1. Construa uma bijeção entre os conjuntos $(0,1)$ e $(0,1]$.

2. Prove que são irracionais :
   (a) $\sqrt{3}$,
   (b) $\sqrt[3]{2}$,
   (c) $\sqrt[3]{4}$,
   (d) $\sqrt{21}$.

3. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto limitado superiormente. Prove que $s \in \mathbb{R}$ é igual a $\sup(A)$ se e somente se
   - $\forall x \in A$, $x \leq s$,
   - $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ tal que $s - \varepsilon < x$.

4. Suponha que $a = \sup(A) \notin A$. Prove que $\forall \varepsilon > 0$ o conjunto $(a - \varepsilon, a) \cap A$ é infinito.

5. Determine o supremo e o ínfimo dos conjuntos
   (a) $\{1/n + (-1)^n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$,
   (b) $\{1/n \ ; n \in \mathbb{N}\}$,
   (c) $\text{sen}(1/x) \ ; \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$,
   (d) $\{1/n \ ; \ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$,
   (e) $\{x \in \mathbb{R} \ ; \ x^2 + x - 1 < 0\}$,
   (f) $\{(-1)^n(1 + \frac{1}{n}) \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$,
   (g) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\}$,
   (h) $\{\cos(n+1) \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$.]

6. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, defina indutivamente as sequências $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ pondo $x_1 = \sqrt{ab}$, $y_1 = (a+b)/2$ e $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ e $y_{n+1} = (x_n + y_n)/2$. Prove que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergem para o mesmo limite.

7. Seja $\{x_n\}$ a sequência definida indutivamente por $x_1 = 0$ e $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que
   (a) $\{x_n\}$ é crescente,
   (b) $x_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
   (c) $\{x_n\}$ é convergente.

8. Suponha que $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são sequências em $\mathbb{Q}$. Além disso, suponha que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - b_n| < \varepsilon$ para qualquer $n \geq N$.
   (a) Mostre que $\{a_n\}$ é limitada se e somente se $\{b_n\}$ é limitada.
   (b) Mostre que $\{a_n\}$ é Cauchy se e somente se $\{b_n\}$ é Cauchy.
   (c) Mostre que se $\{a_n\}$ é convergente para $a \in \mathbb{R}$, então $\{b_n\}$ também o é.

9. Seguindo a última questão, diz-se que duas sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$, $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, são equivalentes se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - b_n| < \varepsilon$ para qualquer $n \geq N$. Demonstre que isso define uam relação de equivalência sobre o conjunto de sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$.

   Note : Isso define uma maneira alternativa para definir os números reais, como o conjunto de classes de equivalência de sequências de Cauchy com valores em $\mathbb{Q}$.