

## Terceira Lista de Equações Diferenciais Parciais

Prof. Alexander Arbieto

5 de junho de 2009

1. Faça todos os exercícios do caderno.
2. Uma função  $u \in C^2(\bar{U})$  é subharmônica se  $\Delta u \geq 0$  em  $U$ .
  - Imitando as contas da propriedade da média, mostre que se  $u$  é subharmônica então para toda bola  $B(x, r) \subset U$  temos que:
$$u(x) \leq \frac{1}{\text{vol}(B(x, r))} \int_{B(x, r)} u(y) dy.$$
  - Mostre o princípio do máximo para funções subharmônicas. (Não da pra obter o princípio do mínimo)
  - Mostre que se  $u$  é harmônica então  $v = \|\nabla u\|^2$  é subharmônica. (Dica: Derive e use o lema de Schwarz para comutar as derivadas parciais).
3. Seja  $U^+ = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1, x_n > 0\}$  e  $u \in C^2(\bar{U}^+)$  uma função harmônica, tal que  $u = 0$  em  $\partial U^+ \cap \{x_n = 0\}$ . Defina  $v(x)$  como sendo  $u(x)$  se  $x_n \geq 0$  e  $-u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, -x_n)$  se  $x_n < 0$ . Mostre que  $v$  é harmônica em  $B(0, 1)$ .
4. Seja  $u$  uma solução da equação do calor  $u_t - \Delta u = 0$  em  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ .
  - Mostre que a função  $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ , onde  $\lambda \in \mathbb{R}$  é uma constante, também resolve a equação do calor.
  - Use o item anterior para mostrar que  $v(x, t) = \langle x, \nabla u(x, t) \rangle + 2tu_t(x, t)$  também resolve a equação do calor.
5. Seja  $n = 1$  (onde  $n$  é a dimensão espacial) e  $u(x, t) = v(\frac{x^2}{t})$ . Mostre que  $u$  é solução do calor se, e somente se,  $v$  satisfaz a seguinte EDO:
$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0 \text{ onde } z > 0.$$
6. Mostre que a solução geral da EDP  $\partial_{xy}^2 u = 0$  é da forma  $u(x, y) = F(x) + G(y)$  para quaisquer funções  $F$  e  $G$ .
  - Usando a mudança de variáveis  $\xi = x + t$  e  $\eta = x - t$  mostre que  $u_{tt} - u_{xx} = 0$  (equação da onda com  $n = 1$ ) se, e só se,  $u_{\xi\eta} = 0$ .
  - A partir destas observações reobtenha a fórmula de d'Alembert.