Instituto de Matemática - IM-UFRJ
Geometria Complexa
Lista 3 de exercícios, para entregar na aula de 05/02/2021

---

1. Um *conjunto dirigido* I é um conjunto com uma ordem parcial $\leq$ tal que para todo $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que $k \leq i$ e $k \leq j$.

   Seja I um conjunto dirigido ordenado com ordem parcial $\leq$. Seja A um anel comutativo com identidade e, para $\alpha \in I$, seja S_α uma familia de A-modulos. Supomos que existe homomorfismos

   $$f^\alpha_\beta : S_\alpha \to S_\beta$$

   definidos se $\beta \leq \alpha$, com as propriedades que

   (i) $f^\alpha_\alpha = \mathrm{id}$,

   (ii) $f^\beta_\gamma \circ f^\alpha_\beta = f^\alpha_\gamma$ se $\gamma \leq \beta \leq \alpha$.

   Então definimos o *limite direto* $S = \varinjlim S_\alpha$ como as classes de equivalência na união disjunto

   $$S = \Big(\bigsqcup_{\alpha \in I} S_\alpha\Big)/\sim$$

   onde $x_\alpha \in S_\alpha$ e $x_\beta \in S_\beta$ são equivalentes se e somente se existe algum γ tal que $\gamma \leq \alpha$ e $\gamma \leq \beta$, e $f^\alpha_\gamma(x_\alpha) = f^\beta_\gamma(x_\beta)$.

   Demostre que

   (a) se S_α são modulos sobre um anel A, então S é um modulo sobre A,

   (b) existe uma aplicação canônica

   $$f_\alpha : S_\alpha \to S.$$

2. Seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe de grupos abelianos num espaço topológico X e seja $x \in X$. Seja I o conjunto dirigido de subconjuntos abertos de X que contem x, ordenado por inclusão. Seja $\{\mathcal{F}(U)\}$ o sistema dirigido de grupos, indexados por I. O caule de $\mathcal{F}$ em x é definido por

   $$\mathcal{F}_x = \varinjlim \mathcal{F}(U).$$

   Seguindo parte (b) da última questão, para U uma vizinhança de x e $s \in \mathcal{F}(U)$, denotamos por $s_x \in \mathcal{F}_x$ a classe de equivalência de s. Dê um exemplo de um limite direto que tem a propriedade que

   $$\varinjlim S_\alpha = S_{\alpha_0},$$

   para algum $\alpha_0 \in I$. (Dica : considere um feixe constante.) Demostre que

   $$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x} = \varinjlim \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U) = \lim_{x \in U} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$$

   não tem essa propriedade, onde $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ é o feixe de funções holomorfas em $\mathbb{C}^n$.

3. (a) Dê um exemplo de uma variedade complexa M tal que o homomorfismo de grupos

   $$\begin{array}{rcl} \exp : \mathcal{O}_M(M) & \longrightarrow & \mathcal{O}^*_M(M), \\ \exp(f)(z) & = & \exp(2\pi i f(z)) \end{array}$$

   não é sobrejetivo.

(b) Seja M uma variedade complexa. Demonstre que o morfismo de feixes

$$\exp : \mathcal{O}_M \longrightarrow \mathcal{O}_M^*$$

é sobrejetiva. Calcule o núcleo desse morfismo.

4. Seja $\mathcal{F}_P$ um pré-feixe de grupos abelianos num espaço topológico. Para $x \in X$, denota por $\mathcal{F}_x$ o caule de $\mathcal{F}_P$ em x. O feixe associado a $\mathcal{F}_P$ é definido pelo seguinte. Para $U \subseteq X$ um subconjunto aberto, $\mathcal{F}(U)$ é por definição o conjunto de aplicações

$$\sigma : U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

tal que $\sigma(x) \in \mathcal{F}_x$ para todo $x \in U$ e tal que para todo $x \in U$, existe uma vizinhança $x \in V \subseteq U$ e um elemento $s \in \mathcal{F}_P(V)$ tal que para todo $y \in V$, $\sigma(y) = s_y \in \mathcal{F}_y$.

(a) Demonstre que $\mathcal{F}(U)$ tem a estrutura de um grupo abeliano.

(b) Demonstre que, com aplicações $r_{V,U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ dadas exatamente por restrição de aplicações, $\mathcal{F}$ satisfaz as quatro condições para ser um feixe.

(c) Demonstre que existe um morfismo de pré-feixes canônico $\phi : \mathcal{F}_P \to \mathcal{F}$.

(d) Demonstre que se $\mathcal{F}_P$ é um feixe ϕ é um isomorfismo.

5. Consideramos os feixes associados a vários pré-feixes, conforme as definições e observações na última questão.

(a) Seja $\underline{\mathbb{Z}}_P$ o pré-feixe, num espaço topológico, de funções constantes com valores em $\mathbb{Z}$. Para $U \subseteq X$ aberto, $\underline{\mathbb{Z}}_P(U) \cong \mathbb{Z}$ é o grupo de funções constantes em U. Demonstre que o feixe associado é $\underline{\mathbb{Z}}$ de funções localmente constantes.

(b) Seja $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de feixes em X e defina o pré-feixe $\mathrm{Im}(\phi)_P$ por, para $U \subseteq X$,

$$(\mathrm{Im}(\phi)_P)(U) = \mathrm{Im}(\phi_U) = \phi_U(\mathcal{F}(U)) \subseteq \mathcal{G}(U).$$

Demonstre que um elemento do feixe associado $\mathrm{Im}(\phi)(U)$ é equivalente a um elemento $\sigma \in \mathcal{G}(U)$ para qual existe

i. uma cobertura aberta de $\{U_\alpha\}$ de U,

ii. seções $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ tais que $\sigma|_{U_\alpha} = \phi_{U_\alpha}(s_\alpha)$.

(c) Seja $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de feixes em X. Consideramos o co-núcleo pré-feixe $\mathrm{coker}(\psi)_P$ definido por

$$\mathrm{coker}(\psi)_P(U) = \mathrm{coker}(\psi_U) = \mathcal{G}(U)/\psi_U(\mathcal{F}(U)).$$

Demonstre que uma seção, em $U \subseteq X$, do feixe associado $\mathrm{coker}(\psi)$ é equivalente a

(i) uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de U,

(ii) seções $\sigma \in \mathcal{G}(U_\alpha)$ para cada α que satisfazem nas interseções $U_\alpha \cap U_\beta$

$$\sigma_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} - \sigma_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} \in \psi_{U_\alpha \cap U_\beta}(\mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta)).$$

6. Seja Σ uma superfície de Riemann e $\mathcal{O}_\Sigma$ o feixe de funções holomorfas em Σ. Seja $p \in \Sigma$. Denote por $\mathcal{I}_p$ o feixe em Σ de funções holomorfas que se anulam em p. Descreve precisamente o caule $\mathcal{I}_{p,z}$, para algum $z \in \Sigma$, observando como a definição difere para $z = p$ e $z \neq p$. Demonstre que $\mathcal{I}_p$ é um feixe de ideais do feixe de aneis $\mathcal{O}_\Sigma$. Seja $\mathcal{Q}_p$ o feixe quociente $\mathcal{Q}_p = \mathcal{O}_\Sigma/\mathcal{I}_p$ para que ténhamos a sequência curta exata $0 \to \mathcal{I}_p \to \mathcal{O}_\Sigma \to \mathcal{Q}_p \to 0$. Descreve precisamente os caules $\mathcal{Q}_{p,z}$ para todo $z \in \Sigma$.

7. (a) Utilize o teorema de Siefert-Van Kampen para demonstrar que $\mathbb{CP}^n$ é simplesmente conexo.

   (b) Utilize o teorema de Mayer-Vietoris (e outros teoremas básicos sobre cohomologia de De Rham) para demonstrar que $H^k_{dR}(\mathbb{CP}^n) \cong \mathbb{R}$ para $k = 2j$ par e $H^k_{dR}(\mathbb{CP}^n) = \{0\}$ para $k = 2j-1$ ímpar.

   A dificuldade nessa questão é encontrar uma decomposição $\mathbb{CP}^n = U \cup V$ onde nós conhecemos o grupo fundamental e a cohomologia de U, V e $U \cap V$. Dica: seja $U = \mathbb{CP}^n \setminus \{p\}$, onde $p = [1 : 0 : \cdots : 0]$. Demonstre que $\mathbb{CP}^{n-1} \subseteq \mathbb{CP}^n$ é uma deformação por retração de U.

8. Seja $M \subseteq \mathbb{CP}^{n-1} \times \mathbb{C}^n$ o subconjunto

$$M = \{(\xi, v) \in \mathbb{CP}^{n-1} \times \mathbb{C}^n \ ; \ v \in \xi\}$$

   (a) Demonstre que M é uma subvariedade complexa de $\mathbb{CP}^{n-1} \times \mathbb{C}^n$ de dimensão n.

   (b) Sejam

$$\begin{aligned} \pi &: M \to \mathbb{CP}^{n-1}, \\ p &: M \to \mathbb{C}^n, \end{aligned}$$

   as projeções sobre as dois fatores. Identificam explicitamente as pré-imagens $\pi^{-1}(\xi)$, $p^{-1}(v) \subseteq M$ para quaisquer $\xi \in \mathbb{CP}^{n-1}$ e $v \in \mathbb{C}^n$.

   A variedade M é chamada alternativamente o *blow-up* (explosão ou gonflado) de $\mathbb{C}^m$ (quando pensamos na projeção p), ou o fibrado tautológico em $\mathbb{CP}^{n-1}$ (quando consideramos a projeção π). O blow up em um ponto é muito importante em várias situações. O mapa p é um isomorfismo $M \setminus p^{-1}(0) \to \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, mas a préimagem de 0 é uma subvariedade de dimensão maior. Geometricamente M é o resultado quando tiramos um ponto e inserimos uma subvariedade no lugar dele. A geometria dessa subvariedade $S \subseteq M$ é muito especial, o que pode ser detectado estudando o fibrado normal a S.

9. Numa variedade Hermitiana (M, J, ω) de dimensão complexa n, demonstre que a forma de volume Riemanniana é dada por $\frac{\omega^n}{n!}$, onde $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$.

10. Seja g uma métrica Hermitiana numa variedade complexa. Seja $\omega(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot)$ a forma de Kähler associada a g. Demonstre que se g é dada em coordenadas locais por

$$g = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar{\beta}} \left(dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta + d\bar{z}^\beta \otimes dz^\alpha \right)$$

   então ω é dada em coordenadas por

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta.$$

11. Seja M uma variedade complexa com estrutura quase-complexa J. Isso é dizer que $J_p : T_pM \to T_pM$ satisfaz $J_p^2 = -\mathrm{Id}$. Seja $\eta \in \Lambda^2 T^*M = \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{1,1} \oplus \Lambda^{0,2}$. Define a 2-forma $J^*\eta = \eta(J\cdot, J\cdot)$.

   (a) Demonstre que se $\eta \in \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2}$, então

$$J^*\eta = -\eta.$$

   (b) Demonstre que se $\eta \in \Lambda^{1,1}$, então

$$J^*\eta = \eta.$$

(c) Uma $(1,1)$-forma $\omega \in \Lambda^{1,1}$ é real se $\bar{\omega} = \omega$. Uma $(1,1)$-forma real ω é *positiva* se $g(v,v) = \omega(v, Jv) \geq 0$ para todo $v \in T_pM$ e todo $p \in M$, com igualdade apenas para $v = 0$. Demonstre que ω é positiva se e somente se $-i\omega(X, \bar{X}) \geq 0$ para todo $X \in T_p^{1,0}M$ e $p \in M$, com igualdade apenas para $X = 0$.

12. Consideramos o diffeomorfismo $\Phi : \mathbb{CP}^1 \to S^2$

$$\Phi([z_1 : z_2]) = \left(2\mathrm{Re}\left(\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}\right), 2\mathrm{Im}\left(\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}\right), \frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}\right).$$

(a) Note que se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{CP}^1$ é dado por $w \mapsto [w : 1]$ então $\Phi \circ f$ corresponde com (o inverso da) projeção estereográfica. Demonstre isso.

(b) Seja g_{red} a métrica Riemanniana redonda em S^2. Isso é $g_{red} = i^* g_{euc}$ onde $g_{euc} = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ é a métrica Euclideana em $\mathbb{R}^3$. Demonstre que, em coordenadas estereográficas $w = x + iy$,

$$g_{red} = \frac{4}{(1 + |w|^2)^2}(dx^2 + dy^2).$$

(c) Observando que $J\partial/\partial x = \partial/\partial y$ e $J\partial/\partial y = -\partial/\partial x$, e considerando as formas Hermitianas associadas a $dx^2 = dx \otimes dx$ e $dy^2 = dy \otimes dy$, demonstre que no domínio U das coordenadas estereográficas

$$\omega_{red} = \frac{4}{(1 + |w|^2)^2} 2dx \wedge dy = \frac{4}{(1 + |w|^2)^2} idw \wedge d\bar{w}.$$

(d) Encontre uma função suave com valores reais $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ tal que $\omega_{red} = i\partial\bar{\partial}f$.