1. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto de números reais. Seja $\overline{A}$ o conjunto de pontos de aderência de A. Mostre que $\overline{A}$ é fechado.

2. Nessa questão consideramos a definição de pontos de aderência de uma sequência. Seja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais. $x \in \mathbb{R}$ é um *ponto de aderência* da sequência se $x = \lim_{m\to\infty} x_{n_m}$ para alguma subsequência convergente de $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$. Seja A o conjunto de pontos de aderência de $\{x_n\}$.

   (a) Prove que o conjunto A dos valores de aderência de uma sequência $\{x_n\}$ é fechado.

   (b) Prove que se a sequência $\{x_n\}$ é limitada, então o conjunto de pontos de aderência é não-vazio. Dê um exemplo de uma sequência $\{x_n\}$ para qual A é vazio.

   (c) Prove que se a sequência $\{x_n\}$ é limitada, então $\sup A = \limsup_{n\to\infty} x_n$.

3. (a) Usando a notação da última questão, seja $\{x_n\}$ onde $x_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$. Prove que $A = \{1, -1\}$.

   (b) Calcule A, quando $x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ é sobrejetora.

4. Seja f uma função definida numa vizinhança de $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Prove que $\lim_{x\to 0} f(a + x) = \lim_{h\to a} f(h)$;

   (b) Generalize (a) : Seja g uma função contínua em a. Então mostre que $\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{h\to g(a)} f(h)$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que f é contínua em $0 \in \mathbb{R}$ se, e somente se, f contínua em $\mathbb{R}$.

6. (a) Prove que se f é Lipschitz contínua, então f é uniformemente contínua.

   (b) Prove que $f(x) = \sqrt{x}$ não é Lipschitz contínua mas é uniformemente contínua em $[0, 1]$.

7. Denote por $\lceil x \rceil$ o menor número inteiro maior ou igual a x. Para $A \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto, denote por I_A a função indicadora

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

   Determine $f'(x)$ para : (a) $f(x) = \lceil x \rceil$, (b) $f(x) = 1/\lceil x \rceil$, (c) $f(x) = x^2 I_{\mathbb{Q}}(x)$.

8. Considere $f(x) = x/2 + x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$.

   (a) Prove que $f'(0) > 0$ mas que f **não** é crescente numa vizinhança de 0 .

   (b) Suponha que $g \in C^1((-1, 1))$ e $g'(0) > 0$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que g é estritamente crescente em $I = B_\delta(0)$. A hipótese de continuidade da derivada é fundamental.

9. (i) Encontre uma função (parecida ao exemplo da última questão) definida em $\mathbb{R}$ que n-vezes derivável, mas cuja n-ésima derivada não é contínua em 0.

   (ii) Encontre uma função definida em $\mathbb{R}$ que é derivável em $\mathbb{R}$, mas tal que exista uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ com $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ mas

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = \infty.$$

10. Se f é três vezes derivável e $f'(x) \neq 0$, a derivada de Schwarz de f em x define-se como

$$\mathcal{D}f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2.$$

(a) Demonstre que

$$\mathcal{D}(f \circ g) = (\mathcal{D}f \circ g) \cdot {g'}^2 + \mathcal{D}g.$$

(b) Demonstre que se $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ com $ad - bc \neq 0$, então $\mathcal{D}f = 0$. Como consequência, temos que $\mathcal{D}(f \circ g) = \mathcal{D}g$.

11. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em I°, onde I é um intervalo. Prove que f é Lipschitz contínua em I se, e somente se, f' é limitada em I°. (Dica: pode usar o teorema de Cauchy).

12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável. Prove que $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$. Este é o método de diferença centrada utilizado em análise numérica.

13. (a) Sejam $a < b$ números reais, e seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função que é ambos contínua e estritamente monótona crescente. Demonstre que f é uma bijeção de $[a, b]$ sobre $[f(a), f(b)]$, e que o inverso $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ é ambos contínua e estritamente monótona crescente. Dica : para mostrar que f^{-1} é contínua, utilize a definição δ, ε de continuidade.

(b) Mostre que se $n \in \mathbb{N}$, a função $f(x) = x^n$ é estritamente monótona cresente em $[0, R]$, então define uma bijeção de $[0, R]$ sobre $[0, R^n]$. Assim, podemos definir a função $f^{-1}(x) = x^{1/n}$ como a função inversa de f.

(c) Demonstre que f^{-1} é contínua em $[0, R^n]$, derivável em $(0, R^n)$ e $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ para todo $x \in (0, R^n)$.