Instituto de Matemática - IM-UFRJ
Geometria Complexa
Lista 2 de exercícios, para entregar na aula de 13/01/2021

---

1. Denote por $\Gamma_\tau \subseteq \mathbb{C}$ o subgrupo aditivo $\Gamma_\tau = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ para $\tau \in \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Demostre que se $\tau' = A(\tau)$ para algum $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ então os toros quocientes $T_{\tau'} = \mathbb{C}/\Gamma_{\tau'}$ e $T_\tau = \mathbb{C}/\Gamma_\tau$ são biholomorfos. Toros complexos de dimensão um são também chamadas *curvas elípticas* para minimizar a ambiguidade com toros complexos de dimensão mais alta da forma $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^{2n}$.

2. Consideraremos uma variedade de Hopf unidimensional. $\mathbb{Z}$ age em $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ por $(k,z) \mapsto \lambda^k z$ por $\lambda \in \mathbb{C}$ fixo com $|\lambda| \neq 1$.

   (a) Demonstre que a ação de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{C}^*$ é *propriamente descontínua* e sem pontos fixos. Isso implica que o quociente S_λ, com topologia quociente, canonicamente admite a estrutura de uma variedade complexa. Encontre um sistema de cartas para S_λ

   (b) Demonstre que S_λ é difeomorfa a $S^1 \times S^1$. Determine explicitamente um biholomorfismo entre S_λ e um toro quociente T_τ, para algum $\tau \in \{z\ ;\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

3. (a) Sejam V um espaço vetorial real de dimensão $2n$ e $V_\mathbb{C} = V \otimes \mathbb{C}$. Demonstre que a imposição de um aplicação $J : V \to V$ tal que $J^2 = -\mathrm{Id}$ é equivalente a um subespaço complexo $V' \subseteq V_\mathbb{C}$ tal que $V' \cap \overline{V'} = \{0\}$ e $V' \oplus \overline{V'} = V_\mathbb{C}$.

   (b) Seja $\mathcal{J}_V \subseteq \mathrm{End}(V)$ o conjunto de aplicações lineares J com $J^2 = -\mathrm{Id}$. Demonstre que o grupo $\mathrm{GL}(V,\mathbb{R})$ age transitivamente em $\mathcal{J}_V$. Dado $J \in \mathcal{J}_V$, determine o subgrupo de isotropia de J.

4. Seja V um espaço vetorial real de dimensão $2n$ e J um mapa linear em V com $J^2 = -\mathrm{Id}$. Consideramos k-covetores complexas em V :

$$\Lambda^k_\mathbb{C} = \Lambda^k(\Lambda^1_\mathbb{C}) = \left(\Lambda^k V^*\right) \otimes \mathbb{C}.$$

   Observamos que $\Lambda^k_\mathbb{C}$ é um espaço vetorial complexo de dimensão $2n$. Como na última questão, um elemento de $\Lambda^k_\mathbb{C}$ tem a forma $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$, para $\Phi_1, \Phi_2 \in \Lambda^k V^*$. Queremos entender como $\Lambda^k_\mathbb{C}$ decompõe-se em (p,q)-tipo.

   Para cada $p \in \{0,\dots,k\}$ consideramos a p-éssima poténcia exterior de $\Lambda^{1,0}$, $\Lambda^p_\mathbb{C}(\Lambda^{1,0})$. Se $\frac{1}{2}\dim_\mathbb{R} V = \dim_\mathbb{C} V^{1,0} = \dim_\mathbb{C} \Lambda^{1,0} = n$, então $\dim_\mathbb{C} \Lambda^p_\mathbb{C}(\Lambda^{1,0}) = \binom{n}{p}$. Similarmente, consideramos $\Lambda^q_\mathbb{C}(\Lambda^{0,1})$, que tem dimensão $\binom{n}{q}$.

   Podemos definir um mapa no produto tensorial (μ para multiplicação)

$$\begin{aligned} \mu_p : \Lambda^p_\mathbb{C}(\Lambda^{1,0}) \otimes \Lambda^{k-p}_\mathbb{C}(\Lambda^{0,1}) &\longrightarrow \Lambda^k_\mathbb{C}, \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto \alpha \wedge \beta. \end{aligned}$$

   (a) Demonstre a fórmula combinatória seguinte

$$\binom{2n}{k} = \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p}\binom{n}{k-p}.$$

   (b) Demonstre que $\Lambda^k_\mathbb{C}$ é gerado pelas imagens dos mapas μ_p, para p variando entre 0 e k.

   (c) Para p e q distintos, demonstre que as imagens de μ_p e μ_q intersectam-se apenas na órigem $0 \in \Lambda^k_\mathbb{C}$.

   Definimos $\Lambda^{p,k-p} = \mathrm{Im}(\mu_p) \subseteq \Lambda^k_\mathbb{C}$. Um elemento de $\Lambda^{p,k-p}$ é chamado uma k-forma de *tipo-*$(p,k-p)$.

(d) Demonstre que existe uma decomposição de soma direita

$$\Lambda^k_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p=0}^{k} \Lambda^{p,k-p}.$$

5. Seja $f : U \to V$ uma aplicação holomorfa, entre conjuntos abertos em espaços euclideanos ou entre variedades complexas. Demonstre que o o *pull back* de formas diferenciais $f^* : \mathcal{E}^k(V) \to \mathcal{E}^k(U)$ induz aplicações $f^* : \mathcal{E}^{p,q}(V) \to \mathcal{E}^{p,q}(U)$.

6. Seja $f : U \to V$ uma aplicação holomorfa, entre conjuntos abertos em espaços euclideanos ou entre variedades complexas. Demonstre que o o *pull back* de formas diferenciais $f^* : \mathcal{E}^k(V) \to \mathcal{E}^k(U)$ induz aplicações $f^* : \mathcal{E}^{p,q}(V) \to \mathcal{E}^{p,q}(U)$.

7. Considere a $2n$-forma em $\mathbb{C}^n$,

$$\Omega = \frac{i^n}{2^n} dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge dz^2 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^n.$$

(a) Demonstre que

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{i^{n^2}}{2^n} dz^1 \wedge dz^2 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^n, \\ &= dx^1 \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge dy^n. \end{aligned}$$

(b) Seja $F = (F^1, \ldots, F^n)$ um mapa holomorfa, definida no aberto $U \subseteq \mathbb{C}^n$ e tomando valores em $\mathbb{C}^n$. Demonstre que

$$F^*\Omega = \left| \det \left(\frac{\partial F^j}{\partial z^k} \right) \right|^2 \Omega,$$

onde $(\partial F^j / \partial z^k)$ é a matrix Jacobiana complexa de F.

(c) Demonstre que toda variedade complexa é orientável e que a estrutura complexa canonicamente determina uma orientação.

8. Demonstre que $\overline{\partial \alpha} = \bar{\partial} \bar{\alpha}$. Em particular isso implica que uma (p,p)-forma real $\alpha \in \mathcal{E}^{p,p}(U) \cap \mathcal{E}^{2p}_{\mathbb{R}}(U)$ é ∂-fechada (exata) se e somente se α é $\bar{\partial}$-fechada (exata). Formule as várias ∂-versões do Lema de Poincaré.

9. Seja $\Delta \subseteq \mathbb{C}^n$ um polidisco.

(a) Seja $\alpha \in \mathcal{E}^{1,1}(\Delta)$ uma $(1,1)$-forma d-fechada. Demonstre que existe uma função suave $f \in \mathcal{E}^0(\Delta) = C^\infty(\Delta, \mathbb{C})$ tal que $\partial \bar{\partial} f = \alpha$.

(b) Seja $\beta \in \mathcal{E}^{p,q}(\Delta)$ uma (p,q)-forma d-fechada, com $p, q \geq 1$. Demonstre que existe uma forma $\gamma \in \mathcal{E}^{p-1,q-1}(\Delta)$ tal que $\partial \bar{\partial} \gamma = \beta$.

10. Os exemplos de hipersuperfícies em $\mathbb{C}^n$ e em $\mathbb{CP}^n$ podem ser generalizados da maneira seguinte. Sejam $f_1, \ldots, f_k$ polinômios homogêneos (de graus d_j respetivamente) em $\mathbb{C}^{n+1}$. Nas aulas nós vimos que o conjunto $V(f_j) = \{[Z] \in \mathbb{CP}^n \,;\, f_j(Z) = 0\}$ é um subconjunto bem definido. Demonstre que se $0 \in \mathbb{C}^k$ é um *valor regular* da aplicação $(f_1, \ldots, f_k) : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^k$, então

$$X = V(f_1) \cap \cdots \cap V(f_k) \subseteq \mathbb{CP}^n$$

é uma subvariedade complexa de $\mathbb{CP}^n$ de dimensão $n - k$. X é chamada a *interseção completa* das hipersuperfícies $V(f_j)$.

11. Esse exercício vai investigar um exemplo de uma subvariedade complexa $\Sigma \subseteq \mathbb{CP}^3$ que não pode ser escrita como uma interseção completa. A superfície de Riemann Σ é chamada a cúbica torcida.

    Considere os três polinômios homogênos de grau 2 em $\mathbb{C}^4$.

$$\begin{aligned} F_0 &= xz - y^2, \\ F_1 &= yw - z^2, \\ F_2 &= xw - yz. \end{aligned}$$

    (a) Demonstre que a hipersuperfície $V(F_2) \subseteq \mathbb{CP}^3$ é suave mas $V(F_0)$ e $V(F_1)$ não são.

    (b) Demonstre que o mapa

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{CP}^1 &\to \mathbb{CP}^3, \\ [s:t] &\mapsto [x:y:z:w] = [s^3 : s^2t : st^2 : t^3] \end{aligned}$$

    é um mergulho, e logo tem imagem uma subvariedade complexa suave de $\mathbb{CP}^3$. Demonstre que a imagem de μ é igual a $\Sigma = V(F_0) \cap V(F_1) \cap V(F_2)$.

    (c) Demonstre que para quaisquer duas das funções F_0, F_1, F_2, $V(F_i) \cap V(F_j)$ é estritamente maior que Σ.

    (d) Demonstre que para todo $p \in \Sigma$, Σ pode ser dada numa vizinhança de p como o zero locus de duas das F_i. Isso é dizer que Σ é localmente o conjunto nulo de dois polinômios, mas não é globalmente.