Instituto de Matemática - IM-UFRJ
Geometria Complexa
Lista 1 de exercícios, para entregar na aula de 18/12/2020

1. Seja $\psi = \sum_{j=1}^n \psi_j(z) d\bar{z}^j$ uma $(0,1)$-forma $\bar{\partial}$-fechada em $\mathbb{C}^n$ com suporte compacto. Para cada $1 \leq j \leq n$ defina

$$u_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_j(z_1, \ldots z_{j-1}, w, z_{j+1}, \ldots, z_n)}{w - z_j} dw \wedge d\bar{w}$$

Demonstre que $u_j = u_k$ para todo $1 \leq j, k \leq n$, que u_j tem suporte compacto, e que $\bar{\partial} u_j = \psi$.

2. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ um domínio, e $K \subseteq \Omega$ um conjunto compacto tal que $\Omega \setminus K$ seja conexo. Se $n > 1$ e f é uma função holomorfa em $\Omega \setminus K$, demonstre que existe uma função holomorfa F em Ω tal que $G_{\Omega \setminus K} = f$.

3. Demostre que se $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ e $|f(z)|^2 \leq C(1 + |z|^2)^N$ então f é um polinômio em z, de grau menor ou igual a N. O que é o nome desse teorema para o caso $N = 0$?

4. Demostre que se $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ e $\int_{\mathbb{C}} |f|^2 dA < \infty$ então $f \equiv 0$.

5. Considere a função $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(z_1, z_2) = z_1^3 z_2 + z_1 z_2 + z_1^2 z_2^2 + z_2^2 + z_1 z_2^3$$

e encontre uma decomposição explicita $f = h \cdot W$ onde $h(0,0) \neq 0$ e W é um polinómio de Weierstrass. Demonstre que f satisfaz as hipóteses do teorema de preparação de Weierstrass para uma variável mas não a outra.

6. Seja R um anel comutativo com identidade. Demonstre que R é um domínio de fatorização única se e somente se são satisfeitas as condições seguintes :

   (a) Para todo elemento $f \in R$ irredutível com f um divisor de gh, então f é um divisor de ou g ou h.

   (b) Se numa sequência de elementos $f_1, f_2, \ldots$em R, com cada um um divisor do anterior, então para todo k suficientemente grande, f_{k+1} difere de f_k apenas por um elemento invertível de R.

7. Encontre um difeomorfismo explicito entre $\mathbb{CP}^1$ e S^2.

8. Demostre que o conjunto $\{[x; y; z] \in \mathbb{CP}^2 \; ; \; zx^2 = y(y - z)(y - 2z)\}$ é uma superfície de Riemann.

9. (a) Utilize o Lema de Schwarz para determinar todos os automorfismos do disco unitário $D(0,1)$.

   (b) Determine um isomorfismo entre $D(0,1)$ e $H = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

   (c) Mostra que uma função inteira f tal que $\mathrm{Im}(f) > 0$ deve ser constante.

10. Seja V um espaço vetorial real e $J : V \to V$ um mapa linear que satisfaz $J^2 = -\mathrm{Id}$. Definimos o *complexificação* de V como $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Um elemento $w \in V_{\mathbb{C}}$ pode ser unicamente escrito como $w = u + iv$, identificando $u \sim u \otimes 1$ e $iv \sim v \otimes i$, para $u, v \in V$. $V_{\mathbb{C}}$ é, obviamente, um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Extendemos J a $V_{\mathbb{C}}$ por $J(u + iv) = Ju + iJv$.

    (a) Demonstre que $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$.

    Definimos subespaços de $V_{\mathbb{C}}$

$$\begin{aligned} V^{1,0} &= \{w \in V_{\mathbb{C}} \; ; \; Jw = iw\}, \\ V^{0,1} &= \{w \in V_{\mathbb{C}} \; ; \; Jw = -iw\}. \end{aligned}$$

(b) Demonstre que $V^{1,0}$ e $V^{0,1}$ são subespaços complexos de $V_{\mathbb{C}}$, que tem a mesma dimensão sobre $\mathbb{C}$, que $V^{1,0} \cap V^{0,1} = \{0\}$ e que $V_{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$. Em particular, isso implica que $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$ é par.

(c) Demonstre que existe uma base para V da forma $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, Jv_1, \ldots, Jv_n\}$.

(d) Para $w \in V_{\mathbb{C}}$, denote por $w^{1,0}$ e $w^{0,1}$ os componentes de w na decomposição $V_{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$. Demonstre que $w^{1,0} = 1/2(w - iJw)$ e $w^{0,1} = 1/2(w + iJw)$.

(e) Definimos uma aplicação linear real $\bar{\cdot} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, chamada *conjugação*, por $\bar{w} = \overline{u + iv} = u - iv$, para $u, v \in V$. Demonstre que conjugação troca $V^{1,0}$ e $V^{0,1}$ e $(\bar{\cdot})^2 = \mathrm{Id}$.

Consideramos o espaço vetorial complexo $\Lambda^1_{\mathbb{C}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$. Definimos os subespaços

$$\begin{aligned} \Lambda^{1,0} &= \{\alpha \in \Lambda^1_{\mathbb{C}} \ ; \ \alpha(w) = 0, \ \forall w \in V^{0,1}\}, \\ \Lambda^{0,1} &= \{\alpha \in \Lambda^1_{\mathbb{C}} \ ; \ \alpha(w) = 0, \ \forall w \in V^{1,0}\} \end{aligned}$$

(f) Demonstre que temos decomposição em soma direita $\Lambda^1_{\mathbb{C}} = \Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1}$.

(g) Demonstre que $\alpha \in \Lambda^{1,0}$ se e somente se para todo $v \in V$, $\alpha(Jv) = i\alpha(v)$.

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. Nós não supomos que M é compacta ou orientável. Para $k \geq 0$, seja $\mathcal{E}^k(M)$ o espaço de k-formas suaves reais em M. Temos a operação de diferenciação exterior

$$d : \mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^{k+1}(M)$$

que satisfaz $d^2 = 0$. Para entender quando uma forma $\alpha \in \mathcal{E}^k(M)$ tem a forma $\alpha = d\beta$, para $\beta \in \mathcal{E}^{k-1}(M)$, então uma condição necessária é que $d\alpha = 0$. Definimos o grupo de cohomologia de De Rham como o quociente de espaços vetoriais reais

$$H^k_{dR}(M) = \frac{\ker\{d : \mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^{k+1}(M)\}}{\mathrm{im}\{d : \mathcal{E}^{k-1}(M) \to \mathcal{E}^k(M)\}}.$$

Muitas vezes vamos deixar o dR da notação aqui. Podemos igualmente considerar formas com valores em $\mathbb{C}$, mas isso muda pouco porque o operador d preserva a decomposição de uma forma complexa $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ em partes reais e imaginárias.

Também, podemos considerar $\mathcal{D}^k(M) = \mathcal{E}^k_c(M)$ como o espaço de k-formas suaves (reais ou complexas) em M com suporte compacto. De novo, temos $d\mathcal{D}^k(M) \subseteq \ker\{d : \mathcal{D}^k(M) \to \mathcal{D}^{k+1}(M)\}$ e definimos o grupo de cohomologia de De Rham de suporte compacto por

$$H^k_c(M) = \frac{\ker\{d : \mathcal{D}^k(M) \to \mathcal{D}^{k+1}(M)\}}{d\mathcal{D}^{k-1}(M)}.$$

Observamos que se M é uma variedade compacta, então $H^k(M) = H^k_c(M)$.

11. (a) Sejam M e N variedades diferenciáveis e $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Demonstre que o *pull-back* de k-formas $F^* : \mathcal{E}^k(N) \to \mathcal{E}^k(M)$ induz uma aplicação linear $F^* : H^k(N) \to H^k(M)$.

(b) Seja $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável *própria*. Isso é dizer que para qualquer conjunto compacto $K \subseteq N$, a pré-imagem $F^{-1}(K) \subseteq M$ também é compacto. Demonstre para $\alpha \in \mathcal{D}^k(N)$, $F^*\alpha \in \mathcal{D}^k(M)$.

(c) Demonstre que uma aplicação própria F induz um morfismo

$$F^* : H_c^k(N) \longrightarrow H_c^k(M).$$

(d) Demonstre que se $F : X \to Y$ e $G : Y \to Z$ são aplicações diferenciáveis, então

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^* : H^k(Z) \longrightarrow H^k(X),$$

e em particular, se F é um difeomorfismo, então F^* é um isomorfismo.