Essa lista de exercícios é absurdamente longa. Demais. Mas, cobre material interessante e importante sobre qual não tocaremos nas aulas. Falamos de duas coisas principalmente. O primeiro é o conceito de uma submersão Riemanniana, que é muito importante para muitas construções em geometria. Demonstramos vários resultados relativamente gerais sobre como geodésicas relacionam-se nos espaços M e N numa submersão. Interessante também seria como explicitamente relacionar as conexões e curvatura, mas não faremos isso. Os resultados sobre geodésicas vem principalmente por uma comparação de comprimento de curvas, sabendo que geodésicas minimizam comprimento de caminhos entre pontos próximos.

Segundo, usamos esses resultados para estudar a geometria Riemanniana do espaço projetivo complexo. Esse espaço é muito importante em muitas áreas de geometria algébrica, simplética, Riemanniana, em geometria complexa e na geometria de espaços simétricos. Nós usamos o conhecimento de geodésicas e campos de Jacobi na esféra, com métrica redonda para entender em detalhe $\mathbb{CP}^n$. Além disso, vemos como usar campos de Jacobi para calcular curvaturas.

Para entregar, não é necessário fazer todos os exercícios dessa lista, mas para quem quiser trabalhar em geometria, ou quiser usar geometria Riemanniana como parte de uma prova de qualificação, seria bom fazer essas questões eventualmente.

Quase todas as questões foram tiradas ou inventadas baseado na discussão no livro "Riemannian Geometry" por Gallot, Hulin e Lafontaine, que está postado na página da disciplina. Explicações melhores de geodésicas, campos de Jacobi, submersões Riemannianas e o espaço projetivo podem ser encontradas lá. Uma outra referência é do artigo "On symmetric spaces of rank one" por Isaac Chavel (publicado em Advances in Mathematics em 1970), mas isso estende e generaliza os resultados usando as técnicas de geodésicas e campos de Jacobi, mais de que explicar o conteúdo das questões.

1. O *espaço projetivo complexo*, denotado $\mathbb{CP}^n$, é definido como o conjunto de subespaços vetoriais complexos de dimensão um, ou linhas, de $\mathbb{C}^{n+1}$. Uma linha $l \in \mathbb{CP}^n$ é determinada por um ponto $\xi \in l$ diferente da origem. Qualquer outro ponto ξ' satisfies $\xi' = \lambda\xi$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Então, podemos identificar $\mathbb{CP}^n$ com o quociente $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ e considerar *coordenadas homogêneas*

$$l = [z_0 : z_1 : \ldots : z_n]$$

onde $\xi = (z_0, z_1, \ldots, z_n)$ é um ponto em l. Observamos que essa representação do ponto l não é única. Podemos representar l por um outro ponto $\lambda\xi \in l$, então temos

$$[z_0 : z_1 : \ldots : z_n] = [\lambda z_0 : \lambda z_1 : \ldots : \lambda z_n].$$

Seja $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{CP}^n$ a aplicação quociente $(z_0, \ldots, z_n) \mapsto [z_0 : \ldots : z_n]$. Seja $U_i = \{[z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \; ; \; z_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{CP}^n$ e seja Φ_i a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \Phi_i : U_i & \to & \mathbb{C}^n \\ [z_0 : z_1 : \ldots : z_n] & \mapsto & \left(\dfrac{z_0}{z_i}, \ldots, \dfrac{\widehat{z_i}}{z_i}, \ldots, \dfrac{z_n}{z_i}\right) \end{array}$$

onde o chapeu significa que nós tiramos o i-éssimo termo.

(a) Demostre que os conjuntos $\{U_i\}$, para $i = 0, \ldots, n$, formam uma cobertura para $\mathbb{CP}^n$.

(b) Demostre que para todo i, j, $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : \Phi_j(U_i \cap U_j) \to \Phi_i(U_i \cap U_j)$ é um difeomorphismo entre conjuntos abertos em $\mathbb{C}^n$ e então $\mathbb{CP}^n$ admite a estrutura de uma variedade suave de dimensão $2n$. Identifique explicitamente os conjuntos $\Phi_i(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{C}^n$. Também é necessário verificar que $\mathbb{CP}^n$ é Hausdorff e segundo-contável, mas pode omitir esses resultados.

(c) Demostre que $\mathbb{CP}^n$ é compacto. Demostre que o grupo $U(n+1)$ age transitivamente em $\mathbb{CP}^n$.

Observamos nessa questão que Φ_i^{-1} é dado por $\Phi_i^{-1}(w_1, \ldots, w_n) = [w_1 : \ldots : w_i : 1 : w_{i+1} : \ldots : w_n]$.

2. Essa questão é uma extensão de várias questões da última lista. Seja (M, g) uma variedade riemanniana compacta e orientada (sem fronteira). Um número real λ é um *auto-valor* do Laplaciano se existe uma função suave u em M, não identicamente zero, tal que $\Delta u = \lambda u$. Nesse caso, u é chamado uma *autofunção* correspondente a λ.

   (a) Demostre que 0 é um auto-valor de Δ, e que todos os outros auto-valores são stritamente negativos.

   (b) Se u e v são autofunções que correspondem a auto-valores diferentes, demostre que $\int_M uv d\mu_g = 0$.

3. (a) Demonstre que a aplicação $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ que envia um ponto $v \in S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ para a linha $l = [v] \in \mathbb{CP}^n$ é (i) suave, (ii) sobrejetiva e (iii) uma submersão.

   Lembramos que uma mapa suave $F : M \to N$ entre variedades diferenciaveis é uma submersão se para todo $x \in N$ e todo $p \in F^{-1}(x)$, a derivada $dF_p = F_{*,p} : T_pM \to T_xN$ é sobrejetiva. Lembramos que pelo teorema de função implicita, se F é uma submersão, então para todo $x \in N$, a pré-imagem $F^{-1}(x) = \{p \in M;\ F(p) = x\}$ é uma subvariedade suave de M. Se $\dim M = m$ e $\dim N = n$ então $\dim F^{-1}(x) = m - n$. Além disso, podemos identificar o espaço tangente da fibra com o núcleo da derivada de F : $T_pF^{-1}(x) = \ker(F_{*,p}) \subseteq T_pM$.

   (b) Com isso, podemos observar que se $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ é a mapa definida acima, então as fibras $\pi^{-1}(l)$ são variedades de dimensão um. Demonstre que o grupo $U(1) \cong S^1 = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}$ age em S^{2n+1} fielmente e tal que a órbitas sejam exatamente as fibras da projeção $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$.

   (c) Demonstre que essa ação é por isometrias de S^{2n+1}.

   Seja $F : M \to N$ uma submersão sobrejetiva. Então, para todo $p \in M$ com $F(p) = x$, $T_pF^{-1}(x) \subseteq T_pM$ é um subespaço vetorial de dimensão $m - n$. Suponha que g é uma métrica Riemanniana em M e h é uma métrica em N. Então, podemos considerar o complemento ortogonal do espaço tangente da fibra $(T_pF^{-1}(x))^\perp \subseteq T_pM$. Denotaremos esse espaço por H_p (por espaço *horizontal*).

   (d) Demonstre que para todo $p \in F^{-1}(x)$, $F_* : H_p \to T_xN$ é um isomorfismo.

   Dizemos que $F : (M, g) \to (N, h)$ é uma **submersão Riemanniana** se para todo $x \in N$ e todo $p \in F^{-1}(x)$, $F_{*,p} : H_p \to T_xN$ é uma isometria. Isso é dizer, se para todo $v \in T_pM$ tal que $v \perp \ker(F_{*,p})$ nós temos

$$\|v\|_g = \|F_{*,p}v\|_h.$$

4. Demonstre, usando as várias afirmações da última questão, que existe uma (única) métrica Riemanniana g_{FS} em $\mathbb{CP}^n$ tal que $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ seja uma submersão Riemanniana. Nós chamamos essa métrica a *métrica de Fubini-Study*.

5. Lembramos a definição da funçõ de distânça numa variedade riemanniana conexa. O comprimento de uma curva suave $c : [0, 1] \to M$ é do integral

$$l(c) = \int_0^1 |c'(t)| dt.$$

Para $x, y \in M$, definimos a distânça entre x e y como

$$\begin{aligned} d &: M \times M \to [0, \infty) \\ d(x,y) &= \inf\{l(c)\ ;\ c \text{ uma curva com } c(0) = x, c(1) = y\}. \end{aligned}$$

Sejam (M, g) e (N, h) variedades riemannianas e $F : M \to N$ uma submersão Riemanniana. Demostre que $d(F(p), F(q) \leq d(p, q)$ para todo $p, q \in M$.

6. Seja (X, g_X) uma variedade Riemanniana e $M \subseteq X$ uma subvariedade suave. Em todo ponto $p \in M$, podemos definir a projeção ortogonal $\pi_p^T : T_pX \to T_pM$ sobre o subespaço $T_pM \subseteq T_pX$. A métrica g_X restringe-se a uma métrica g_M em M. Ou, podemos pensar nisso como $g_M = g_X|_{TM}$, ou podemos pensar em g_M como $g_M = i^* g_X$, onde $i : M \to X$ é a inclusão de M em X.

   (a) Demonstre que a conexão de Levi-Civita ∇^M da métrica g_M é dada por

   $$\nabla_Y^M Z = \pi^T(\nabla_Y^X \tilde{Z}),$$

   onde ∇^X é a conexão de Levi-Civita de g_X em X, e onde $\tilde{Z}$ é uma extensão de $Z \in \Gamma(TM)$ a um campo vetorial $\tilde{Z} \in \Gamma(TX)$.

   (b) Consideramos a esfera unitária $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ com métrica redonda $g_S = i^* g_{euc}$. Seja $p \in S^n$ e $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\langle p, v \rangle = 0$ e $\|v\| = 1$. Demonstre que a curva

   $$\gamma(t) = \cos(t)\, p + \operatorname{sen}(t)\, v$$

   é uma geodésica em S^n com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v \in T_pS^n = p^\perp$.

7-10 Vamos estudar geodésicas em submersões riemannianas. Seja $F : M \to N$ uma submersão Riemanniana. Vamos demonstrar o seguinte :

   (a) Sejam $p \in M$ e $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$ uma geodésica com $c(0) = F(p)$. Demonstre que existe um único levantamento horizontal $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, com $\gamma(0) = p$, tal que $c = \pi \circ \gamma$ e tal que γ seja uma geodésica.

   (b) Seja γ uma geodésica em M. Se o vetor de velocidade inicial $\gamma'(0)$ é horizontal, então $\gamma'(t)$ é horizontal para todo t, e a curva $c = F \circ \gamma$ é uma geodésica em N, do mesmo comprimento a γ.

7. Seja $F : M \to N$ uma submersão riemanniana. e $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$ uma geodésica com $c(0) = x = F(p)$ tal que $V = c((-\varepsilon, \varepsilon))$ seja uma subvariedade mergulhada de N de codimensão $n - 1$. Demonstre que $\overline{V} = F^{-1}(V)$ é uma subvariedade mergulhada de M de codimensão $n - 1$. Vamos supor que a curva c fica dentro da imagem de F.

8. Seja c uma geodésica em N, como na última questão. Para todo $p \in \overline{V}$, $F_* : H_p \to T_{F(p)}N$ é um isomorfismo. Podemos definir um campo vetorial X em $\overline{V}$ pelo seguinte : para todo $p \in \overline{V}$ com $F(p) = c(t)$, seja $X_p = F_*^{-1}(c'(t)) \in H_p$. Isto é, X_p é o único vetor horizontal em p que projeta sobre $c'(t)$. Para $p \in \overline{V}$ com $F(p) = x$ o fluxo do campo X defina uma curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \overline{V} \subseteq M$ com $\gamma(0) = p$.

   (a) Demonstre que a curva γ (em todo subintervalo compacto de $(-\varepsilon, \varepsilon)$) tem o mesmo comprimento que a curva c.

   (b) Demonstre que a curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ deve ser uma geodésica. (Demostre isso usando o fato que uma curva minimizante deve ser uma geodésica, junto com Questão 5 acima).

9. Seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma geodésica em M. Se o vetor de velocidade inicial $\gamma'(0)$ é horizontal, demostre que $\gamma'(t)$ é horizontal para todo t, e que a curva $c = F \circ \gamma$ é uma geodésica em N, do mesmo comprimento a γ.

   [Dica : considere os dados iniciais $(x = F(p), v = F_*(\gamma'(0))$ e considere a geodésica em N com esse ponto e velocidade inicial. Demostre que γ deve ser o levantamento horizontal para essa curva, como foi construido no último exercício.]

10. (a) Demonstre que se (M, g) é completa e $F : M \to N$ é uma submersão Riemanniana, então (N, h) também deve ser completa.

    (b) Dê um exemplo de uma submersão riemanniana $F : M \to N$ tal que (N, h) seja completa mas (M, g) seja incompleta.

11. Essa questão tem nada a ver com as anteriores sobre submersões. Mesmo assim, pode ser interessante. Seja M uma variedade Riemanniana orientada. Seja $X \in \Gamma(TM)$ um campo vetorial suave em M. Para todo $x \in M$, podemos considerar a mapa linear

$$\begin{aligned} \nabla_\bullet X : T_xM &\to T_xM, \\ Y &\mapsto \nabla_Y X(x) \end{aligned}$$

(A) Demonstre que a divergência div$X$ do campo $X = \sum_i X^i \partial_i$ é a função dada pelo traço

$$\mathrm{div}X = \mathrm{tr}\nabla_\bullet X = \sum_i g(\nabla_{e_i} X, e_i) = \sum_i \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_j X^j \Gamma^i_{ji} \right)$$

onde $\{e_i\}$ é um referêncial ortogonal (qualquer) definido numa vizinhança de x, e onde (x^i) é um sistema de coordenadas em volta de x.

Para fazer isso, nós quebramos a conta em vários pedaços. Essas identidades são para ser verificada num ponto specífico $p \in M$. Por isso, primeiro nós lembramos que o traço de um endomorfismo de um espaço vetorial de dimensão finita $A : V \to V$ é tr$A = \sum A^i_i$ quando A é representado como uma matriz. Essa representação é dada por uma escolha de uma base de V mas, importantemente, o valor independe da escolha da base (pela identidade $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$).

(a) Primeiro, demonstre que o traço do endomorfismo $\nabla_\bullet X$ é igual a $\sum_i g(\nabla_{e_i} X, e_i)$.

(b) Agora consideramos a divergência do campo vetorial X. Seja Ω a forma de volume de M. Podemos encontrar um referencial ortogonal orientado $\{e_i\}$ numa vizinhança U, com coreferencial dual de 1-formas $\{\varepsilon^i\}$. A forma de volume pode então ser escrita como

$$\Omega = \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n.$$

Logo, a contração $i_X\Omega$ pode então ser escrita simplesmente. Se supomos que o referencial $\{e_i\}$ satisfaz $\nabla e_i(p) = 0$, então as formas ε^i satisfazem $d\varepsilon^i(p) = 0$ (Nós vimos que sempre existe um referencial com essa propriedade na última lista de exercícios). Utilize isso para simplificar a expressão de $d(i_X\Omega)$.

(c) Finalmente, o campo X pode ser escrito em U como $X = \sum_i X^i e_i$, então no ponto $p \in U$, temos uma expressão simples para $\nabla_Y X$, para qualquer vetor Y.

(d) Para a última igualdade para ser demonstrada, lembramos que o traço de $\nabla_\bullet X$ independe da base que temos para T_pM. Nesse caso, escreve $\nabla_\bullet X$ para a base $\{\partial_i\}$.

(B) Demonstre que $\Delta f = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}(f))$.

12. Agora voltamos para estudar o espaço projetivo com a métrica de Fubini-Study. Vamos entender em detalhe as geodésicas nesse espaço. As fibras da projeção $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ são dadas por

$$\pi^{-1}([z^0 : z^1 : \cdots : z^n]) = \{(e^{it}z^0, e^{it}z^1, \ldots, e^{it}z^n) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$$

então, em $p = (z^0, \ldots, z^n) \in \pi^{-1}([z])$, o vetor $T_p = ip = (iz^0, \ldots, iz^n)$ gera o espaço tangente a fibra (que podemos chamar o espaço vertical). Lembramos que, se identificamos $\mathbb{R}^{2n+2}$ com $\mathbb{C}^{n+1}$, o produto interior euclideano em $\mathbb{R}^{2n+2}$ é dado por $\langle v, w\rangle = \mathrm{Re}(v^T \bar{w})$, para $v, w \in \mathbb{C}^{n+1}$.

(a) Seja $v \in \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $v \perp p = (z^0, \ldots, z^n)$, $v \perp ip$ e $\|v\| = 1$. Então, seguindo Questão 6(b), demonstre que

$$\gamma(t) = \cos(t)\, p + \mathrm{sen}(t)\, v$$

é uma geodésica horizontal em S^{2n+1} no sentido que (1) é uma geodésica, e (2) $\gamma'(t) \in H_{\gamma(t)}$ para todo t. Isso implica, pelos resultados das questões anteriores, que $c(t) = \pi(\gamma(t))$ é a geodésica em $\mathbb{CP}^n$ com $c(0) = [z]$ e $c'(0) = \pi_*(v)$.

(b) Demonstre que $c(t_0) = c(t_1)$ se e somente se $t_1 = t_0 + k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$. Isso é dizer, toda geodésica c em $\mathbb{CP}^n$ é uma curva fechada de comprimento π. Observamos que todos os círculos grandes em S^{2n+1} são de comprimento 2π.

(c) Sejam $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^{n+1}$ tais que $v_j \perp p$, $v_j \perp ip$ e $\|v_j\| = 1$. Consideramos as geodésicas em $\mathbb{CP}^n$, $c_j(t) = \pi(\gamma_j(t))$ onde

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \cos(t)\, p + \mathrm{sen}(t)\, v_1, \\ \gamma_2(t) &= \cos(t)\, p + \mathrm{sen}(t)\, v_2 \end{aligned}$$

são geodésicas horizontais em S^{2n+1}. Queremos entender como essa geodésicas se intersectam em $\mathbb{CP}^n$. Nós supomos que v_1, v_2 são linearmente independente sobre $\mathbb{R}$.

(i) Demonstre que se v_1 e v_2 são linearmente independente sobre $\mathbb{C}$, então as geodésicas c_1, c_2 intersectam-se somente no ponto inicial comum $x = [p] \in \mathbb{CP}^n$.

(ii) Se os vetores são também linearmente dependente sobre $\mathbb{C}$, e $v_1 = e^{i\theta} v_2$ para algum $\theta \in \mathbb{R}$, então demonstre que as geodésicas também intersectam-se ($c_1(t_1) = c_2(t_2)$) para $t_1 = t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Em conclusão : Todas as geodésicas em $\mathbb{CP}^n$ são fechadas e de comprimento π. Se duas geodésicas c_1 e c_2, ambas começando em $x \in \mathbb{CP}^n$ e da forma $c_j(t) = \pi(\gamma_j(t))$ onde $\gamma_j(0) = p \in S^{2n+1}$ e $\gamma_j'(0) = v_j$ para v_j linearmente independente sobre $\mathbb{C}$, então as geodésicas se encontram somente no ponto $x = [p]$. Se os vetores v_j são dependente sobre $\mathbb{C}$, então as geodésicas em $\mathbb{CP}^n$ nas direções $\pi_*(v_j)$ se intersectam em $\mathbb{CP}^n$ depois de tempo $t = \pi/2$.

Isso pode ser interpretado em termos da aplicação exponencial no ponto $x = [p] \in \mathbb{CP}^n$:

$$\exp_x : T_x\mathbb{CP}^n \ (\cong H_p) \longrightarrow \mathbb{CP}^n.$$

Então $\exp_x$ envia a esfera em $T_x\mathbb{CP}^n$ de raio π identicamente ao ponto x. Na esfera tangente $S(x, \frac{\pi}{2}) \cong S^{2n-1}$ de raio $\frac{\pi}{2}$ em x, a aplicação exponencial contrai todos os vetores $e^{i\theta}.v$ (para v fixado de comprimento $\pi/2$, e para todo $\theta \in \mathbb{R}$) para o mesmo ponto $\exp_x(v) \in \mathbb{CP}^n$. Pode ser visto (pelo menos pelo Chavel (veja o artigo *On Symmetric Spaces of Rank One*, no Advances in Mathematics (1970), também postado na página da turma)) que a imagem de $\exp_x$ em S^{2n-1} em $\mathbb{CP}^n$ é a subvariedade $\mathbb{CP}^{n-1}$ e que $\exp_x : S(x, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{CP}^{n-1}$ pode ser identificado com a aplicação de Hopf em uma dimensão menor do que consideramos em Questão 3, etc.

13. Nessa questão, estudaremos campos de Jacobi em $\mathbb{CP}^n$, e utilizaremos eles para calcular a curvatura do espaço.

    (a) Considere a geodésica $\gamma(t) = \cos(t)\, p + \operatorname{sen}(t)\, v$ em S^{2n+1} como acima, e seja $w \in \mathbb{C}^{n+1}$ um vetor unitário ortogonal a p, ip e v. Demonstre que $w \in T_{\gamma(t)} S^{2n+1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e que o campo vetorial constante $\hat{W}(t) = w$ é paralelo ao longo de γ.

    (b) Considere a superficie parametrizada em S^{2n+1}

$$\hat{f}(t,s) = \cos(t)\, p + \operatorname{sen}(t)\,(\cos(s)\, v + \operatorname{sen}(s)\, w)$$

    para $t \in [0,\pi]$ e $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Demonstre que para todo $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, $t \mapsto \hat{f}(t,s)$ é uma geodésica horizontal em S^{2n+1} com campo de variação $\hat{J}(t) = \operatorname{sen}(t)\, \hat{W}(t)$. Nós vimos na aula que isso implica que $\hat{J}$ é um campo de Jacobi em γ.

Observamos disso que $c(t) = \pi(\gamma(t))$ é uma geodésica em $\mathbb{CP}^n$, que $f(t,s) = \pi(\hat{f}(t,s))$ é uma variação de c por geodésicas em $\mathbb{CP}^n$ que saiam de x, e que o campo de variação de f é $\frac{\partial f}{\partial s}(t,0) = \pi_{*,\gamma(t)}(\hat{J}(t)) = \operatorname{sen}(t)\pi_{*,\gamma(t)}(\hat{W}(t))$, que é um campo de Jacobi em c.

    (c) Já vimos que o campo constante $\hat{W}(t) = w$ é paralelo ao longo de γ. Demonstre que $\hat{W}(t)$ é horizontal somente se o vetor w também é ortogonal a iv, além de ser ortogonal a p, ip e v.

Queremos usar a expressão $J(t) = \pi_{*,\gamma(t)}(\hat{J}(t))$ para o campo de Jacobi em $\mathbb{CP}^n$ para calcular a curvatura de $\mathbb{CP}^n$. Pelo último ítem, é necessário separar a conta em dois casos. Primeiro, suporemos que $w \perp iv$. Depois, suporemos que $w = iv$.

Supomos que $w \perp iv$, e logo $\hat{W}$ é paralelo e horizontal. Afirmamos (para a demonstração, veja a [GHL], Thm. 3.55), que o campo $W(t) = \pi_{*,\gamma(t)}(\hat{W}(t))$ é paralelo ao longo da curva c em $\mathbb{CP}^n$.

    (d) Demonstre, usando a equação de Jacobi, que a curvatura seccional de $\mathbb{CP}^n$ em x no 2-plano gerado em x pelos vetores $V = \pi_{*,p}(v)$ e $U = \pi_{*,p}(w)$ é igual a 1.

Agora, nós não podemos mais evitar de falar da estrutura complexa em $\mathbb{CP}^n$. Para $p \in S^{2n+1}$, a derivada da projeção determine um isomorfismo entre o espaço horizontal H_p e $T_{[p]}\mathbb{CP}^n$. Via esse isomorfismo, multiplicação em H_p por i determine um endomorfismo $I_{[p]} : T_p\mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^n$ para todo ponto $x = [p]$ em $\mathbb{CP}^n$ que satisfaz $I_{[p]}^2 = -\mathrm{Id}$. Importantemente, essa mapa independe do ponto $p \in \pi^{-1}(x)$ que pegamos para definir I_x (Demonstre isso!). Não estudaremos essa mapa em detalhe, mas a propriedade importante que utilizaremos é que se ∇ é a conexão de Levi-Civita para a métrica de Fubini-Study, então para quaisquer campos vetoriais X e Y em $\mathbb{CP}^n$, $\nabla_X(IY) = I\nabla_X Y$. Essa identidade vale para qualquer métrica de Kähler.

No último ítem, calculamos a curvatura em $\mathbb{CP}^n$ num plano $\sigma = V \wedge U$ em que U e V são unitários e ortogonais e também, U é ortogonal a IV. Isso é dizer, $w \perp iv$. Agora consideramos $w = iv$.

Em S^{2n+1}, temos o campo de Jacobi $\hat{J}(t) = \operatorname{sen}(t)\hat{W}(t)$ onde $\hat{W}(t) = w = iv$ é um campo vetorial constante, paralelo e não-horizontal. A projeção $\pi_*(\hat{W})$ é igual a $\pi_*(\hat{W}^H)$, onde $\hat{W}^H$ é o componente horizontal de $\hat{W}$.

    (e) Na decomposição

$$T_{\gamma(t)} S^{2n+1} = \langle T \rangle \oplus H_{\gamma(t)}$$

    demonstre que $\hat{W}^H(t) = i\cos(t)\gamma'(t)$. [Dica: a projeção para H é $\hat{W}^H = \hat{W} - \langle \hat{W}, T \rangle T$.]

(f) Suponha que $w = iv$ e sejam $c(t) = \pi(\gamma(t))$ a geodésica em $\mathbb{CP}^n$ e $W(t) = \pi_{*,\gamma(t)}(\hat{W}(t))$ o campo ao longo de c descrita no último ítem. Demonstre que W é paralelo ao longo de c. [Dica: use a identidade que vale para toda métrica Kähleriana.]

(g) Suponha que $w = iv$ e sejam $c(t) = \pi(\gamma(t))$ a geodésica em $\mathbb{CP}^n$ e $J(t) = \pi_*(\hat{J}(t))$ o campo de Jacobi induzido ao longo de c. Demonstre que J é da forma $J(t) = \operatorname{sen}(t)\cos(t)U(t)$, onde U é paralelo ao longo de c.

(h) Utilize a equação de Jacobi para concluir que $R_{c',U}c' = 4U$, e logo concluimos que, em $x = c(0)$, a curvatura seccional da métrica de Fubini-Study no plano σ gerado por $V = c'(0)$ e $U = Ic'(0)$ é igual a 4.

(i) Terminamos essa questão finalmente. Seja $V = c'(0)$ e W um vetor unitário ortogonal a V.

(1) Demonstre que $W = \operatorname{sen}(\alpha)\, W_0 + \cos(\alpha)\, IV$, onde W_0 é ortogonal a ambos V e IV e de comprimento 1. Interprete o ângulo α.

(2) Demonstre que a curvatura seccional no plano $\sigma = V \wedge W$ é

$$K(\sigma) = 1 + 3\cos^2(\alpha).$$

14. Em $\mathbb{CP}^n$, temos coordenadas que daremos pela aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n} &\to U \subseteq \mathbb{CP}^n \\ \varphi(z) = \varphi(x^1 + iy^1, \ldots, x + iy^n) &= [1 : x^1 + iy^n : \cdots : x + iy^n]. \end{aligned}$$

Demonstre que a métrica de Fubini-Study em $\mathbb{CP}^n$ é dada com coeficientes

$$\begin{aligned} g_{FS}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) = g_{FS}\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta}\right) &= \frac{1}{(1+|z|^2)^2}\left((1+|z|^2)\delta_{\alpha\beta} - (x^\alpha x^\beta + y^\alpha y^\beta)\right), \\ g_{FS}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta}\right) &= \frac{-1}{(1+|z|^2)^2}\left(x^\alpha y^\beta - y^\alpha x^\beta\right). \end{aligned}$$

15. Seja V um espaço vetorial real de dimensão $2n$ munido com um produto interior $g(\cdot,\cdot)$ e um endomorfismo $J : V \to V$ que satisfaz $J^2 = -\mathrm{Id}$ e $g(JX, JY) = g(X, Y)$ para todo $X, Y \in V$. Considere o tensor

$$\begin{aligned} R^0 &: V \times V \times V \longrightarrow V, \\ R^0_{XY}Z &= g(X,Z)Y - g(Y,Z)X - g(X,JZ)JY + g(Y,JZ)JX - 2g(X,JY)JZ. \end{aligned}$$

(a) Demonstre que R^0 satisfaz todas as simetrias de um tensor de curvatura (anti-simetria, identidade de Bianchi, etc).

(b) Demonstre que se X e Y são ortogonais e unitários, e se $Y \perp JX$ então $g(R^0_{XY}X, Y) = 1$, e se $Y = JX$ então $g(R^0_{XY}X, Y) = 4$. Relacione esse tensor com o tensor de curvatura da métrica de Fubini-Study.