

Topologia Diferencial: Capítulo 4 - Teoria do Grau

Prof. Alexander Arbieto

3 de março de 2008

1 Introdução

Neste capítulo iremos estudar a noção de grau de uma aplicação entre variedades orientáveis, bem como a noção de grau módulo 2 no caso geral. Para isto iremos primeiramente revisar os conceitos de formas de volume em uma variedade Riemanniana e homotopias entre aplicações contínuas.

2 Formas de Volume

Seja E um espaço vetorial de dimensão n então uma r -forma nada mais é do que uma aplicação $f : E^r \rightarrow \mathbb{R}$ multilinear. Por exemplo funcionais lineares (isto é que moram no espaço dual E^*) são exemplos de 1-formas.

Exemplo 2.1. Mais geralmente se temos $\{f^i \in E^*\}_{i=1}^r$ então o produto deles é uma r -forma: $f : E^r \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(v_1, \dots, v_r) = f_1(v_1) \dots f_r(v_r)$.

Lembre que para toda base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E existe a base dual $\{e^1, \dots, e^n\}$ de E^* dada por $e^j(e_i) = \delta_i^j$ onde δ_i^j vale 0 se $i \neq j$ e 1 se $i = j$.

Definição 2.2. $\mathcal{L}_r(E) = \{f : E^r \rightarrow \mathbb{R}; \text{ uma } r\text{-forma}\}$. Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de E e $\{e^1, \dots, e^n\}$ é sua base dual então o conjunto de r -formas $\{e^{i_1} \dots e^{i_r}\}_{i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}}$ é uma base para $\mathcal{L}_r(E)$ (prove!) e portanto $\dim(\mathcal{L}_r(E)) = n^r$.

Definição 2.3. Dizemos que $f \in \mathcal{L}_r(E)$ é alternada se sempre que $i \neq j$ temos que $f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$. Denotamos por $\Lambda^r(E)$ o subespaço formado pelas r -formas alternadas.

Exercício 1. Mostre que uma r -forma f é alternada sempre que $f(v_1, \dots, x, \dots, x, \dots, v_n) = 0$.

Exemplo 2.4. Seja $f^1, \dots, f^r \in E^*$ então o produto exterior f^1, \dots, f^r é uma r -forma alternada definida por:

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^r(v_1, \dots, v_r) := \det(f^i(v_j)).$$

Exercício 2. Mostre que se e^1, \dots, e^n é base dual de e_1, \dots, e_n então $\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n}$ é base de $\Lambda^r(E)$ e portanto $\dim(\Lambda^r(E)) = \binom{n}{r}$. Note também que se $r > n$ então $\Lambda^r(E) = \{0\}$. Para isto, note que se temos $f^{i_j} = f^{i_k}$ e $j \neq k$ então $f^{i_1} \wedge \dots \wedge f^{i_r} = 0$.

Observação 2.5. NÃO é verdade que toda r -forma alternada é da forma $f^{i_1} \wedge \dots \wedge f^{i_r}$, por exemplo mostre que em \mathbb{R}^3 temos que $e^1 \wedge e^2 + e^2 \wedge e^3$ não se escreve dessa forma.

Definição 2.6. Se $A : E \rightarrow F$ é linear então existe $\Lambda^r A : \Lambda^r(F) \rightarrow \Lambda^r(E)$ dada por:

$$(\Lambda^r A(f))(v_1, \dots, v_r) = f(Av_1, \dots, Av_r).$$

Quando $n = 1$ note que $\dim(\Lambda^n(E)) = \binom{n}{n} = 1$. Logo se e_1, \dots, e_n é base de E e e^1, \dots, e^n é a base dual então $e = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$ é uma n -forma. Por outro lado se $f^1, \dots, f^n \in E^*$ então temos que $f^i = \sum \alpha_j^i e^j$, e portanto temos que $f^1 \wedge \dots \wedge f^n = \det(\alpha_j^i) e^1 \wedge \dots \wedge e^n$. Daí segue que $f^1 \wedge \dots \wedge f^n \neq 0$ se, e só se, f^i 's são linearmente independentes em E^* . Por outro lado dados $v_1, \dots, v_n \in E$ e $f \neq 0$ uma n -forma em E então $f(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ se, e só se, os v_i 's são linearmente independentes.

Seja então e_1, \dots, e_n uma base de E , f_1, \dots, f_n base de F e $A : E \rightarrow F$ cuja matriz nessas bases é (α_j^i) então $\Lambda^n(A) : \Lambda^n(F) \rightarrow \Lambda^n(E)$ é uma aplicação entre espaços de dimensão 1 e portanto sua matriz na base formada pelas n -formas associadas é $(\det(\alpha_j^i))$.

Agora que fizemos o estudo em espaços vetoriais podemos passar para variedades diferenciáveis. Seja então M uma variedade, $p \in M$ e $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma carta sobre p , então sabemos que $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ é uma base de $T_p M^1$ e seja $\{dx^i\}$ sua base dual. Então temos que $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ é base de $\Lambda^n(T_p M)$.

Como a dimensão é 1 temos que para toda $w_p \in \Lambda^n(T_p M)$ existe um número a tal que $w_p = a dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Para calcular a basta notar que:

$$w_p \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) = a dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) = a \det(dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)) = a \det(\delta_j^i) = a.$$

Por outro lado, se $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ é outra carta sobre p então temos que $w_p = b dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$. Para ver a relação entre a e b , façamos o seguinte chamemos de x^i as coordenadas de φ e de y^j as coordenadas de ψ , isto é $\varphi(x) = (x^1(x), \dots, x^n(x))$ e $\psi(x) = (y^1(x), \dots, y^n(x))$.

Exercício 3. Mostre que $dy^j = \sum_j (\frac{\partial y^j}{\partial x^i}) dx^i$. e com isso temos que $a = b \det(\frac{\partial y^i}{\partial x^j})$.

Definição 2.7. Uma n -forma diferenciável é uma aplicação $w : M \rightarrow \Lambda^n(TM)$, isto é, tal que para todo $p \in M$ temos que $w_p := w(p) \in \Lambda^n(T_p M)$. E se $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma carta local então $w_p = a(p) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. A classe de diferenciabilidade de w em p é por definição a classe de diferenciabilidade de a em p . O conjunto de n -formas em M será denotado por $\Lambda^n(M)$.

Vejamos agora como transportar formas através de aplicações diferenciáveis:

¹Lembrando, $\frac{\partial}{\partial x^i} = D\varphi^{-1}(\varphi(p)).e_i$.

Definição 2.8. Se $f : M^n \rightarrow N^n$ é C^∞ e w uma n -forma em N então o pull back de w por f é a n -forma f^*w dada por:

$$f^*w_p(v_1, \dots, v_n) = w_{f(p)}(Df(p)v_1, \dots, Df(p)v_n).$$

Note que o pull back define uma aplicação $f^* : \Lambda^n(N) \rightarrow \Lambda^n(M)$. Em cartas locais $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que $\varphi(U) \subset V$ temos que se $w = a dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$ então $f^*w = a \cdot \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$.

Vejam agora como integrar n -formas sobre uma variedade orientável. Começaremos pelo caso local. Seja $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma carta local tal que $w|_{M-U} = 0$ e $x(U)$ é limitado em \mathbb{R}^n . Então temos que $w = a dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ e $a : U \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $a(p) \rightarrow 0$ se $p \rightarrow \partial U$. Logo podemos supor que a se estende a M como $a|_{M-U} = 0$ de maneira contínua. Então definimos:

$$\int_M w := \int_{x(U)} a(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n.$$

Obviamente temos que mostrar que este número independe da carta tomada. Seja então $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ outra carta tal que $w|_{M-V} = 0$. Se $W = U \cap V$ temos que para todo $p \in M - W$ vale $w_p = 0$. Além disso podemos escrever $w = b dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$. E portanto:

$$\begin{aligned} \int_{x(U)} a dx^1 \dots dx^n &= \int_{x(W)} dx^1 \dots dx^n = \int_{x(W)} b(y(x)) \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) dx^1 \dots dx^n = \\ &= \int_{y(W)} b dy^1 \dots dy^n = \int_{y(V)} b dy^1 \dots dy^n. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Vejam agora globalmente, porém quando M é compacta. Seja $(x_i, U_i)_{i=1}^r$ cobertura por cartas locais tais que $x_i(U_i)$ são limitadas e seja ξ_i partição da unidade associada. Defina $w_i = \xi_i \cdot w$ e observe que ela se anula em $M - U_i$. Então definimos $\int_M w := \sum_{i=1}^r \int w_i$. Neste caso temos que mostrar que este número independe da cobertura e da partição da unidade tomada.

Seja então (y_j, V_j) cobertura finita por cartas tais que $y_j(V_j)$ é limitada e λ_j partição da unidade associada a esta cobertura. Denote por $w'_j = \lambda_j w$ e $w_{ij} = \xi_i \lambda_j w$. Ora, $\sum \lambda_j = \sum \xi_i = 1$ e portanto $\sum_i w_{ij} = w'_j$ e $\sum_j w_{ij} = w_i$. Logo:

$$\sum_i \int w_i = \sum_i \int \sum_j w_{ij} = \sum_j \int \sum_i w_{ij} = \sum_j \int w'_j.$$

Como queríamos demonstrar.

Exercício 4. Mostre que a integral é linear: $\int_M w + a\tilde{w} = \int_M w + a \int_M \tilde{w}$ onde $a \in \mathbb{R}$.

Para o caso não compacto, precisamos da ajuda da orientação.

Definição 2.9. Seja M orientada. Dizemos que uma n -forma w em M é positiva (resp. ≥ 0) se para toda carta $x : U \rightarrow M$ positiva, escrevendo $w = adx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ temos $a > 0$ (resp. $a \geq 0$). Note que esta noção não depende da escolha da carta (desde que seja positiva).

Se $Supp(w)$ for compacto, a integral de w será definida como antes. Senão, seja $(U_i, x_i)_{i=1}^{\infty}$ cobertura por cartas tais que $x_i(U_i)$ é limitada e ξ_i partição da unidade associada. Então por definição $\int_M w = \sum \int_M \xi_i \cdot w$. Se esta série convergir, diremos ue a forma é integrável. Novamente temos que mostrar que a convergência e a soma da série independem da escolha das cartas e da partição da unidade. Para isso precisamos de dois lemas de análise na reta:

Lema 2.10. Se $\sum_i \sum_j a_{ij}$ converge e $a_{ij} \geq 0$ então $\sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_j \sum_i a_{ij}$.

Lema 2.11. Se U é limitado e $f_k \geq 0$ são funções contínuas e $f = \sum f_k$ então $\int_U f = \sum \int f_k$.

Com isso seja (y_j, V_j) outra cobertura de M tal que $y_j(V_j)$ é limitada e seja λ_j partição da unidade então:

$$\begin{aligned} \sum_i \int \xi_i w &= \sum_i \int \sum_j \lambda_j \xi_i w = \sum_i \sum_j \int \lambda_j \xi_i w = \\ &= \sum_j \sum_i \int \lambda_j \xi_i w = \sum_j \int \sum_i \xi_i \lambda_j w = \sum_j \int \lambda_j w. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Finalmente se w é positiva podemos criar duas n -formas positivas da seguinte maneira, se a é o coeficiente de w numa carta local então declaramos que $\max\{a, 0\}$ é o coeficiente de w^+ e $\max\{-a, 0\}$ é o coeficiente de w^- . Note que mesmo que w seja diferenciável, w^+ e w^- são apenas contínuas. E além disso $w = w^+ - w^-$.

Definição 2.12. Numa variedade M orientada, dizemos que w é integrável se w^+ e w^- são integráveis e dizemos que $\int_M w := \int_M w^+ - \int_M w^-$.

Exercício 5. Seja $w \geq 0$ uma forma contínua. Mostre que $\int_M w \geq 0$ (podendo divergir). E que se existe p tal que $w_p > 0$ então $\int_M w > 0$.

Teorema 2.13. Uma variedade M é orientável se, e só se, existe w uma n -forma diferenciável estritamente positiva. Além disso, podemos escolher w integrável.

Demonstração. Vamos supor que uma n -forma w existe tal que $w_p \neq 0$ para todo $p \in M$. Seja \mathcal{P} o conjunto de cartas da forma $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que U é conexa e se $w = adx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ nesta carta então $a(p) > 0$ para todo $p \in U$. É um exercício simples para o leitor mostrar que \mathcal{P} é um atlas. Vamos mostrar que ele é coerente. Sejam $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas cartas em \mathcal{P} . Então w se escreve como $a(p)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ na carta x e como $b(y)dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$ na carta y . Sabemos que $b(p) = a(p) \det(\frac{\partial y^i}{\partial x^j})$. E como $a, b > 0$ temos que $\det(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}) > 0$, logo \mathcal{P} é coerente e portanto M é conexa.

Reciprocamente, se $\mathcal{P} = \{x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{\alpha=1}^\infty$ é um atlas coerente, tal que $x_\alpha(U_\alpha)$ é o cubo unitário. Podemos supor que \mathcal{P} é localmente finita. Seja $\{\xi_\alpha\}$ partição da unidade subordinada à \mathcal{P} . Vamos definir $w_p = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha^2} x_{i_\alpha}(p) dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n(p)$ (note que esta soma é finita). Então em uma carta $x_{beta} : U_\beta \rightarrow \mathbb{R}^n$ temos que $w|_{U_\beta} = (\sum_\alpha \frac{1}{\alpha^2} \varphi_\alpha \det(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j})) dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^n$. E o termo entre parênteses é positivo. Isto nos dá uma n -forma que nunca se anula. Logo em cada componente conexa o sinal de w não muda, se w for positiva em uma componente conexa não fazemos nada, caso contrário trocamos o sinal de w na componente conexa respectiva. Isto nos dá uma n -forma positiva e além disso $\int_M w < \sum_\alpha \frac{1}{\alpha^2}$ e portanto w é integrável. \square

Essencialmente uma n -forma permite definir a noção de volume de conjuntos de uma variedade. Porém quando a variedade é Riemanniana, a métrica permite falar de entidades geométricas, como o comprimento de vetores e o ângulo entre dois vetores, portanto permite falar de área de paralelogramos e mais geralmente de volumes de paralelepípedos em cada espaço tangente. Iremos ver agora que a uma métrica Riemanniana sempre podemos associar uma n -forma dito o elemento de volume, cuja noção de volume coincide com a noção de volume dada pela geometria da métrica Riemanniana.

Definição 2.14. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana orientada. Então vol é uma n -forma dada por $vol(v_1, \dots, v_n) = \pm \sqrt{\det(g(v_i, v_j))}$ onde o sinal é $+$ se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é base positiva e $-$ se tal base for negativa.

Exercício 6. Mostre que $\det(g(v_i, v_j))$ sempre é positivo (quando $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base) e que vol é multilinear. (Dica: Mostre que se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal positiva então $vol(v_1, \dots, v_n) = \det(g(v_i, e_j))$.)

Se $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma carta positiva então sabemos calcular o coeficiente de uma n -forma em relação a $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Ele é dado por:

$$vol(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}) = \sqrt{\det(g_{ij}(p))} =: \sqrt{g_p}.$$

Logo temos que $vol = \sqrt{g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ e portanto é tão diferenciável quanto a métrica for. Note também que o elemento de volume é uma forma positiva.

Diremos que o número $c = \int_M vol$ é o volume da variedade Riemanniana M . Se M é compacta, seu volume é sempre finito, porém o mesmo não necessariamente ocorre se M for não-compacta. Porém iremos mostrar que toda n -forma positiva é o elemento de volume de alguma métrica Riemanniana, e como sabemos que quando M é orientada existe uma n -forma positiva integrável então para tal métrica o volume será finito.

Teorema 2.15. *Toda variedade orientada M possui uma métrica Riemanniana de volume finito.*

Demonstração. Seja $w > 0$ uma n -forma e g_0 uma métrica Riemanniana qualquer em M . Vamos denotar o elemento de volume de g_0 por vol_0 . Como w e vol_0 são positivas, existe uma função positiva e diferenciável λ tal que

$w_p = \lambda(p)(vol_0)_p$. Seja então $g_p(u, v) := \lambda(p)^{\frac{2}{n}}(g_0)_p(u, v)$ uma nova métrica Riemanniana. Então w é o elemento de volume de g . \square

3 A vizinhança Tubular

Definição 3.1. Se $M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ uma superfície de classe C^k ($k \geq 1$) dizemos que $\overline{pa} = \{(1-t)p + ta; t \in [0, 1]\}$ é um segmento normal a M em $p \in M$ se $a - p \in (T_p M)^\perp$. O comprimento deste segmento é $\|p - a\|$. A bola normal de raio ε e centro p é então o conjunto:

$$B^\perp(p, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^{m+n}; \overline{px} \text{ é normal a } M \text{ em } p \text{ de comprimento menor que } \varepsilon\}.$$

Definição 3.2. Um número $\varepsilon > 0$ é um raio admissível para $X \subset M$ se $B^\perp(p, \varepsilon) \cap B^\perp(q, \varepsilon) = \emptyset$ se $p \neq q$ e p e q estão em X .

Teorema 3.3 (A vizinhança tubular de uma superfície compacta). *Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ uma superfície de classe C^k com $k \geq 2$. Então existe ε um raio admissível para M tal que $V_\varepsilon = \bigcup_{p \in M} B^\perp(p, \varepsilon)$ é um aberto de \mathbb{R}^{m+n} (dita a vizinhança tubular de M). Além disso, sabemos que para todo $x \in V_\varepsilon$ existe um único p tal que $x \in B^\perp(p, \varepsilon)$, e temos que a aplicação $\pi : V_\varepsilon \rightarrow M$ dada por $\pi(x) = p$ é de classe C^{k-1} .*

Demonstração. Vamos trabalhar primeiro no caso local. Como localmente a variedade é imagem inversa de um valor regular, existe parametrização $\varphi : V_0 \rightarrow V = viz(p) \subset M$ e n campos normais linearmente independentes de classe C^{k-1} . Como o método de ortonormalização de Gram-Schmidt é linear, podemos supor estes campos ortonormais e iremos chamá-los de $v_1, \dots, v_n : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$.

Seja então $\Phi : V_0 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ definida assim, se $x = (x_1, \dots, x_k)$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ então $\Phi(x, \alpha) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i(\varphi(x))$. Note que Φ é C^{k-1} . Agora a matriz Jacobiana de Φ em $(x, 0)$ tem como colunas os vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$ e $v_j(\varphi(x))$ com $i = 1, \dots, m$ e $j = m+1, \dots, m+n$. Como as primeiras colunas formam uma base de $T_{\varphi(x)}M$ e as últimas colunas formam uma base de $(T_{\varphi(x)}M)^\perp$ temos que $D\Phi(x, 0)$ é um isomorfismo.

Pelo teorema da função inversa temos que existe uma vizinhança $U_0 \times B^n(\varepsilon)$ de $(x_0, 0)$ e uma vizinhança $V_{\varepsilon ps}(U)$ de $p_0 = \varphi(x_0)$ onde $U = \varphi(U_0)$ tal que Φ é um difeomorfismo entre estas duas vizinhanças, note que este difeomorfismo leva os conjuntos $\{y\} \times B^n(\varepsilon)$ na bola normal de M no ponto $\varphi(y)$. Como os subconjuntos $\{y\} \times B^n(\varepsilon)$ são disjuntos e Φ é injetiva temos que ε é um raio admissível para U .

Note também que se π_1 é a projeção na primeira coordenada de $U_0 \times B^n(\varepsilon)$ então temos que $\pi \circ \Phi = \varphi \circ \pi_1$. Logo $V_\varepsilon(U)$ de fato é um aberto e $\pi : V_\varepsilon(U) \rightarrow U$ é de classe C^{k-1} .

Por compacidade temos uma cobertura finita de M , U_1, \dots, U_r com raios admissíveis $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$. Seja $\varepsilon < \varepsilon_i$ para todo $i = 1, \dots, r$ tal que 2ε é o número de Lebesgue dessa cobertura. Dados $p \neq q$ em M se ambos estão em algum U_i então

suas bolas normais de raio ε não se intersectam pois $\varepsilon < \varepsilon_i$. Caso contrário, $\|p - q\| \geq 2\varepsilon$ e pela desigualdade triangular quaisquer dois segmentos normais de raio menor que ε não podem se intersectar. Logo ε é um raio admissível para M .

Além disso, $V_\varepsilon(M) = \bigcup V_\varepsilon(U_i)$ é um aberto e como $\pi : V_\varepsilon(M) \rightarrow M$ é de classe C^{k-1} pois o é localmente. \square

Exercício 7. Dê um exemplo de uma superfície C^1 em \mathbb{R}^2 compacta que não admite um raio admissível.

Definição 3.4. A vizinhança tubular de M compacta é um produto se existe um difeomorfismo $h : M \times B^n(\varepsilon) \rightarrow V_\varepsilon(M)$ tal que se π_1 é a projeção na primeira coordenada de $M \times B^n(\varepsilon)$ então $\pi \circ h = \pi_1$ e para cada $p \in M$, h é uma isometria entre $\{p\} \times B^n(\varepsilon)$ e $B^\perp(p, \varepsilon)$.

Exemplo 3.5. A aplicação $h : S^1 \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times V_{\frac{1}{2}}(S^1)$ dada por $h(z, t) = (1-t)z$ mostra que a vizinhança tubular de S^1 de raio $\frac{1}{2}$ é um produto.

Note que a prova do teorema diz que localmente toda vizinhança tubular é um produto, mas globalmente isto não é sempre verdade. Isto é o que diz o seguinte:

Exercício 8. Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ uma superfície compacta de classe C^∞ . São equivalentes:

1. M é imagem inversa de algum valor regular a para alguma aplicação C^∞ $f : U \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$.
2. Existem n campos de vetores normais C^∞ linearmente independentes em toda M .
3. Existem n campos de vetores de classe C^∞ tais que para todo $p \in M$ estes campos geram um suplemento para $T_p M$.
4. Toda vizinhança tubular de M é equivalente a um produto.

É possível mostrar a existência da vizinhança tubular para superfícies não compactas, porém um raio admissível pode não existir em toda a superfície. De fato, o que pode ocorrer e que próximo ao “infinito” o raio admissível pode tender à zero, mesmo assim o fato dele ser positivo em cada ponto já é suficiente para garantir que a vizinhança tubular existe e é um aberto de \mathbb{R}^n :

Teorema 3.6. *Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ de classe C^k com $k \geq 2$, existe uma função $\varepsilon : M \rightarrow (0, +\infty)$ contínua tal que $V_\varepsilon(M) := \bigcup_{p \in M} B^\perp(p, \varepsilon(p))$ é um aberto de \mathbb{R}^{m+n} e $M \subset V_\varepsilon(M)$ e se $p \neq q$ então $B^\perp(q, \varepsilon(q)) \cap B^\perp(p, \varepsilon(p)) = \emptyset$.*

Além disso, o mapa π que leva $x \in V_\varepsilon(M)$ ao único $p \in M$ tal que $x \in B^\perp(p, \varepsilon(p))$ é de classe C^{k-1} .

Finalmente, para cada $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ e um homeomorfismo $h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times B^n$ tal que se π_1 é a projeção na primeira coordenada de $U \times B^n$ então $\pi_1 \circ h = \pi$.

Vamos dar uma idéia da prova deste teorema, os detalhes ficam para o leitor. Primeiramente mostra-se que todo compacto $K \subset M$ possui um raio admissível $\varepsilon_K > 0$. Para isto tome $L \subset M$ uma vizinhança compacta de K , pela prova do teorema da vizinhança tubular no caso compacto existe $\varepsilon_L > 0$ um raio admissível para L . Defina $\varepsilon_K = \frac{1}{2} \min\{\varepsilon_L, d(K, M - L)\}$, não é difícil ver que este é um raio admissível para K .

Com isso defina por indução uma sequência de compactos K_i que exaurem M^2 e números $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots > 0$ tais que para todo $p \in K_i$ e $q \in K_j$ e $p \neq q$ temos que $B^\perp(p, \varepsilon_i) \cap B^\perp(q, \varepsilon_j) = \emptyset$.³

Seja então $V(M) = \bigcup_i V_{\varepsilon_i}(K_i)$ e defina $\varepsilon : M \rightarrow (0, +\infty)$ como $\varepsilon(p) = d(p, \mathbb{R}^{m+n} - V(M))$. Como $0 < \varepsilon(p) \leq \varepsilon_i$ se $p \in K_i - K_{i-1}$ então $V_\varepsilon \subset V(M)$, logo todo $x \in V_\varepsilon(M)$ pertence a um único segmento normal a M . A abertura de $V_\varepsilon(M)$, assim como a regularidade de π e a estrutura local de produto (por homomorfismo), segue de argumentos semelhantes ao argumento local no caso compacto.

Uma observação é que pelos teoremas de regularização de funções contínuas é possível escolher ε com a mesma classe de diferenciabilidade de M , isto será usado no próximo exercício.

Novamente a propriedade de ser um produto globalmente não é geral, porém no caso não compacto a definição deve ser levemente modificada.

Definição 3.7. Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ de classe C^k com $k \geq 2$. A vizinhança tubular $V_\varepsilon(M)$ é um produto se existe um homeomorfismo $h : M \times B^n \rightarrow V_\varepsilon(M)$ tal que se π_1 é a projeção na primeira coordenada de $M \times B^n$ então $\pi \circ h = \pi_1$.

A mesma demonstração do exercício anterior permite mostrar:

Exercício 9. Se $M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é de classe C^∞ então são equivalentes:

1. $M = f^{-1}(a)$ onde a é um valor regular de alguma aplicação $C^\infty f : U \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$.
2. Existem n campos de vetores normais de classe C^∞ linearmente independentes em todo $p \in M$.
3. Toda vizinhança tubular de M é um produto.

Uma aplicação do exercício é que se a faixa de Möebius fosse orientável então a vizinhança tubular seria um produto, ou seja existiria $h : M \times (-1, 1) \rightarrow V_\varepsilon(M)$ um homeomorfismo tal que $h(M \times \{0\}) = M$. Mas $V_\varepsilon(M) - M$ é conexo enquanto $M \times (-1, 1) - M \times \{0\}$ não é. Isso seria uma contradição.

Outra aplicação muito interessante é a seguinte:

²Isto é $K_i \subset K_{i+1}$ e $M = \bigcup_i K_i$.

³Essencialmente ao fazer a indução use

$$\varepsilon_{i+1} < \min\{\varepsilon_{K_i}, \varepsilon_i, d(K_{i+1} - \text{int}(K_i), \bigcup_{j=1}^{i-1} V_{\varepsilon_j}(K_j))\}.$$

Definição 3.8. Um grupo de Lie G e um grupo, que possui uma estrutura de variedade diferenciável tal que os mapas $\cdot : G \times G \rightarrow G$ e $^{-1} : G \rightarrow G$ dados pela multiplicação do grupo $(a, b) \rightarrow a \cdot b$ e pela existência de um elemento inverso $a \rightarrow a^{-1}$ são mapas diferenciáveis com mesma classe de diferenciabilidade de G .

Teorema 3.9. *Todo grupo de Lie de matrizes, isto é um grupo de Lie que é subgrupo de $GL(n)$, é imagem inversa de um valor regular.*

Demonstração. Seja então $G^m \subset GL(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ um grupo de Lie de matrizes com codimensão $k = n^2 - m$. Seja $X \in G$ distinto da identidade e seja $L_X : GL(n) \rightarrow GL(n)$ a translação a esquerda por X , isto é, $L_X(Y) = XY$, então L_X é uma aplicação sobrejetora de classe C^∞ cuja inversa é $L_{X^{-1}}$ que também é C^∞ . Logo L_X é um difeomorfismo e $L_X(G) = G$. Note que $D(L_X)(I) : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ é dado por $Y \rightarrow XY$ leva $T_I G \rightarrow T_X G$. Portanto se V_1, \dots, V_k é uma base de algum suplemento de $T_I G$ então XV_1, \dots, XV_k é uma base de um suplemento de $T_X G$. Pelo exercício temos que G é imagem inversa de um valor regular. \square

4 Homotopia

Nesta seção denotaremos por I o intervalo $[0, 1]$.

Definição 4.1. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é homotópica a $g : M \rightarrow N$ se existe uma aplicação $H : M \times I \rightarrow N$ contínua tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$. Denotamos por $f \simeq g$. Se f, g são de classe C^k e H também for C^k então dizemos que f e g são C^k -homotópicas e denotamos por $f \stackrel{C^k}{\simeq} g$.

Proposição 4.2. \simeq e $\stackrel{C^k}{\simeq}$ são relações de equivalência.

Demonstração. É claro que $f \simeq f$ através da homotopia constante $H(x, t) = f(x)$. E se $f \simeq g$ e H é homotopia então tomando $\tilde{H}(x, t) = H(x, 1 - t)$ temos homotopia de g à f , isto é $g \simeq f$. Note que o mesmo argumento vale para $\stackrel{C^k}{\simeq}$. Para obter a transitividade, se $f \simeq g$ e $g \simeq h$ sejam H_1 e H_2 suas respectivas homotopias. Defina então $H(x, t)$ por $H_1(x, t)$ se $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ e como $G(x, 2t - 1)$ se $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Como $H_1(x, 1) = H_2(x, 0) = g(x)$ então vemos que H é contínua e define homotopia entre f e h . Mas não conseguimos provar que H seja suave. Para isto precisamos de um argumento que iremos usar daqui pra frente, de “freiar” a homotopia.

Seja $f \stackrel{C^k}{\simeq} g$ e $g \stackrel{C^k}{\simeq} h$ e considere H_1 e H_2 suas respectivas homotopias C^k e $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função C^∞ tal que $\varphi(t)$ é 0 se $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$ e 1 se $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$. Seja $F(x, t) = H_1(x, \varphi(t))$ e $G(x, t) = H_2(x, \varphi(t))$. Então F é constante igual a g em $[\frac{2}{3}, 1]$ e G também constante igual a g em $[0, \frac{1}{3}]$. Logo H construída como no caso anterior quando F e G é uma homotopia C^k . \square

Definição 4.3. Se f, g são difeomorfismos entre M e N dizemos que eles são C^k -isotópicas se para todo existe homotopia C^k $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$ tal que para todo t_0 temos $H(\cdot, t_0) : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo.

Exemplo 4.4. Se $N \subset \mathbb{R}^n$ é convexo então quaisquer duas aplicações $f, g : M \rightarrow N$ são homotópicas. Basta tomar a homotopia linear $H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$.

Lema 4.5. *Se $f : M \rightarrow S^n$ não é sobrejetiva então f é homotópica a uma constante⁴.*

Demonstração. Seja $p \in S^n - f(M)$, então por projeção estereográfica temos $S^n - \{p\} \approx \mathbb{R}^n$, logo podemos supor que $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, como a homotopia linear de f a g não passa pelo infinito, ela induz uma homotopia em S^n entre f e g .

Outra maneira de provar isso é considerar $q = -p$ e notar que para todo $y \in S^n - \{p\}$ o segmento \overline{qy} não passa por $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Daí, a função $H(x, t) = \frac{tq+(1-t)f(x)}{\|tq+(1-t)f(x)\|}$ é bem definida e contínua. Logo é uma homotopia entre f e q . \square

Um ponto fundamental na teoria é a observação que o problema de saber se uma certa aplicação é homotópica a uma constante é equivalente ao problema de construir extensões contínuas de aplicações do bordo de uma variedade a ela toda.

Proposição 4.6. *$f : S^n \rightarrow N$ contínua tem extensão contínua a $\overline{f} : \overline{B^{n+1}} \rightarrow N$ se, e só se, f é homotópica a uma constante c .*

Demonstração. Se existe \overline{f} então a aplicação $H(x, t) = \overline{f}(tx)$ é homotopia entre f e $c = \overline{f}(0)$. Recíprocamente se H é homotopia entre f e c então definindo $(\overline{f})(x) = H(\frac{x}{\|x\|}, 1 - \|x\|)$ para $x \in \overline{B^{n+1}} - \{0\}$ e $\overline{f}(0) = c$ temos que \overline{f} é contínua e estende f . \square

Obviamente o fato de uma função ser diferenciável nos dá mais ferramentas analíticas para demonstrar certos teoremas, vamos ver que em relação a problemas de homotopia em geral podemos fazer esta hipótese.

FAZER A OBSERVAÇÃO DO BORDO DE $M \times I$ no outro capítulo

Teorema 4.7. *Sejam M, N variedades compactas e C^∞ então toda aplicação $f : M \rightarrow N$ contínua é homotópica a uma aplicação $g : M \rightarrow N$ de classe C^∞ . Além disso, se duas aplicações f, g de classe C^∞ são homotópicas então elas são C^∞ homotópicas.*

Como em variedades compactas a topologia fraca coincide com a topologia forte os resultados sobre densidade em espaços de funções dizem que:

Lema 4.8. *Sejam $N^n \subset \mathbb{R}^k$ e $f : M \rightarrow N$ contínua. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $g : M \rightarrow N$ de classe C^∞ tal que $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in M$.*

Usando a “convexidade local” da vizinhança tubular podemos provar o seguinte:

Lema 4.9. *Seja $N^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ compacta. Existe um ε tal que para qualquer variedade M e $f, g : M \rightarrow N$ aplicações C^∞ tal que $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$ temos que $f \stackrel{C^\infty}{\simeq} g$.*

⁴O que queremos dizer é que é homotópica a uma aplicação constante.

Demonstração. Seja $V_\delta(N)$ a vizinhança tubular de N . Considere \mathcal{U} o conjunto de todas as bolas contidas em $V_\delta(N)$. Extraia uma subcobertura finita e defina ε o número de Lebesgue da cobertura. Então se $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$ temos que o segmento $\overline{f(x)g(x)}$ está inteiramente contido em $V_\delta(N)$. Seja $H : M \times I \rightarrow N$ dado por $H(x, t) = \pi((1-t)f(x) + tg(x))$, onde π é a projeção da vizinhança tubular, temos que H é tão diferenciável quanto f e g e claramente $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$. \square

Demonstração. (Prova do teorema) Pelo teorema de Whitney, podemos mergulhar N em \mathbb{R}^{2n+1} . Logo podemos supor que é uma subvariedade de um espaço euclidiano.

Ora seja ε dado pelo lema anterior, e f contínua. Por densidade existe $g \in C^\infty$ tal que $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in M$. Logo pelo lema anterior f é homotópica a g .

Se f, g são homotópicas, seja H a homotopia entre eles e ε dado pelo lema anterior. Ora por densidade existe \overline{H} uma aplicação C^∞ tal que $\|H(x, t) - \overline{H}(x, t)\| < \varepsilon$ para todo $(x, t) \in M \times I$. Logo $f_0(x) = \overline{H}(x, 0)$ e $g_0 = \overline{H}(x, 1)$ são C^∞ homotópicas. Mas como $\|f - f_0\| < \varepsilon$ e $\|g - g_0\| < \varepsilon$ temos que $f \stackrel{C^\infty}{\simeq} f_0$ e $g \stackrel{C^\infty}{\simeq} g_0$. Por transitividade $f \stackrel{C^\infty}{\simeq} g$. \square

Como aplicação temos o seguinte lema que diz que o quando as variedades tem mesma dimensão, o número de pré-imagens por uma certa f de um valor regular (que é finito) tem a mesma paridade para qualquer outra aplicação homotópica a f .

Lema 4.10. *Sejam M compacta sem bordo, N variedades C^∞ de mesma dimensão e $f, g : M \rightarrow N$ de classe C^∞ que são homotópicas. Se $y \in N$ é valor regular para f e g ⁵ então $\#f^{-1} = \#g^{-1}(y) \pmod{2}$.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, sabemos que f, g são C^∞ homotópicas. Seja H tal homotopia. Como o conjunto de valores regulares é denso e as funções $\#f^{-1}(\cdot)$ e $\#g^{-1}(\cdot)$ são localmente constantes, podemos supor que y é valor regular de H também. Logo $H^{-1}(y)$ é subvariedade pura compacta de dimensão 1 cujo bordo é $H^{-1}(y) \cap (M \times \{0\} \cup M \times \{1\}) = (f^{-1}(y) \times \{0\}) \cup (g^{-1}(y) \times \{1\})$.

Daí $\#H^{-1}(y) = \#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y)$. Mas como $H^{-1}(y)$ tem dimensão 1 temos que $\#H^{-1}(y)$ é par e portanto a paridade de $\#f^{-1}(y)$ e $\#g^{-1}(y)$ é a mesma. \square

Gostaríamos de provar que tal paridade independe também do valor regular. Para isto precisamos mandar um ponto em outro de maneira isotópica a identidade. Na esfera isso é fácil, sejam $y, z \in S^n$, considere o equador de S^n que contém y e z e faça rotações r_t de ângulo t em torno desse equador. Para algum t temos que $r_t(y) = z$, como $r_0 = id$ temos a isotopia desejada. No caso geral temos o seguinte lema:

⁵Sempre existe tal y pelo teorema de Sard.

Lema 4.11. *Seja N conexa e y, z pontos no interior de N . Existe um difeomorfismo $h : N \rightarrow N$ tal que $h(y) = z$ e $h \stackrel{\text{iso}}{\simeq} id$.*

Demonstração. Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ função C^∞ tal que $\varphi > 0$ em $B(1)$ e $\varphi = 0$ em $B(1)^c$. Para um $c \in S^{n-1}$ considere o sistema de EDO's:

$$\frac{dx_i}{dt} = c_i \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ para } i = 1 \dots n.$$

Então pelo teorema de existência e unicidade, temos que existe solução única $x = x(t)$ tal que $x(0) = x_0$ para todo x_0 . Além do mais como o campo é limitado temos que a solução é global.

Como para cada t o fluxo F_t gerado por esta EDO é um difeomorfismo, temos que todos os F_t 's são isotópicos a identidade. E como o campo se anula em $B(1)^c$ temos que $F_t(x) = x$ se $x \in B(1)^c$. É um exercício mostrar que para todo $p \in B(1)$ existe c e t_0 tal que $F_{t_0}(0) = p$.

Vejam o problema em N . Vamos dizer que $x \sim y$ se existe $h \stackrel{\text{iso}}{\simeq} id$ em N tal que $h(x) = y$. Então \sim é relação de equivalência, é fácil mostrar que é reflexiva e simétrica. Para mostrar a transitividade, sejam $x \sim y$ e $y \sim z$ e h_t e \tilde{h}_t as isotopias. Note que \hat{h}_t definida por h_{2t} para $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ e $\tilde{h}_{2t-1} \circ h_1$ se $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ é isotopia entre x e z .

Agora, fixado x temos que $A = \{y; x \sim y\}$ é aberto. Pois se $x \sim y$ e φ é uma carta local em y tal que $\varphi(y) = 0$ seja $p \in \varphi^{-1}(B(1))$ e $h \stackrel{\text{iso}}{\simeq} id$ em \mathbb{R}^n que leva 0 em $\varphi(p)$. Definindo \tilde{h} como $\varphi^{-1} \circ h \circ \varphi$ em $\varphi^{-1}(B(1))$ e id em $N - \varphi^{-1}(B(1))$ temos que $\tilde{h} \stackrel{\text{iso}}{\simeq} id$. Logo $y \sim p$ e portanto $p \sim x$.

Da mesma forma, temos que A^c é aberto. Por conexidade $A = N$.

□

(continua)

Citar o livro do Jacob ou fazer uma seção sobre EDO?