# Terceira Lista de Equações Diferenciais Parciais

Prof. Alexander Arbieto

5 de junho de 2009

1. Faça todos os exercícios do caderno.
2. Uma funçao $u \in C^2(\overline{U})$ é subharmônica se $\Delta u \geq 0$ em $U$.
   - Imitando as contas da propriedade da média, mostre que se $u$ é subharmônica então para toda bola $B(x,r) \subset U$ temos que:
   $$u(x) \leq \frac{1}{vol(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u(y)dy.$$
   - Mostre o princípio do máximo para funções subharmônicas. (Não da pra obter o princípio do mínimo)
   - Mostre que se $u$ é harmônica então $v = \|\nabla u\|^2$ é subharmônica. (Dica: Derive e use o lema de Schwarz para comutar as derivadas parciais).
3. Seja $U^+ = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1, x_n > 0\}$ e $u \in C^2(\overline{U^+})$ uma função harmônica, tal que $u = 0$ em $\partial U^+ \cap \{x_n = 0\}$. Defina $v(x)$ como sendo $u(x)$ se $x_n \geq 0$ e $-u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$ se $x_n < 0$. Mostre que $v$ é harmônica em $B(0,1)$.
4. Seja $u$ uma solução da equação do calor $u_t - \Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.
   - Mostre que a função $u(\lambda x, \lambda^2 t)$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma constante, também resolve a equação do calor.
   - Use o item anterior para mostrar que $v(x,t) = \langle x, \nabla u(x,t)\rangle + 2tu_t(x,t)$ também resolve a equação do calor.
5. Seja $n = 1$ (onde $n$ é a dimensão espacial) e $u(x,t) = v(\frac{x^2}{t})$. Mostre que $u$ é solução do calor se, e somente se, $v$ satisfaz a seguinte EDO:
   $$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0 \text{ onde } z > 0.$$
6. Mostre que a soluçao geral da EDP $\partial^2_{xy} u = 0$ é da forma $u(x,y) = F(x) + G(y)$ para quaisquers funções $F$ e $G$.
   - Usando a mudança de variáveis $\xi = x + t$ e $\eta = x - t$ mostre que $u_{tt} - u_{xx} = 0$ (equação da onda com $n = 1$) se, e só se, $u_{\xi\eta} = 0$.
   - A partir destas observações reobtenha a fórmula de d'Alembert.