EDO: Capítulo 2 - Teoria Local

Prof. Alexander Arbieto

10 de setembro de 2008

1 Introdução

Antes de passar para o começo da teoria, iremos definir certos espaços de funções, com suas respectivas normas, que serão úteis mais tarde.

Definição 1.1. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $k \geq 0$ e E um espaço vetorial normado, com norma $\|.\|_E$ e de dimensão finita. O espaço de funções C^k é o espaço vetorial $C^k_t(I \to E) = \{u : I \to E; u \in C^k\}$ com norma

$$\|u\|_{C^k_t} = \sum_{j=0}^{k} \|\partial_t^j u\|_{L^\infty_t(I\to E)}.$$

Onde:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty(I\to E)} &= \sup_{x\in E} ess\, \|f(x)\|_E \\ &= \min\{M; Leb(\{x \in E; \|f(x)\|E > M\} = 0\}. \end{aligned}$$

Onde Leb é a medida de Lebesgue na reta.[1]

Analogamente definimos os espaços $C^k_x(\mathbb{R}^n \to E)$ e $C^k_{t,x}(I \times \mathbb{R}^n \to E)$.

Note que se I não é compacto, u pode pertencer a $C^k_{t,x}$ mas ter norma infinita. Nesse caso diremos que $u \in C^k_{t,loc}(I \to X)$, ou seja, que u é tem norma C^k finita em compactos de I. Conceitos análogos valem para os outros espaços.

Definição 1.2. Seja (X, d_X) um espaço métrico, Y um espaço de Banach com norma $\|.\|_Y$. O espaço de funções Lipschitz é $C^{0,1}(X \to Y) = \{f : X \to Y;\, f \,\text{Lipschitz}\}$ munido com a norma:

$$\|f\|_{Lip^{0,1}} = \sup_{x\neq x'\in X} \frac{\|f(x) - f(x')\|_Y}{d_X(x, x')}.$$

E $\|f\|_{C^{0,1}} := \|f\|_{Lip^{0,1}} + \|f\|_{C^0}$.

[1] No caso em que f é contínua e limitada então $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in E} \|f(x)\|_E$.

Note que temos as inclusões:

$$C_x^1(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m) \subset Lip^{0,1}(R^d \to \mathbb{R}^m) \subset C_{loc}^0(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m).$$

Finalmente definimos de maneira análoga o espaço $Lip_{loc}^{0,1}(X \to Y)$ como o espaço de funções localmente Lipschitz.

2 Existência Local

A primeira vista, se temos uma equação definida em todo o domínio, inclusive definida para todo t real, o mais natural seria esperar que as soluções existissem para todo $t \in \mathbb{R}$. Porém o seguinte exemplo mostra que isto é otimista demais:

Exemplo 2.1. Considere a equação:

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = u(t)^2 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Mostra-se que se existir solução ela será única. Porém, no chute, descobrimos que $u(t) = \frac{1}{1-t}$ resolve a equação no intervalo $t < 1$. Mas esta solução explode (blow-up) em $t = 1$, e não tem continuação além de $t = 1$. Daí, pode ser que o intervalo de existência de soluções seja muito menor que o intervalo de definição da equação em si.[2]

Outro ponto, é que nossa noção de soluções de certa maneira é meio vaga ainda, vamos estabelecer noções precisas no caso autônomo pelo menos, e depois veremos as definições clássicas no caso não-autônomo.

2.1 O Caso Autônomo

Seja o problema:

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = F(u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

Onde $F : E \to E$ contínua, definida num espaço vetorial finito dimensional.

Definição 2.2. Dizemos que $u : I \to E$ definida em algum intervalo I contendo t_0 é uma solução:

- Clássica: Se $u \in C_{loc}^1(I \to E)$ resolve (1) como visto anteriormente.
- Forte: Se $u \in C_{loc}^0(I \to E)$ resolve (1) no sentido integral:

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} F(u(s))ds.$$

[2]Como o exemplo é real analítico, podería-se tentar estender meromorficamente a equação, mas para isso teria que complexificar o tempo e... bem deixa pra lá.

- Fraca: Se $u \in L^{\infty}(I \to E)$ resolve (1) no sentido das distribuições, isto é, para toda $\psi \in C^{\infty}(I, \mathbb{R})$ com suporte compacto temos que:

$$\int_I u(t)\psi(t)dt = u_0 \int_I \psi(t)dt + \int_I \psi(t) \int_{t_0}^{t} F(u(s))dsdt.$$

Veremos agora que como estamos em dimensão finita, as três noções são equivalentes. Notamos que em dimensão infinita (no caso de uma EDP), tal equivalência é falsa, o que dá muita dor de cabeça pros EDPistas, mas torna o trabalho muito mais interessante, do ponto de vista da teoria de existência.

Lema 2.3. *Se $F \in C^0_{loc}(E \to E)$ então as três noções de solução são equivalentes.*

Demonstração. Claramente o teorema fundamental do cálculo mostra que uma solução clássica é forte, e integração pura mostra que toda solução forte é fraca.

Seja então u uma solução fraca. Por definição, u é mensurável e limitada, logo $F(u)$ também é mensurável e limitada[3], por continuidade. Daí a função:

$$t \to \int_{t_0}^{t} F(u(s))ds$$

é Lipschitz, como u resolve a equação no sentido das distribuições, vemos que u é Lispchitz[4]. Daí a menos de modificar u num conjunto de medida nula, temos que u é forte. E portanto $F(u) \in C^0$ e o teorema fundamental do cálculo diz novamente que $u \in C^1_{loc}$ é solução clássica.

□

Iremos usar muito a noção de solução forte, mas antes disso, iremos dizer as vantagens de cada uma das formulações. O caso clássico é bom pra encontrar relações entre as derivadas da solução, por exemplo, achar leis de conservação (como energia conservada) ou como fórmulas de monotonicidade (como no caso da dinâmica de populações). O caso forte é robusto o suficiente para construir soluções via métodos de ponto fixo, também é bom para obter estimativas de regularidade e crescimento da soluções. O caso fraco é bom para construir soluções por métodos de compacidade, isto é obter funções que se parecem com soluções e tentar passar o limite, o teorema de Arzelá-Ascoli é um exemplo de um teorema de compacidade.

Para ilustrar o método vamos estabelecer um teorema de existência mais fraco, mas que contêm o mecanismo geral:

Teorema 2.4 (Mini-Picard: Existência)**.** *Seja $F \in Lip^{0,1}(E \to E)$ com $\|F\|_{Lip^{0,1}} = M < \infty$, isto é, globalmente Lipschitz. Tome $T < \frac{1}{M}$ então para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ e $u_0 \in E$ existe uma solução forte (logo clássica) $u : I \to E$ de (1) onde $I = [t_0 - T, t_0 + T]$.*

[3] Em dimensão infinita este argumento falha, pois fechados limitados não são necessariamente compactos.

[4] Basta escolher ψ's apropriadas, via aproximações da identidade ou mollifiers tais que $u(t_0) = \lim \int u(t)\psi_n(t)dt$.

Demonstração. Seja $\Phi(u)(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} F(u(s))ds$. O primeiro passo é notar que Φ leva o espaço de Banach $C^0(I \to E)$, munido com a norma C^0, nele mesmo.

O segundo passo é notar que u é solução forte se, e só se, u for ponto fixo de Φ.

O terceiro passo é obter uma certa contração de Φ, aqui entra em cena alguma limitação do campo F, no caso sua norma Lipschitz:

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_E &= \|\int_{t_0}^{t} F(u(s)) - F(v(s))ds\| \\ &\leq M\|u - v\|_{C^0(I\to E)}T. \end{aligned}$$

Como $TM < 1$ então Φ é uma contração e podemos usar o lema das contrações(ver apêndice) e obter um ponto fixo para Φ. □

De fato a prova do lema das contrações dá um algoritmo para construir soluções. Tome $u_0(t) \equiv u_0$, e em seguida defina soluções aproximadas:

$$u_n(t) = \Phi(u_{n-1}(t)) = u_0 + \int_{t_0}^{t} F(u_{n-1}(s))ds.$$

O Lema das contrações e a prova do teorema anterior dizem que $u_n \to u$ uniformemente e u é solução. Tal método é conhecido como método de iteração de Picard e é um dos mais úteis em EDPs.

Outra observação é que a norma do espaço não foi mencionada, isto vem do fato que em dimensão finita todas as normas são equivalentes. Mas para EDPs a escolha da norma pode ser um problema fundamental.

Note que usamos que o campo era globalmente Lipschitz, isso parece ser um pouco demais, e de fato o é:

Teorema 2.5 (Médio-Picard: Exsitência). *Dado $t_0 \in R$, $\Omega \subset E$ não vazio, $N_\varepsilon(\Omega) = \{u \in E; \exists v \in E$ tal que $\|u-v\|_E < \varepsilon\}$ e $\Omega_\varepsilon = \overline{N_\varepsilon(\Omega)}$. Seja $F : E \to E$ tal que $\|F\|_{Lip^{0,1}(\Omega_\varepsilon)} = M < \infty$ e F é limitada por $A > 0$ em Ω_ε. Tome $0 < T < \min(\frac{\varepsilon}{A}, \frac{1}{M})$ e $I = [t_0 - T, t_0 + T]$, então para todo $u_0 \in \Omega$ existe $u : I \to \Omega_\varepsilon$ solução forte de 1. Além disso os mapas de solução: $S_{t_0}(t) : \Omega \to E$ e $S_{t_0} : \Omega \to C^0(I \to E)$ dados por $S_{t_0}(t)(u_0) = u(t)$ e $S_{t_0}(u_0) = u$ são Lipschitz com norma Lipschitz menor que $\frac{1}{1-TM}$.*

Demonstração. Vamos tentar imitar os passos anteriores. Novamente tomamos um $u_0 \in \Omega$ e definimos $\Phi_{u_0}(u)(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} F(u(s))ds$. Mas agora note que o espaço de Banach é $C^0(I \to \Omega_\varepsilon)$, logo para obter o passo 1 precisamos mostrar que este espaço é preservado. Isto é obtido usando a limitação de F:

$$\|\Phi_{u_0}(u)(t) - u_0\| \leq A.T < \varepsilon.$$

O primeiro passo está completo.

Os mesmos cálculos feitos no mini-Picard mostram que Φ_{u_0} é uma contração com taxa $C = TM < 1$. Logo temos a existência do ponto fixo u que é uma solução forte.

Finalmente se $u_0, v_0 \in \Omega$ e as soluções encontradas são u e v, temos que $\Phi_{u_0}(u) = u$ e:

$$\Phi_{u_0}(v) = \Phi_{v_0}(v) + u_0 - v_0 = v + u_0 - v_0.$$

Logo $u - v = \Phi_{u_0}(u) - \Phi_{u_0}(v) + u_0 - v_0$. Daí temos que:

$$\|u - v\|_{C^0} \leq C\|u - v\|_{C^0} + \|u_0 - v_0\|_E.$$

E portanto $\|u-v\|_{C^0} \leq \frac{1}{1-C}\|u_0 - v_0\|_E$. Daí os mapas de solução são Lipschitz.

□

A equação integral da EDO diz que a solução no tempo t sofre a ação do campo F somente por onde ela passou no tempo $t_0 < s < t$, portanto a prova do teorema ensina que para resolver a equação, não é preciso ter um controle global sobre o campo F e sim apenas por onde a solução irá passar caso ela exista. Este tipo de pensamento é muito útil ao tentar construir soluções de EDPs.

Estamos quase felizes com a teoria de existência local, exceto por duas coisas, primeiro não falamos nada do caso não-autônomo, mas poderiamos reduzi-lo ao caso autônomo como vimos antes. Outra coisa que incomoda é que o intervalo de existência depende de sabermos a norma Lipschitz do campo, isso pode ser difícil, mais simples seria apenas achar uma limitação pro campo. E é isso que faremos agora, de fato, o intervalo ficou pequeno, porque para apresentarmos melhor as idéias pedimos que o mapa Φ fosse uma contração, mas o lema das contrações diz que basta que um iterado Φ^n seja uma contração, isso permitirá aumentarmos um pouco mais o intervalo de existência local. Isto será feito na próxima seção.

2.2 Existência local: O caso não-autônomo e o caso não Lipschitz

Nesta seção prcuramos soluções de uma equação definida em $\Omega = I_a \times B_b = [t_0 - a, t_0 + a] \times B[x_0, b]$, onde $B[x_0, b]$ é a bola fechada em E com centro x_0 e raio $b > 0$. Diremos que F é Lipschitz na segunda variável se existir K tal que $\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq K\|x - y\|$.

Teorema 2.6 (Picard: Existência)**.** *Se $F : \Omega \to E$ é contínua e Lipschitz na segunda variável tal que $\|F\|_{C^0} \leq M$ em Ω então existe um solução clássica de:*

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = F(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{2}$$

definida em $I = [t_0 - T, t_0 + T]$ para todo $T < \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Demonstração. Definimos novamente $\Phi(u)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,u(s))ds$. Novamente o primeiro passo é mostrar que o espaço $C^0(I \to B_b)$ é preservado. Isso segue da limitação do campo:

$$\|\Phi(u)(t) - u_0\| \leq MT < b.$$

Novamente um ponto fixo de Φ é uma solução forte. Porém, o terceiro passo não é válido de antemão, não sabemos que Φ é contração porém afirmamos que se K é a constante Lipschitz de F, para todo n temos:

$$\|\Phi^n(u)(t) - \Phi^n(v)(t)\|_E \leq \frac{K^n|t-t_0|^n}{n!}\|u-v\|_{C^0}.$$

Procedemos por indução, para $n = 0$ ela é óbvia e se vale para n então:

$$\begin{aligned}
\|\Phi^{n+1}(u)(t) - \Phi^{n+1}(v)(t)\| &= \|\Phi(\Phi^n(u))(t) - \Phi(\Phi^n(v))(t)\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|F(s,\Phi^n(u)(s)) - F(s,\Phi^n(v)(s))\|ds \\
&\leq K\int_{t_0}^{t} \|\Phi^n(u)(s) - \Phi^n(v)(s)\|ds \\
&\leq K\int_{t_0}^{t} \frac{K^n(t_0-s)^n}{n!}\|u-v\|_{C^0}ds \\
&= \frac{K^{n+1}|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}\|u-v\|_{C^0}.
\end{aligned}$$

Agora, se como a série de $\frac{K^nT^n}{n!}$ converge[5] temos que se n é grande então $\frac{K^nT^n}{n!} < 1$ e portanto Φ^n é uma contração. Novamente pelo lema das contrações temos a existência de uma solução forte. $\square$

Note que pelo teorema fundamental do cálculo e a regra da cadeia, se F é C^k então a solução u é C^1 (prove isso!), e portanto se F for C^∞ a solução será $C\ \infty$ também, ou seja a própria equação tenta regularizar a solução enquanto o campo deixar. O próximo exercício da informação sobre a regularidade da solução no caso em que o campo é analítico.

Exercício 1 (O Teorema de Cauchy-Kowalevski). Seja $k \geq$ e $F : E^k \to E$ real analítica e $t_0 \in \mathbb{R}$. Dados $u_0, \ldots, u_{k-1} \in E$ existe I um intervalo aberto contendo t_0 e uma solução real analítica $u : I \to E$ do problema:

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t^k u(t) = F(u(t), \partial_t u(t), \ldots, \partial_t^{k-1}u(t)) \\ u(t_0) = u_0, \ldots, \partial_t^{k-1}u(t_0) = u_{k-1} \end{array} \right. \tag{3}$$

Dica: Reduza a equação para primeira ordem, com $t_0 = 0$ e $u_0 = 0$. Por indução obtenha a estimativa a priori $\|\partial_t^m u(0)\| \leq K^{m+1}m!$ para todo $m \geq 0$ com K suficientemente grande dependendo de F. Defina então $u(t) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{\partial_t^m u(0)}{m!}t^m$,

[5] Com soma e^{KT}.

note que isto define uma função analítica em algum intervalo aberto contendo t_0, $u : I \to E$. Mostre também que $\partial_t u(t) - F(u(t)$ é analítica em I e que se anula em t_0 assim como todas suas derivadas. Logo, por analiticidade u é solução da equação.

Uma pergunta natural é se a hipótese Lipschitz é realmente necessária. Vimos que ela implica que o operador integral se torna uma contração. Porém, campos contínuos podem ser aproximados por campos suaves, e portanto é natural se perguntar se as soluções desses campos suaves (que existem por Picard) se aproximam de uma solução da equação original. Isto é o:

Teorema 2.7 (Peano). *Se F é um campo contínuo e $\|F\|_{C^0} < M$ em $\Omega = I_a \times B_b$ então existe uma solução no intervalo $I = [t_0 - T, t_0 + T]$ onde $0 < T < \min\{a, \frac{b}{M}\}$.*

Demonstração. Lembre que existe uma sequência F_n de mapas C^∞ convergindo uniformemente em Ω para F.[6] Por convergência uniforme podemos supor que $\|F_n\|_{C^0} < M$ para todo n. Sejam u_n solução definidas em I[7] do problema:

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = F_n(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{4}$$

Mas então novamente usando a equação integral temos que:

$$\|u_n(t) - u_n(t')\| \leq M|t - t'|$$

e que $\|u_n(t) - u_0\| \leq b$. Logo u_n é uma sequência uniformemente equicontínua e limitada. Por Arzelá-Ascoli, existe uma subsequência, que continuaremos chamando de u_n, e uma função $u : I \to B_b$ tal que $u_n \to u$ uniformemente. Por continuidade, $F_n(s, u_n(s)) \to F(s, u(s))$ uniformemente, em particular as integrais convergem. Tomando limite nas equações integrais:

$$u_n(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} F_n(s, u_n(s))ds.$$

Mostramos que u é solução. □

O seguinte corolário é imediato do teorema de Peano:

Corollário 2.8. *Se Ω é aberto de $\mathbb{R} \times E$ e $F : \Omega \to E$ um campo C^0, seja $C \subset \Omega$ tal que $\|f\| < M$ em Ω_0 onde $C \subset \Omega_0 \subset \Omega$ e $d(C, \Omega - \Omega_0) > 0$ então existe T tal que para todo $(t_0, u_0) \in C$ existe solução em $I = [t_0 - T, t_0 + T]$ do problema:*

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = F(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{5}$$

[6] Note que Ω é compacto, a prova disto é feita usando convolução com aproximações da identidade, porém podemos tomar f_n's como polinômios pelo teorema de Weierstrass

[7] Aqui vem a força do teorema de Picard, o intervalo de solução não depende mais da norma Lipschitz do campo, somente da norma C^0, de fato, a norma Lipschitz pode explodir ao tomarmos $n \to \infty$ fazendo os intervalos de definição do mini-picard degenerarem.

2.3 Existência local: O caso mensurável

Veremos nesta seção que a continuidade total do campo não é realmente necessária para existência de soluções. Para isto, temos que estender o conceito de solução neste caso. As funções absolutamente contínuas desempenharão um papel fundamental.

Definição 2.9. Seja (X,d) um espaço métrico. Uma aplicação $\varphi : I \to (X,d)$ definida num intervalo I é absolutamente contínua se para todo $\varepsilon > 0$ existe δ tal que:

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k| < \varepsilon \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} d(f(y_k), f(x_k)).$$

Exercício 2. Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções absolutamente contínuas. Mostre que:

- $f \pm g$ e fg são absolutamente contínuas, e se $f \neq 0$ então $\frac{1}{f}$ é absolutamente contínua.
- f é uniformemente contínua.
- Toda função Lipschitz é absolutamente contínua
- $f'(t)$ existe para quase todo ponto $t \in I$[8]
- Se X tem medida nula em $\mathbb{R}$ então $f(X)$ tem medida nula.

Como podemos derivar em quase todo ponto, faz sentido se perguntar se a equação é satisfeita em quase todo ponto:

Definição 2.10. Seja Ω aberto de $\mathbb{R} \times E$ e $F : S \to E$ uma função qualquer. Dizemos que $u : I \to E$, definida em algum intervalo I, e solução extendida da EDO gerada por F se u é absolutamente contínua, para todo t temos $(t, u(t)) \in \Omega$ e para quase todo $t \in I$ temos:

$$\partial_t u(t) = F(t, u(t)).$$

Teorema 2.11 (Carathéodory). *Seja F definida em $\Omega = I_a \times B_b = [t_0 - a, t_0 + a] \times B[u_0, b]$, mensurável em t. contínua em x e tal que existe uma função $m \in L^1$ em I_a tal que $|f(t,x)| \leq m(t)$ para todo $(t,x) \in \Omega$. Então existe φ e $\beta > 0$ uma solução estendida em $|t - t_0| \leq \beta$ com $u(t_0) = u_0$*

A prova do teorema segue um argumento interessante, novamente a solução será obtida por limite de soluções aproximadas, porém ao contrário do método de Picard que fabrica a próxima solução aproximada uma vez que tem conhecimento da anterior, neste método a solução aproximada se "constrói´´ conforme se sabe a construção dela em pedaços previamente construídos. De certa forma é uma construção "online´´.

[8] Isto é o complementar deste conjunto tem medda de Lebesgue nula.

Demonstração. Vamos construir a solução para $t \geq t_0$, a construção é análoga no caso $t \leq t_0$. Defina $M(t)$ como identicamente nula em $t < t_0$ e como:

$$M(t) := \int_{t_0}^{t} m(s)ds.$$

para $t \in [t_0, t_0 + a]$. Note que M é contínua, não-decrescente (pois $m \geq 0$) e $M(t_0) = 0$. Por continuidade existe $\beta > 0$ tal que $(t, x_0 \pm M(t)) \in \Omega$ se $t_0 \leq t \leq t_0 + \beta \leq t_0 + a$. Vamos definir a sequência de soluções aproximadas como:

$$u_j(t) = \begin{cases} u_0 & \text{se } t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{\beta}{j} \\ u_0 + \int_{t_0}^{t-\frac{\beta}{j}} F(s, u_j(s))ds & \text{se } t_0 + \frac{\beta}{j} < t \leq t_0 + \beta \end{cases}$$

Antes de analisar tal função, note como ela é construída. Primeiramente $u_1 \equiv u_0$. Agora, para u_2 a primeira equação diz quanto vale u_2 em $[t_0, t_0 + \frac{\beta}{2}]$, de fato ela vale u_0, uma vez que sabemos isso, podemos calcular u_2 no segundo intervalo de definição $[t_0 + \frac{\beta}{2}, t_0 + \beta]$, pois ao integrar, só precisamos saber quanto vale u_2 no primeiro intervalo.

Da mesma forma, a primeira equação nos diz quanto vale u_3 em $[t_0, t_0 + \frac{\beta}{3}]$, usando a segunda equação descobrimos quando vale u_3 em $[t_0 + \frac{\beta}{3}, t_0 + \frac{2\beta}{3}]$, e uma vez sabendo isso, podemos calcular, usando novamente a segunda equação, u_3 no intervalo $[t_0 + \frac{2\beta}{3}, t_0 + \beta]$. O procedimento geral fica claro então.

Dessa forma podemos obter por recorrência uma estimativa da seguinte forma. Primeiro em $[t_0, t_0 + \frac{\beta}{j}]$ temos que $|u_j(t) - u_0| = 0 \leq M(t - \frac{\beta}{j})$, já que M é positiva. Por outro lado usando a limitação de f por m para estimar a integral na segunda equação temos que em $[t_0 + \frac{\beta}{j}, t_0 + \frac{2\beta}{j}]$ enttão $|u_j(t) - u_0| \leq M(t - \frac{\beta}{j})$. E o mesmo se aplica nos intervalos $[t_0 + \frac{k\beta}{j}, t_0 + \frac{(k+1)\beta}{j}]$, obtendo $|u_j(t) - u_0| \leq M(t - \frac{\beta}{j})$.

Logo, se $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + \beta]$, por desigualdade triangular:

$$|u_j(t_1) - u_j(t_2)| \leq |M(t_1 - \frac{\beta}{j}) - M(t_2 - \frac{\beta}{j})| \leq \varepsilon.$$

Se tomarmos $|t_1 - t_2| < \delta$ por continuidade uniforme de M.

Portanto $\{u_j\}$ é uniformemente equicontínua em $[t_0, t_0 + \beta]$, pela estimativa obtida anteriormente, a sequência tambem é uniformemente limitada, pois M é limitada pela integrabilidade de m. E portanto por Arzela-Ascoli, existe uma subsequencia $u_{j_k} \to u$ uniformemente. Note que como f é contínua na segunda variável, fixado t temos que $f(t, u_{j_k}(t)) \to f(t, u(t))$, e como $f(t, u_{j_k}(t))$ é dominada por m que é integrável, o teorema da convergência dominada:

$$\lim_{k \to \infty} \int_{t_0}^{t} f(s, u_{j_k}(s))ds = \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \beta].$$

Agora podemos escrever u_{j_k} da seguinte maneira:

$$u_{j_k}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_{j_k}(s))ds - \int_{t - \frac{\beta}{j_k}}^{t} f(s, u_{j_k}(s))ds.$$

Passando o limite quando $k \to \infty$ temos, a ultima integral se anula e temos:

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds.$$

E o teorema está provado, pelo teorema fundamental do cálculo para funções absolutamente contínuas.

$\square$