Instituto de Matemática - IM-UFRJ
Análise I/Análise Real - MAA240/MAW475
Simulação da Segunda Prova - 07/06/2021

TEMPO DE PROVA: 2,0h

Questão 1: (2.5 pontos)
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que f é contínua em $0 \in \mathbb{R}$ se, e somente se, f contínua em $\mathbb{R}$.

Questão 2: (2.5 pontos)
Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua em I e derivável em I°, onde I é um intervalo. Prove que f é Lipschitz contínua em I se, e somente se, f' é limitada em I°.

Questão 3: (2.5 pontos)
Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função definida e derivável em $[a,b]$. Se $f'(a) < 0 < f'(b)$, demonstre que existe um ponto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Questão 4: (2.5 pontos)
Considere a função $f(x)$, com $x \in \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é irracional,} \\ p \operatorname{sen}(\frac{1}{q}), & \text{se } x = \frac{p}{q} \text{ onde } q \geq 1 \text{ e } p \text{ são inteiros com } mdc(p,q) = 1. \end{cases}$$

Para que pontos f é contínua?

Questão 5: (2.5 pontos)
Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto fechado e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função definida em A. Prove que f é contínua em A se, e somente se, para todo subconjunto fechado $K \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(K) \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto fechado.