1. (a) Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sequências convergentes. Demostre que a sequência $\{z_n = x_n + y_n\}$ também é convergente e que $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$.

   (b) Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ e x_0 um ponto de acumulação de A. Sejam f e g funções definidas em A tais que os limites $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existem. Demonstre que $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x))\,(\lim_{x\to x_0} g(x))$.

   (c) Seja $x_0 \in A$ e sejam f e g duas funções definidas em A contínuas em x_0. Suponha que $g(x_0) \neq 0$. Demostre que a função $h(x) = f(x)/g(x)$, cujo domínio é $\{x \in A\ ;\ g(x) \neq 0\}$ é contínua em x_0.

   (d) Sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $x_0 \in A$ e seja $c \in \mathbb{R}$. Mostre que (i) $f + g$, (ii) $f - g$ (iii) $g \cdot f$ e (iv) $c \cdot f$ são funções contínuas em x_0.

2. Sejam $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ funções. Prove que se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in A$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = k$, então $\lim_{x\to x_0} g(x) = k$.

3. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função. Demonstre que f é contínua em $x_0 \in A$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ para toda sequência $\{x_n\}$ com $x_n \in A$ tal que $x_n \to x_0$.

4. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto limitado. Definimos o *diâmetro* de X por $\operatorname{diam}(X) = \sup\{|x-y|\ ;\ x, y \in X\}$. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função em A que é limitado no sentido que existe $M > 0$ tal que para todo $x \in A$, $-M \leq f(x) \leq M$. Definimos a *oscilação* de f em $x_0 \in A$ por

$$w(f, x_0) = \inf\{\operatorname{diam}(f(B_\delta(x_0)))\ ;\ \delta > 0\}.$$

   Aqui $B_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ é o intervalo aberto de raio $\delta > 0$ e centrado em x_0.

   Demostre que f é contínua no ponto $x_0 \in A$ se, e somente se, $w(f, x_0) = 0$.

5. Calcule a oscilação $w(f, x)$ das seguintes funções :
   (i) $f(x) = x/|x|$ para $x \neq 0$, $f(0) = 0$, (ii) $g = I_{\mathbb{Q}}$,
   (iii) $f(x) = xI_{\mathbb{Q}}$, (iv) $g(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$, $g(0) = 0$.

6. (a) Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto fechado e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função definida em A. Prove que f é contínua em A se, e somente se, para todo subconjunto fechado $K \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(K) \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto fechado.

   (b) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Demonstre que o conjunto de zeros de f é fechado em $\mathbb{R}$. Demonstre que $C = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) = g(x)\}$ é fechado.

7. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto discreto. Prove que toda função em A, com valores em $\mathbb{R}$ é contínua.

8. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$. Prove que existe uma função contínua h com domínio igual a $\mathbb{R}$ que seja uma extensão de f. Isso é dizer, que o domínio de h é $\mathbb{R}$, mas restrita a $x \in [a, b]$, $h(x) = f(x)$. Dê um exemplo que mostra que isso é falso se usamos (a, b) ao invés de $[a, b]$. (Dica: talvez seja mais simples se fizer para o intervalo $[0, 1]$ ao invés de $[a, b]$).

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ uma função contínua. Prove que f é constante.

10. Seja $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ um polinômio, com n par. Prove que :

    (a) existe $x_0 \in \mathbb{R}$ que é um ponto mínimo global de p,

    (b) se $p(x_0) < 0$, então p tem pelo menos duas raízes.

    Dica: a_0 é maior ou igaul ao mínimo global. Mostre que se $M = \max(1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|)$ e se $|x| \geq M$, então $x^n/2 \leq p(x)$.

11. Seja p uma função polinômial qualquer. Prove que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|p(x_0)| \leq |p(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

12. Suponha que f é contínua com $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponha que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Prove que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

13. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e suponha que os limites $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existem e são finitos. Prove que:

    (a) f é limitada,

    (b) f é uniformemente contínua.