Variedades Diferenciáveis
Prof: Flávio Abdenur
Entrega: 09/05/2007

Lista 1

Obs: A notação "$f : X \to Y$" aqui sempre significa "um mapa diferenciável f de uma variedade X numa variedade Y".

1. Mostre que se $f : X \to \mathbb{R}$ e X é compacto, então f tem pelo menos dois pontos críticos.

2.

a) Parametrize a esfera S^n com apenas duas cartas via projeções estereográficas. Exiba as fórmulas explicitamente.

b) Dado um ponto $(a, b, c) \in S^2$, determine o espaço tangente $T_{(a,b,c)}S^2$.

3. Mostre que se V é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ então V é subvariedade de R^n e vale $T_p(V) = V$ para todo $p \in V$.

4. Mostre que se $f : X \to Y$ é um difeomorfismo local então $D_p f$ é um isomorfismo entre $T_p X$ e $T_{f(p)}Y$ para todo $p \in X$.

5. Use o teorema da preimagem para mostrar que o toro T^n é uma variedade n-dimensional.

6. Mostre que se $f : X \to Y$ é uma submersão e $U \subset X$ é um aberto, então $f(U)$ é um aberto em Y.

7. Dadas uma variedade compacta X e uma subvariedade Z de Y, mostre que a propriedade de $f : X \to Y$ ser transversal a Z é estável sob C^1-perturbações de f.

8. Mostre que o conjunto

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \text{pelo menos uma das coordenadas } x_i \text{ é racional}\}$$

tem medida nula em $\mathbb{R}^n$.

9. Uma variedade X é *simplesmente conexa* se dado qualquer mapa diferenciável $f : S^1 \to X$ então f é homotópico a um mapa constante. Use projeção estereográfica e o teorema de Sard para mostrar que a esfera S^k é simplesmente conexa, onde $k > 1$.

10.

a) Mostre que $T(S^1)$ é difeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$.

b) Mostre que dadas variedades X e Y então $T(X \times Y)$ é difeomorfo a $T(X) \times T(Y)$.

11.

a) Mostre que se $f : X \to Y$ é um difeomorfismo entre duas variedades com bordo X e Y, então $f(\partial(X)) = \partial(Y)$.

b) Mostre que o retângulo $[0,1] \times [0,1]$ não é uma variedade com bordo.

12. Mostre que o análogo do teorema do ponto fixo de Brouwer é falso para mapas do toro sólido nele mesmo. Onde falha a demonstração do teorema de Brouwer neste caso?

13. Dadas duas subvariedades X e Y de $\mathbb{R}^n$, mostre que para quase todo $v \in \mathbb{R}^n$ as variedades $X + v$ e Y se intersectam transversalmente.

14. Dados $k \leq n$, o *espaço Grassmanniano* $G_{n,k}$ é a família de todos os subespaços vetoriais k-dimensionais de $\mathbb{R}^n$. Vamos munir $G_{n,k}$ de uma topologia a partir da seguinte idéia: dado um k-plano $E \in G_{n,k}$ seja $E^\perp$ o seu complemento ortogonal em $\mathbb{R}^n$. Então cada k-plano "próximo" de E é o gráfico de uma única aplicação linear $L : E \to E^\perp$.

a) Qual é a topologia, afinal?

b) Mostre que com essa topologia o Grassmanniano $G_{n,k}$ é uma variedade de dimensão $k \cdot (n - k)$