponencial utilizada em parte (B), e transporte paralelo ao longo de curvas radiais saindo do ponto central p para demonstrar o seguinte refinamento de (A):

(C) Para todo $p \in M$, existe $U \ni p$ e campos vetoriais $e_i \in \Gamma(U, TM)$ $(i = 1, \ldots, n)$ tais que

i. para todo $x \in U$, $\{e_1(x), \ldots, e_n(x)\}$ é uma base ortonormal de $T_x M$,

ii. para todo $i = 1, \ldots, n$ e para todo $X \in T_p M$, $\nabla_X e_i(p) = 0$.

Em particular, utilize as propriedades de suave dependência de condições iniciais para soluções de EDOs para mostrar que os campos e_i obtidos são suaves.

5. Uma conexão ∇ em TM também determine uma maneira para diferenciar formas diferenciais, e outros tensores. Para $X \in \Gamma(TM)$ e $\alpha \in \mathcal{E}^1(M) = \Gamma(T^*M)$ defina $\nabla_X \alpha$ como a 1-forma definida por

$$(\nabla_X \alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y).$$

   (a) Demonstre que isso satisfaz $(\nabla_X \alpha)(fY) = f(\nabla_X \alpha)(Y)$, para toda função suave f em M.

   (b) Assim, temos uma forma bilinear em T_pM, por

$$(X, Y) \mapsto (\nabla_X \alpha)(Y) \in \mathbb{R}.$$

   Demonstre que a parte anti-simétrica da forma bilinear se relaciona com a derivada exterior de α, e com a torsão da conexão T^∇ por

$$(\nabla_X \alpha)(Y) - (\nabla_Y \alpha)(X) = (d\alpha)(X, Y) - \alpha(T^\nabla(X, Y)).$$

   (c) Seja ∇ a conexão de Levi-Civita na variedade Riemanniana (M, g). Seja $\{e_i\}$ o referencial local construido em parte (C) da última questão, e seja $\{\varepsilon^i\}$ o referencial de 1-formas duais, que em todo ponto $x \in U$ satisfaz $\varepsilon^i(x)(e_j(x)) = \delta^i_j$ (vide a primeira lista de exercícios). Demonstre que $d\varepsilon^i(p) = 0$ para cada i.

6. (a) Seja M uma variedade riemanniana de curvatura seccional constante κ. Demonstre que

$$\mathrm{Ric} = (n-1)\kappa g \quad \text{e} \quad \mathrm{scal} = n(n-1)\kappa.$$

   (b) Sejam g e $\bar{g}$ duas métricas riemannianas numa variedade suave M tal que $\bar{g} = \lambda g$ para uma constante $\lambda > 0$. Demostre que o tensor de curvatura, a curvatura seccional, o tensor de Ricci e a curvatura escalar das variedades riemannianas $(M, \bar{g})$ e (M, g) são relacionadas pelas equações :

$$\bar{R} = R, \quad \bar{K} = \lambda^{-1} K, \quad \overline{\mathrm{Ric}} = \mathrm{Ric} \text{ e } \overline{\mathrm{scal}} = \lambda^{-1}\mathrm{scal}.$$

7. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇. Seja $\varphi \in C^\infty(M)$ uma função suave em M e g_φ a métrica $g_\varphi = e^{2\varphi} g$. Isso é uma métrica por que o fator pelo que estamos multiplicando é estritamente positivo. Calcule, em termos de ∇ e outros dados relacionados à métrica g, a conexão de Levi-Civita de g_φ.

8. Seja (M, g) uma variedade riemanniana compacta, conexa e orientada, e com bordo ∂M. para $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$, o *Laplaciano* de u, denotado Δu, é definido por $\Delta u = \mathrm{div}(\nabla u)$. A função $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ é *harmônica* se $\Delta u = 0$.

   (a) Prove as identidades de Green :

$$\begin{aligned} \int_M u \Delta v \, d\mu_M + \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mu_M &= \int_{\partial M} u(Nv) d\mu_{\partial M}, \\ \int_M (u\Delta v - v\Delta u) d\mu_M &= \int_{\partial M} (uNv - vNu) d\mu_{\partial M}. \end{aligned}$$

   (b) Se $\partial M \neq \emptyset$, e u, v são funções harmônicas em M cujas restrições a ∂M se concordam, demostre que $u \equiv v$.

(c) Se $\partial M = \emptyset$, demostre que as únicas funções harmônicas em M são as constantes.

9. Agora estudaremos o Hessiano de uma função numa variedade Riemanniana. O Hessiano pode ser definido como uma transformação linear ou como uma forma bilinear com valores reais. Escolhemos o segundo.

   Seja $f \in C^\infty(M)$ uma função suave em M. O Hessiano de f é uma forma bilinear, definido em cada ponto $p \in M$ por

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}(f) : T_pM \times T_pM &\to \mathbb{R}, \\ (X, Y) &\mapsto g(\nabla_X(\nabla f), Y). \end{aligned}$$

   (i) Demonstre que $\mathrm{Hess}(f)$ é simétrica.

   (ii) Demonstre que o Hessiano de f é igual à derivada de Lie da métrica g, ao longo do campo gradiente ∇f :

$$\mathrm{Hess}(f) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla f} g.$$

   (iii) Dizemos que o Hessiano é positivo-definido em $p \in M$ se $\mathrm{Hess}(f)(X, X) \geq 0$ para todo $X \in T_pM$ com igualdade somente se $X = 0$. Demostre que se uma função f tem Hessiano positivo-definido em todo ponto $p \in M$, então f não pode admitir um valor máximo local. Demonstre que se M é compacta, então uma função f assim deve ser constante. (Dica: numa vizinhança de um máximo local p, escolhe um sistema de coordenadas cujos simbolos de Christoffel se anulam em p para reduzir esse problema para o princípio de máximo no espaço euclideano).

   Esse resultado não é a versão mais forte possível. Podemos definir *funções sub-harmônicas* numa variedade Riemanniana, e para essa classe de funções também podemos aplicar o princípio de máximo.

10. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciavel em M. Suponha que $|\nabla f| = 1$ em todo de M. Demostre que as curvas integrais de ∇f são geodésicas. Encontre um exemplo de uma função que satisfaz essa condição em $M = \mathbb{R}^3$.

    (Dica : utilize o fato do Hessiano de f ser simétrico).

    Observamos que a equação diferencial parcial (não-linear) $(\frac{\partial f}{\partial x^1})^2 + \cdots + (\frac{\partial f}{\partial x^n})^2 = 1$ é chamada a *Equação da Eikonal* (de grego εἰκών, para "imagem"). Essa equação é estudada na propagação de ondas e em óptica geométrica.

11. Seja (M, g) uma variedade riemanniana, e (x^i) qualquer sistéma de coordenadas em M.

    (a) Calcule os componentes da tensor de curvatura riemanniana em termos dos simbólos de Christoffel em coordnadas.

    (b) Suponha que (x^i) sejam coordenadas normais centradas em $p \in M$. (Isto é que $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ e $\partial_k g_{ij}(p) = 0$). Demostre que o seguinte é verdade em p :

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\partial_j\partial_l g_{ik} + \partial_i\partial_k g_{jl} - \partial_i\partial_l g_{jk} - \partial_j\partial_k g_{il}\right).$$