1. Demonstre que para qualquer $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

2. Seja $\{x_n\}$ uma sequência com $\limsup_{n\to\infty}(x_n) \neq \pm\infty$. Mostre que $s \in \mathbb{R}$ é igual a $\limsup_{n\to\infty}(x_n)$ se e somente se s satisfaz as condições

   - $\forall \varepsilon >$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $x_n < s + \varepsilon$,
   - $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall M \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq M$ tal que $s - \varepsilon < x_n$.

3. Seja $\{x_n\}$ uma sequência não negativa e decrescente. Mostre que

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^k x_{2^k} \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq \infty.$$

4. Se $0 < a < b < 1$, considere a série

$$a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + a^4 + \cdots .$$

   Prove que o teste da raíz mostra que a série é convergente, mas que o teste da razão é inconclusivo.

5. Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sequências tais que cada y_n é um ponto de acumulação de $\{x_n\}$. Mostre que cada ponto de acumulação de $\{y_n\}$ também é um ponto de acumulação de $\{x_n\}$.

6. Dado $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, definimos $\|v\|_p = \sqrt[p]{|a|^p + |b|^p}$. Prove que $\lim_{n\to\infty} \|v\|_p = \max(|a|, |b|)$. Isso justifica a definição $\|v\|_\infty = \max(|a|, |b|)$.

7. Diz-se que a sequência $\{x_n\}$ é somável, com soma s, quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe um subconjunto finito $J_0 \subseteq \mathbb{N}$ tal que, para todo J finito com $J_0 \subseteq J \subseteq \mathbb{N}$, tem-se $|s - \sum_{n\in J} x_n| < \varepsilon$. Prove :

   (a) Se a sequência $\{x_n\}$ é somável então, para toda bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a sequência $\{y_m\}$, definida por $y_m = x_{f(m)}$, é somável, com a mesma soma.

   (b) Se a sequência $\{x_n\}$ é somável, com soma s, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente.

   (c) Reciprocamente, se $\sum_n x_n$ é uma série absolutamente convergente, então a sequência $\{x_n\}$ é somável.

8. Se uma série é convergente, mas não é absolutamente convergente, prove que existe uma alteração da ordem dos seus termos de modo a tornar sua soma igual a $+\infty$.

9. (a) Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Mostra que $\overline{X}$ é fechado (isso é dizer, que $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$). Além disso, mostre que se Y é um conjunto fechado que contem X, então Y também contém $\overline{X}$. Isso implica que o fecho $\overline{X}$ de X é p menor conjunto fechado que contem X.

   (b) Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto dos números reais e Y um conjunto tal que $X \subseteq Y \subseteq \overline{X}$. Mostra que $\overline{Y} \subseteq \overline{X}$.

   (c) Seja $n \geq 1$ um inteiro positivo, e sejam $X_1, \ldots, X_n$ conjuntos fechados de $\mathbb{R}$. Mostre que $X_1 \cup \cdots \cup X_n$ também é fechado.

10. Seja $A = [0, 1) \cup (1, 2] \cup \{3\}$. Determine (a) $\overline{A}$, (b) A°, (c) $\overline{A^c}$, $(A^c)^\circ$.

11. Para cada um dos conjuntos abaixo, determine se é : fechado? aberto? discreto?

    (a) $A = \{1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$, (b) $B = A \cup \{0\}$, (c) C um conjunto finito,
    (d) $\mathbb{N}^c$, (e) $\mathbb{Z}$, (f) $\mathbb{Q}^c$.

12. Prove que $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto se, e somente se, :

    (a) $\forall x \in A$, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq A$;

    (b) A é uma união de bolas abertas;

    (c) $\forall a \in A$ e toda sequência $x_n \to a$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para todo $n \geq N$.

13. Defina a distância de $a \in \mathbb{R}$ até um conjunto não-vazio X por $d(a, X) = \inf\{|x - a| \ x \in X\}$. Prove que :

    (a) $d(a, X) = 0$ se, e somente se, $a \in \overline{X}$;

    (b) Se X é fechado então para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $x \in X$ tal que $d(a, X) = |a - x|$.