1. Sejam B um conjunto e $B_i \subseteq B$ uma familia de subconjuntos de B indexado pelo conjunto I. Demonstre que
$$\bigcup_{i\in I} B_i^c = \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)^c$$

2. Considere $f : A \to B$ uma função e $b \in B$. O que se pode afirmar sobre $f^{-1}(\{b\})$ (a imagem inversa ou a pré-imagem do conjunto unitário $\{b\}$) sabendo que :
   (a) f é injetiva?
   (b) f é sobrejetiva?

   Um ponto que pode ter causado confusão é a definição do subconjunto $f^{-1}(U)$, para $U \subseteq B$. Definimos $f^{-1}(U) = \{a \in A \; ; \; f(a) \in U\} \subseteq A$. Notamos que $f^{-1}(U)$ é um subconjunto, não apenas um ponto e que f^{-1} não é a função inversa de f. Na verdade, para definir $f^{-1}(U)$, f não deve ser uma bijeção.

3. Considere $f : A \to B$ uma função. Prove que :
   (a) se $Y \subseteq \tilde{Y} \subseteq B$ então $f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(\tilde{Y})$;
   (b) se $Y \subseteq B$, então $f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$;
   (c) se $Y \subseteq B$ então $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$;
   (d) se $X \subseteq A$ então $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.

   Determine as condições necessárias para que tenha igualdade em (c) e (d).

4. Seja $f : A \to B$ uma função e $\{B_i\}_{i\in I}$ uma família de subconjuntos de B. Prove que :
   (a) $f^{-1}(\cup_i B_i) = \cup_i f^{-1}(B_i)$;
   (b) $f^{-1}(\cap_i B_i) = \cap_i f^{-1}(B_i)$.

5. Seja $f : A \to B$ uma função. Prove que f é injetiva se e somente se
$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$
   para toda família $\{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de A.

6. Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Demonstre que $\#A \leq \#B$ se e somente se $\#B \geq \#A$.

7. Mostre que a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável. Ou seja : se A_n é enumerável para cada $n \in \mathbb{N}$, então $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ é enumerável.

8. Define $A_j = \{m/n \; ; \; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \text{ com } |m| + n = j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Prove que :
   (a) $\#A_j = 2j - 1$,
   (b) $\mathbb{Q} = \cup_{j\in\mathbb{N}} A_j$,
   (c) $\mathbb{Q}$ é enumerável.

9. Seja A um conjunto e $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ um subconjunto do conjunto das partes. Então, $\alpha := \{B \; ; \; B \in \mathcal{C}\}$ é chamado de *partição* se $\cup_{B\in\mathcal{C}} B = A$ é $B \cap C = \emptyset$ para quaisquer $B, C \in \alpha$, $B \neq C$. Mostre que cada relação de equivalência define uma partição, e que cada partição define uma relação de equivalência.

10. Mostre que o logarítmo de 3 na base 2 é irracional.