Seja $M$ uma variedade diferenciaval de dimensão $n$. Um fibrado vetorial complexo de posto $k \in \mathbb{N}$ é uma familia de espaços vetoriais complexas de dimensão $k$ que é parametrizado pela variedade $M$ e que é localmente trivial.

Mais formalmente, $E$ é uma variedade de dimensão $n + 2k$, com uma aplicação sobrejetiva $\pi : E \to M$. A condição de trivialidade local é que existe uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de $M$ por conjuntos abertos e difeomorfismos

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k$$

tais que $\pi_1 \circ \varphi_\alpha = \pi$ em $\pi^{-1}(U_\alpha)$. Aqui, $\pi_1$ é a projeção sobre a primeiro fator. Além disso, pedimos que os difeomorfismos são compatíveis no sentido que, quando $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ tem a forma

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^k &\longrightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^k, \\ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, v) &= (x, g_{\alpha\beta}(x)v) \end{aligned}$$

onde $g_{\alpha\beta}(x) \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ é um isomorfismo linear de $\mathbb{C}$. As funções $g_{\alpha\beta}$ são chamadas as *funções de transição* de $E$. Os mapas $\varphi_\alpha$ são chamados *trivializações* de $E$. Para cada $x \in M$, denotamos por $E_x = \pi^{-1}(x)$.

1.

2. Sejam $M$ uma variedade diferenciavel, e $\{U_\alpha\}$ uma cobertura de $M$ por conjuntos abertos indexados por $\alpha \in A$. Suponha que para cada $\alpha, \beta \in A$ com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ temos aplicações $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ que satisfazem as condições

   (i) $g_{\alpha\alpha} \equiv \mathrm{Id}$ em $U_\alpha$,

   (ii) $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$ em $U_\alpha \cap U_\beta$,

   (iii) $g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma}$ em $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

   Demonstre que existe um fibrado vetorial $E \to M$ de posto $k$ cujas funções de transição são as funções $g_{\alpha\beta}$.

3. Seja $\pi : E \to N$ um fibrado vetorial suave sobre uma variedade diferenciavel. Seja $f : M \to N$ uma aplicação suave entre variedades. Seja

$$f^*E = \{(x, e) \in M \times E \ ; \ f(x) = \pi(e)\}.$$

   (a) Demonstre que $f^*E$ admite a estrutura de um fibrado vetorial suave sobre $M$. Se $E$ é trivializável sobre o conjunto aberto $U \subseteq N$, demonstre que $f^*E$ pode ser trivializado sobre $f^{-1}(U) \subseteq M$.

   (b) Demonstre que se $E$ é trivializado nos conjuntos $U_\alpha$ com funções de trivialização $g_{\alpha\beta}$ então $f^*E$ pode ser trivializado em $f^{-1}(U_\alpha)$, com funções de transição $g_{\alpha\beta} \circ f$.

4. Um *referencial local* (*local frame* em inglês) de $E$ em $U$ é uma família de seções $\{\sigma_j \in \Gamma(E|_U)\}$ de $E|_U = \pi^{-1}(U)$ sobre $U$ tal que para todo $p \in U$, $\{\sigma_j(p)\}$ forme uma base para $E_p$. Se $E$ é um fibrado holomorfo sobre uma variedade complexa dizemos que um $\{\sigma_j\}$ é um referencial holomorfo se cada elemento é uma seção holomorfa de $E|_U$.

   (a) Demonstra que para todo $p \in M$, existe uma vizinhança de $p$ e um referencial local definido naquela vizinhança. Demonstre que se $E$ é um fibrado holomorfo, o referencial pode ser escolhido holomorfo.

(b) Seja $h$ uma métrica no fibrado $E$. Demonstre que existe um referencial local $\{\sigma_j\}$ (numa vizinhança de qualquer ponto) tal que para todo $p \in U$, $\{\sigma_j(p)\}$ seja uma base *Hermitiano* de $E_p$.

(c) Demonstre que se $\{\sigma_j\}$ é um referencial local de $E$, toda seção $\alpha$ de $E|_U$ pode ser escrita como

$$\alpha = \sum_j \alpha^j \sigma_j,$$

para $\alpha^j \in C^\infty(U, \mathbb{C})$ funções suaves definidas em $U$.

5. Seja $\Lambda \subseteq \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ o subconjunto

$$\Lambda = \{(\xi, v) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \ ; \ v \in \xi\},$$

e seja $\pi : \Lambda \to \mathbb{CP}^n$ a projeção sobre o primeiro fator.

(a) Demonstre que $\Lambda \to \mathbb{C}^n$ tem a estrutura de um fibrado vetorial de posto $k = 1$ sobre $\mathbb{CP}^n$. Identifique subconjuntos $U_\alpha \subseteq \mathbb{C}^n$ sobre quais $\Lambda$ pode ser trivializada. Calcule explicitamente as aplicações trivializadores $\varphi_\alpha$ e as funções de transição $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

(b) Demonstre que $\mathcal{O}(\mathbb{CP}^n, \Lambda) = \{0\}$.

6. Sejam $E$ e $F$ fibrados vetoriais definidos na variedade diferenciável $M$. Uma seção $A$ de $\mathrm{Hom}(E, F)$ associa a todo $p \in M$ um elemento $A_p \in \mathrm{Hom}(E_p, F_p) = \mathrm{Hom}(E, F)_p$. $A$ define uma aplicação linear

$$\mathscr{A} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$$

ao colocar $(\mathscr{A}\sigma)(p) = A_p(\sigma(p)) \in F_p$ para $\sigma \in \Gamma(E)$. Observamos que ambos $\Gamma(E)$ e $\Gamma(F)$ são módulos sobre o anel $C^\infty(M)$.

(a) Demonstre que para qualquer $A \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E, F))$, $\mathscr{A}$ é um homomorfismo de $C^\infty(M)$-módulos.

(b) Demonstre que para toda aplicação linear $\Phi : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ que comuta com multiplicação por elementos de $C^\infty(M)$, existe $A \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E, F))$, tal que $\Phi = \mathscr{A}$.

Esse resultado é decepcionadamente importante. Intuitivamente, a hipótese significa que não há diferenciação na definição de $\Phi$. Um exmplo de um mapa que *não* satisfaz a hipótese é uma conexão $\nabla : \mathcal{E}^0(M) \to \mathcal{E}^1(M)$, que involve diferenciação. Porém, a curvatura $F_\nabla$ de uma conexão define uma mapa

$$F_\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^2 \otimes E)$$

que comuta com multiplicação por funções, e então define uma seção

$$F_\nabla \in \Gamma(E^* \otimes \Lambda^2 \otimes E) = \Gamma(\Lambda^2 \otimes \mathrm{End}(E)) = \mathcal{E}^2(\mathrm{End}(E)).$$

7. (a) Seja $\nabla$ uma conexão num fibrado vetorial $E$. Define uma noção de paralelismo, e de transporte paralelo ao longo de uma curva.

(b) Demonstre que dada uma curva $\gamma : [0, 1] \to M$, a aplicação de transporte paralelo $P_\gamma : E_{\gamma(0)} \to E_{\gamma(1)}$ é bem definido e um isomorfismo linear de espaços vetoriais.

8. (a) Seja $E \to M$ um fibrado vetorial trivializado com funções de transição $\{g_{\alpha\beta}\}$. Suponha que para cada $\alpha$ existe uma matriz de 1-formas em $U_\alpha$, $\theta_\alpha \in \mathcal{E}^1(U_\alpha, M(k,\mathbb{C}))$ tal que para todo $\alpha$ e $\beta$ com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, temos $\theta_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1}\theta_\alpha g_{\alpha\beta}$ em $U_\alpha \cap U_\beta$. Demonstre que existe uma conexão $\nabla$ em $E$ cuja expressão em $U_\alpha$ é dado por $\theta_\alpha$.

   (b) Seja $\pi : E \to N$ um fibrado vetorial e $f : M \to N$ uma aplicação suave. Seja $f^*E \to M$ o fibrado *pull-back* de $E$. Demonstre que para toda conexão $\nabla$ em $E$, existe uma única conexão $\nabla^f = f^*\nabla$ em $f^*E$ com a propriedade seguinte:

   Para toda seção $\sigma \in \Gamma(E)$ e $f^*\sigma = \sigma \circ f \in \Gamma(f^*E)$, temos $\nabla^f(f^*\sigma) = f^*(\nabla\sigma)$.

   Observamos que nem toda seção de $\Gamma(f^*E)$ tem essa forma, então essa condição não é suficiente para definir a derivada de qualquer seção.

9. (a) Sejam $\nabla^E$ e $\nabla^F$ conexões nos fibrados $E$ e $F$ respectivamente. Demonstre que a expressão

$$\nabla(\sigma \otimes \alpha) = (\nabla^E \sigma) \otimes \alpha + \sigma \otimes \nabla^F \alpha \in \mathcal{E}^1(E \otimes F),$$

   define uma conexão no fibrado produto tensorial $E \otimes F$. Para verificar isso completamente é necessário observar que toda seção de $E \otimes F$ é localmente da forma $\sum_i \sigma^i \otimes \alpha^i$, mas não globalmente.

   (b) Demonstre que a derivada exterior $d$ define uma conexão no fibrado trivial $E = M \times \mathbb{C}$.

   (c) Consideramos o fibrado dual $E^*$. Demonstre que para toda conexão $\nabla^E$ em $E$, existe uma única conexão $\nabla^{E^*}$ em $E^*$ que é compatível com a aplicação pontual $E_p \otimes E_p^* \xrightarrow{c} \mathbb{C}$ no sentido que

$$\begin{aligned} c : \Gamma(E \otimes E^*) &\longrightarrow C^\infty(M), \\ d\,c(v \otimes \sigma) &= c((\nabla^E v) \otimes \sigma) + c(v \otimes (\nabla^{E^*} \sigma)) \end{aligned}$$

   para todo $v \in \Gamma(E)$ e $\sigma \in \Gamma(E^*)$. Aqui, $c$ denota *contração* ou, em endomorfismos, o traço.

   (d) Seja $F \subseteq E$ um sub-fibrado e $\pi : E \to F$ uma projeção sobre os subespaços tal que $\pi|_F = \mathrm{Id}_F$. Demonstre que a expressão

$$\nabla^F \sigma = \pi(\nabla\sigma)$$

   define uma conexão em $F$. A projeção $\pi$ poderia ser projeção ortogonal utilizando uma métrica Hermitiana em $E$.

10. (a) Demonstre que se $\nabla$ e $\nabla'$ são conexões no fibrado vetorial $E$, então a diferença $A = \nabla - \nabla'$ é um tensor. Para isso é suficiente demonstrar que $A : \mathcal{E}^0(E) \to \mathcal{E}^1(E)$ satisfaz $A(f\sigma) = fA(\sigma)$.

    (b) Demonstre que o conjunto $\mathscr{C}_E$ de conexões em $E$ é um espaço afim modelado no espaço vetorial $\mathcal{E}^1(\mathrm{End}(E))$.

    (c) Demonstre que se $\nabla' = \nabla + A$, então a curvatura de $\nabla'$ é dada por

$$F^{\nabla'} = F^\nabla + d^\nabla A + A \wedge A,$$

    onde $d^\nabla$ é a derivada covariante para a conexão associada a $\nabla$ no fibrado $\mathrm{End}(E)$ e onde $\wedge$ denota a operação

$$\Lambda^1 \otimes \mathrm{End}(E) \times \Lambda^1 \otimes \mathrm{End}(E) \to \Lambda^2 \otimes \mathrm{End}(E)$$

    obtida multiplicando o produto exterior pela composição de endomorfismos.

11. Uma conexão $\nabla$ em $E$ induz conexões nos vários fibrados associados a $E$. Sejam $\nabla^E$ e $\nabla^F$ conexões em $E$ e $F$, com curvaturas $F^{\nabla^E}$ e $F^{\nabla^F}$.

    Calcule as curvaturas das conexões induzidas por $\nabla^E$ e $\nabla^F$ nos fibrados $E \oplus F$, $E \otimes F$, $E^*$, $\mathrm{Hom}(E,F)$ e $\Lambda^k E^*$, em termos de $F^{\nabla^E}$ e $F^{\nabla^F}$.