A PROVA DE PUJALS E SAMBARINO DA CONJECTURA DE PALIS EM SUPERFÍCIES I: O TEOREMA DE DENJOY E O ARGUMENTO DE SCHWARTZ

CARLOS MATHEUS

Abstract. Esta nota é a primeira numa série de três textos visando entender as idéias da prova de Pujals e Sambarino [PS] da conjectura de Palis para C^1 difeomorfismos de superfícies. Como o esquema da prova deste resultado é longo e cheio de muitas idéias, dividiremos este conjunto de notas assim:

- nesta primeira nota estudaremos os argumentos de Denjoy e Schwartz (envolvendo a combinação das propriedades de *distorção limitada* e *somabilidade dos comprimentos de intervalos errantes*) para mostrar que C^2 difeomorfismos f do círculo S^1 verificam $\Omega(f) = S^1$;
- na segunda nota estudaremos a prova de um teorema de Mañé sobre a hiperbolicidade de endomorfismos do intervalo e do círculo; em particular, veremos que todo C^2 endomorfismo *genérico* f cujos pontos críticos estejam nas bacias de poços satisfazem o Axioma A (mais precisamente, f admite um número finito de poços tal que o maximal invariante do complementar das bacias destes poços é um conjunto hiperbólico *uniformemente expansor*);
- finalmente, na terceira nota seguiremos as idéias de Pujals e Sambarino para estender estes dois argumentos para o contexto bidimensional e aplicá-los na prova da conjectura de Palis em dimensão 2.

1. Introdução

Conforme comentamos no resumo acima, nosso objetivo de longo prazo será expor as idéias de E. Pujals e M. Sambarino sobre a prova da C^1 conjectura de Palis em superfícies (segundo a qual todo difeomorfismo de uma superfície pode ser C^1 aproximado por um difeomorfismo *Axioma A* ou por um difeomorfismo exibindo uma *tangência homoclínica*. Porém, a demonstração deste resultado é bastante intricada de modo que para tornar a apresentação mais clara dividimos a exposição em três partes, sendo que nas duas primeiras discutiremos fatos "unidimensionais" cujos mecanismos de funcionamento formam os pilares de sustentação dos argumentos de Pujals e Sambarino.

Por outro lado, como estes fatos unidimensionais podem ser discutidos *sem menção* à conjectura de Palis, deixaremos as descrições das motivações históricas, importância e a prova desta conjectura para a terceira nota. Em outras palavras, o leitor familiar com os argumentos de Denjoy e o teorema de Mañé pode pular sem dificuldades para a leitura da terceira nota.

Sem mais demoras, iremos "esquecer" nossa motivação original acerca da conjectura de Palis e pensar que estamos estudando a dinâmica de difeomorfismos suaves do círculo.

Date: 21 de novembro de 2007.

Um dos resultados básicos da teoria de *homeomorfismos* do círculo é o *teorema de classificação de Poincaré* segundo o qual todo homeomorfismo *transitivo* do círculo com *número de rotação* irracional α é topologicamente conjugado à rotação R_α de ângulo α do círculo. Refrescando a memória do leitor, lembre-se que

- um homeomorfismo f é transitivo se existe um ponto x cuja órbita $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é densa;
- o número de rotação $\tau(f)$ de um homeomorfismo f do círculo é definido assim: tome F um levantamento de f para a reta real $\mathbb{R}$ (i.e., qualquer F verificando $f\circ\pi = F\circ\pi$ onde $\pi:\mathbb{R}\to S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é a projeção natural); para todo $x\in S^1$, considere o limite
$$\tau(f,x) = \lim_{n\to\infty}\frac{F^n(x)-x}{n};$$
pode-se provar que o limite $\tau(f,x)$ existe para todo x e $\tau(f,x)=\tau(f)$ *independe* do ponto x; este número $\tau(f)$ é o *número de rotação*;
- dois homeomorfismos f e g são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo h tal que $f\circ h = h\circ g$ (i.e., existe uma mudança contínua de coordenadas levando as órbitas de f nas órbitas de g).

Veja o livro [KH] para mais detalhes. Uma pergunta natural relacionada ao teorema de Poincaré é dar critérios para a transitividade de homeomorfismos f do círculo, já que a transitividade implica em estrutura de órbitas simples (igual a estrutura de uma rotação). Esta pergunta foi respondida por Denjoy o qual mostrou que:

"Alguma diferenciabilidade (por exemplo, f é um difeomorfismo C^2) é suficiente para a transitividade".

Entretanto, como não estamos interessados diretamente na teoria de classificação de homeomorfismos do círculo, mas apenas pretendemos entender como funciona o argumento de Denjoy, iremos nos concentrar na prova da seguinte versão mais fraca do teorema de Denjoy (a qual já contém os argumentos de distorção limitada e somabilidade de intervalos errantes):

Theorem 1.1 (versão fraca do teorema de Denjoy)**.** *Todo C^2 difeomorfismo do círculo f satisfaz $\Omega(f)=S^1$.*

Lembre-se que o conjunto *não-errante* $\Omega(f)$ de uma transformação f é o conjunto dos pontos x tais que, para todo aberto U contendo x, existe um inteiro n com $f^n(U)\cap U\neq\emptyset$. Note que todo f homeomorfismo transitivo de uma variedade compacta M verifica $\Omega(f)=M$ (exercício). Neste sentido, o teorema acima é mais fraco do que o teorema original de Denjoy. Porém, a transitividade de um C^2 difeomorfismo f com número de rotação irracional é obtida do fato $\Omega(f)=S^1$ usando um argumento simples de ordenação de órbitas (o qual baseia-se na teoria de homeomorfismos do círculo). Ou seja, a transitividade no contexto de Denjoy equivale ao fato $\Omega(f)=S^1$. Veja [KH] para os detalhes.

Prova do teorema 1.1. Suponha que o teorema é falso, i.e., $\Omega(f)\neq S^1$. Tomando um ponto $p\in S^1-\Omega(f)$, vemos que existe um intervalo aberto I contendo p tal que os intervalos $\{f^n(I)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ são *disjuntos* entre si. Em outras palavras, $\Omega(f)\neq S^1$ implica a existência de um *intervalo errante*[1]. Em particular, por disjunção, temos que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \ell(f^n(I)) \leq \ell(S^1) = 1, \tag{1.1}$$

onde $\ell(J)$ denota o comprimento do intervalo J. Esta é a propriedade de somabilidade a qual nos referimos no abstract desta nota.

Por outro lado, como consequência da diferenciabilidade alta (no caso C^2), temos o seguinte lema de *distorção*:

Lemma 1.1 (Distorção limitada)**.** *Sejam f um difeomorfismo C^2 do círculo e $L < \infty$ uma cota superior para a constante de Lipschitz*[2] *da função $\log|f'|$ de classe C^1. Se $I \subset S^1$ é um intervalo tal que $I, f(I), \dots, f^{n-1}(I)$ são intervalos disjuntos entre si, então*

$$e^{-L} \leq \left|\frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(y)}\right| \leq e^L$$

para todo $x, y \in I$.

O nome "distorção limitada" deste lema é motivado pelo fato da estimativa acima significar que os iterados f^n de f levam o intervalo I em $f^n(I)$ sem distorcer muito os comprimentos[3].

Prova do lema 1.1. Consideramos expressão $|(f^n)'(x)/(f^n)'(y)|$. Expandindo as derivadas $(f^n)'(x)$ e $(f^n)'(y)$ num produto (pela regra da cadeia) e passando o logaritmo, segue que:

$$\begin{aligned}\left|\log\frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|}\right| &= \left|\log\prod_{j=0}^{n-1}\frac{|f'(f^j(x))|}{|f'(f^j(y))|}\right| = \left|\sum_{j=0}^{n-1}\big(\log|f'(f^j(x))| - \log|f'(f^j(y))|\big)\right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1}\big|\log|f'(f^j(x))| - \log|f'(f^j(y))|\big|.\end{aligned}$$

Como a função $\log|f'|$ é L-Lipschitz, obtemos que, para quaisquer $x, y \in S^1$,

$$\left|\log\frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|}\right| \leq L\sum_{j=0}^{n-1}|f^j(x) - f^j(y)|. \tag{1.2}$$

Por outro lado, como $f^j(x), f^j(y) \in f^j(I)$ e os intervalos $I, f(I), \dots, f^n(I)$ são disjuntos entre si, concluímos que

$$\left|\log\frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|}\right| \leq L\sum_{j=0}^{n-1}|f^j(x) - f^j(y)| \leq L\sum_{j=0}^{n-1}\ell(f^j(I)) \leq L\cdot\ell(S^1) = L.$$

Isto termina a prova do lema de distorção. □

[1] I.e., um intervalo I cujos iterados $f^n(I)$ por f nunca se intersectam.

[2] C é uma constante de Lispchitz para uma função ϕ se $|\phi(x) - \phi(y)| \leq C|x - y|$.

[3] Com efeito, dado qualquer subconjunto $A \subset I$, a estimativa acima implica que $e^{-L}\frac{\ell(A)}{\ell(I)} \leq \frac{\ell(f^n(A))}{\ell(f^n(I))} \leq e^L\frac{\ell(A)}{\ell(I)}$, i.e., a menos dos fatores limitados $e^{\pm L}$, a proporção de $f^n(A)$ dentro do intervalo $f^n(I)$ é "essencialmente" a mesma proporção que A ocupava em I.

Para finalizar a demonstração do teorema 1.1, iremos combinar a estimativa de somabilidade (1.1) com o lema de distorção para encontrar uma contradição. Com este intuito, consideramos $I \subset S^1 - \Omega(f)$ um intervalo errante e denotamos por L a constante de Lipschitz da função $\log|f'|$. Em seguida, *fixaremos*

$$0 < \delta < \frac{1}{2}\exp(-2L).$$

Note que δ depende *apenas* da norma C^2 de f. Com esta notação, afirmamos que podemos aumentar o tamanho de *qualquer* intervalo errante I pela quantidade *uniforme* $\delta = \delta(L) > 0$ para obter um intervalo J tal que os comprimentos de seus iterados $f^n(J)$ não crescem muito:

Lemma 1.2. *Se I é um intervalo errante* ***qualquer*** *e $J \supset I$ é um intervalo com $\ell(J) \leq (1+\delta)\ell(I)$, então $\ell(f^n(J)) \leq 2\ell(f^n(I))$ e*

$$|(f^n)'(y)| \leq e^{2L} \cdot \frac{\ell(f^{n+1}(I))}{\ell(I)} \tag{1.3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $y \in J$.

Proof. Mostraremos isto por indução. Logicamente as estimativas desejadas valem quando $n = 0$. Supondo que as estimativas $\ell(f^l(J)) \leq 2\ell(f^l(I))$ são verdadeiras para todo $0 \leq l \leq n$, nossa tarefa consiste em provar[4] as estimativas $\ell(f^{n+1}(J)) \leq 2\ell(f^{n+1}(I))$ e

$$|(f^{n+1})'(y)| \leq e^{2L} \cdot |(f^{n+1})'(x_{n+1})| = e^{2L} \cdot \frac{\ell(f^{n+1}(I))}{\ell(I)}$$

para todo $y \in J$.

Lembremos a equação (1.2) implica que

$$\left|\log \frac{|(f^{n+1})'(x)|}{|(f^{n+1})'(y)|}\right| \leq L \cdot \sum_{l=0}^{n} |f^l(x) - f^l(y)| \leq L \cdot \sum_{l=0}^{n} \ell(f^l(J))$$

para quaisquer $x, y \in J$. Logo, combinando a hipótese de indução e a estimativa de somabilidade (1.1), temos que

$$\left|\log \frac{|(f^{n+1})'(x)|}{|(f^{n+1})'(y)|}\right| \leq L \cdot \sum_{l=0}^{n} \ell(f^l(J)) \leq 2L \cdot \sum_{l=0}^{n} \ell(f^l(I)) \leq 2L.$$

Em particular, se tomarmos $x_{n+1} \in I \subset J$ tal que $(f^{n+1})'(x_{n+1}) = \frac{\ell(f^{n+1}(I))}{\ell(I)}$ (cuja existência é garantida pelo teorema do valor intermediário), segue que

$$|(f^{n+1})'(y)| \leq e^{2L} \cdot |(f^{n+1})'(x_{n+1})| = e^{2L} \cdot \frac{\ell(f^{n+1}(I))}{\ell(I)}$$

[4]Observe que *não* iremos precisar usar as estimativas de derivada $|(f^i)'(y)| \leq e^{2L} \cdot \frac{\ell(f^i(I))}{\ell(I)}$ para $0 \leq i \leq n$ e $y \in J$ neste argumento indutivo, mas apenas as estimativas de comprimento $\ell(f^l(J)) \leq 2\ell(f^l(I))$!

para todo $y \in J$. Integrando esta estimativa[5] em $J - I$ e usando $\ell(J) \leq (1+\delta)\ell(I)$, vemos que

$$\begin{aligned}\ell(f^{n+1}(J)) &= \ell(f^{n+1}(I)) + \ell(f^{n+1}(J-I)) \leq \ell(f^{n+1}(I)) + e^{2L} \cdot \frac{\ell(f^{n+1}(I))}{\ell(I)} \cdot \ell(J-I) \\ &\leq (1+\delta e^{2L})\ell(f^{n+1}(I)) \leq 2\ell(f^{n+1}(I)).\end{aligned}$$

Isto termina a prova do lema. □

Uma consequência interessante (e direta) deste lema é

Corollary 1.1. *Nas condições do lema anterior,* $(f^n)'(x) \to 0$ *e* $(f^{-n})'(x) \to 0$ uniformemente *em* $x \in J$ *quando* $n \to \infty$*.*

Proof. Primeiramente observamos que *tudo* que foi feito para iterados *futuros* de intervalos errantes de f vale exatamente igual para iterados *passados* de f, desde que tomemos L uma cota para a norma C^2 de ambas f e f^{-1}, e fixemos $0 < \delta < e^{-2L}/2$ uniforme (já que com esta escolha, podemos trocar f por f^{-1} em toda discussão acima). Logo, a estimativa (1.3) do lema anterior diz que $|(f^n)'(x)| \leq e^{2L} \cdot \frac{\ell(f^n(I)))}{\ell(I)}$ e $|(f^{-n})'(x)| \leq e^{2L} \cdot \frac{\ell(f^{-n}(I)))}{\ell(I)}$ para todo $x \in J$. Por outro lado, como I é errante, a estimativa de somabilidade (1.1) diz que $\ell(f^n(I)) \to 0$ quando $n \to \pm\infty$. Isto finaliza a prova. □

Finalmente, utilizando este corolário, podemos provar o seguinte fato:

Lemma 1.3. *Se* I *é um intervalo errante,* $\omega(I)$ *contém um ponto crítico. Em outras palavras, todo intervalo errante* I *deve acumular em algum ponto crítico.*

Proof. Suponha que $\omega(I)$ não contém pontos críticos. Para cada $l \in \mathbb{N}$, considere $J_l \supset f^l(I)$ um intervalo aberto de comprimento $\ell(J_l) = (1+\delta)\ell(f^l(I))$. Como a constante $\delta = \delta(L) > 0$ é *uniforme*, vemos que a coleção $\{J_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta do *compacto* $\omega(I)$. Portanto, existe uma subcobertura finita $\{J_{l_1}, \dots, J_{l_k}\}$ de $\omega(I)$. Como os intervalos $f^{l_1}(I), \dots, f^{l_k}(I)$ são errantes, podemos aplicar o corolário 1.1 aos intervalos $J_{l_1}, \dots, J_{l_k}$, de modo que obtemos a existência um inteiro grande N tal que $|(f^N)'(y)| < 1/2$ e $|f^{-N}(y)| < 1/2$ para todo $y \in J_{l_1} \cup \dots \cup J_{l_k}$. Como $J_{l_1}, \dots, J_{l_k}$ cobrem $\omega(I)$, teríamos $|(f^N)'(y)| < 1/2$ e $|f^{-N}(y)| < 1/2$ para todo $y \in \omega(I)$. Porém, como $\omega(I)$ é invariante, obteríamos que $|(f^N)'(x)| < 1/2$ e $|f^{-N}(f^N(x))| < 1/2$ para qualquer $x \in \omega(I)$ (já que $f^N(x) \in \omega(I)$). Combinando isto com a regra da cadeia aplicada num ponto $x \in \omega(I)$ (o qual estamos assumindo não ser ponto crítico) seguiria que

$$1 = |(f^{-N} \circ f^N)'(x)| = |(f^{-N})'(f^N(x))| \cdot |(f^N)'(x)| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Esta contradição finaliza o argumento. □

Neste ponto, o leitor já enxergou que a prova do teorema de Denjoy já acabou porque estamos assumindo que f é um difeomorfismo, de modo que f não pode possuir pontos críticos e, a fortiori (pelo lema acima), f não possui intervalos errantes. □

[5] E lembrando do teorema fundamental do cálculo $\ell(g(J)) = \int_J g'(x)dx$.

Uma vez que já vimos a prova de Schwartz do teorema de Denjoy, faremos dois comentários sobre outras provas deste resultado:

Remark 1.1. *Um outro argumento*[6] *pode ser feito assim: dado I intervalo errante, denotamos por $I_0 \supset I$ o intervalo errante maximal*[7]*; em seguida definimos indutivamente I_n como o intervalo errante maximal contendo $f(I_{n-1})$. Note que a maximalidade de I_n implica que, $I_m \supset f^{m-n}(I_n)$, para quaisquer $n < m$ inteiros. Logo, os intervalos I_n devem ser dois a dois disjuntos. Com efeito, caso contrário existiriam $n < m$ tais que $I_n \cap I_m \neq \emptyset$. Daí seguiria que $f^{m-n}(I_m) \cap I_m \supset f^{m-n}(I_m) \cap f^{m-n}(I_n) \supset f^{m-n}(I_m \cap I_n) \neq \emptyset$, uma contradição com o fato de I_m ser errante. Agora, isto pode ser usado na prova do lema 1.2 para mostrar que $\ell(f^l(T)) \leq 2\ell(f^l(I_0))$ para todo $l \geq 0$, onde $T \supset I_0$ é um intervalo com $\ell(T) \leq (1+\delta)\ell(I_0)$. Finalmente, trocamos o último lema 1.3 pelo seguinte enunciado:*

Lemma 1.4. *T verifica uma das seguintes possibilidades:*

- *T é um intervalo errante ou*
- *$\omega(T)$ é uma órbita periódica.*

Proof. Começamos notando que as estimativas de comprimentos $\ell(f^l(T)) \leq 2\ell(f^l(I_0))$ e a estimativa de somabilidade (1.1) implicam que $\sum_{n=0}^{\infty} \ell(f^n(T)) \leq 2\sum_{n=0}^{\infty} \ell(f^n(I)) \leq 2$, de modo que

$$\ell(f^n(T)) \to 0$$

quando $n \to \infty$. Defina

$$L = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\mathrm{int}(T)).$$

Temos duas situações possíveis:

- a) todas as componentes conexas U de L são errantes, i.e., $f^n(U) \cap f^m(U) = \emptyset$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$;
- b) L contém uma componente conexa U não errante, i.e., $f^n(U) \cap f^m(U) \neq \emptyset$ para $n, m \in \mathbb{N}$.

No caso a), denotando por U_0 a componente conexa de L contendo $\mathrm{int}(T)$, vemos imediatamente que $f^n(\mathrm{int}(J)) \cap f^m(\mathrm{int}(J)) \subset f^m(U_0) \cap f^n(U_0) = \emptyset$, i.e., $\mathrm{int}(T)$ é um intervalo e não resta mais nada para provar. No caso b), fixamos U uma componente conexa não errante de L, digamos $f^n(U) \cap f^m(U) \neq \emptyset$ para $n < m$; tomando $s = m - n$, vemos que $f^s(U) \cap U \neq \emptyset$. Como U é uma componente conexa de L, segue que $f^s(U) \cap U \neq \emptyset$ implica[8] $f^s(U) \subset U$.

Suponhamos primeiramente que U contém um ponto periódico p de período s. Neste caso, como $p \in f^{k_0}(T)$ para algum k_0 e $\ell(f^n(T)) \to 0$, vemos que p é ponto periódico atrator, o que mostra que $\omega(T)$ é a órbita periódica $\{p, f(p), \ldots, f^{s-1}(p)\}$ e novamente não temos mais o que provar.

[6]O qual é interessante para generalizações do teorema de Denjoy para endomorfismos (o que é especialmente relevante no caso do teorema de Mañé a ser discutido na segunda nota).

[7]No sentido que I_0 é intervalo errante e I_0 não está contido no interior de nenhum intervalo errante J.

[8]Com efeito, $f^s(U) \cap U \neq \emptyset$ implica que $U \cup f^s(U) \subset L$ é um intervalo (conexo) contendo U. Logo, deve-se ter $f^s(U) \subset U$.

Portanto, podemos supor que U não possui pontos fixos de $f^s : U \to U$. Neste caso, $f^s : \overline{U} \to \overline{U}$ possui seus pontos fixos em ∂U. Logicamente esses pontos fixos não podem ser ambos repulsores (porque a invariância de $\overline{U}$ forçaria a existência de um ponto periódico no interior U de $\overline{U}$, uma situação que estamos excluindo). Logo, f^s possui um ponto periódico (fracamente) atrator $p \in \partial U$. Temos duas situações possíveis:

- $f^s(U) \neq U$: neste caso todo $x \in \overline{U}$ satisfaz[9] $f^{ks}(x) \to p$ quando $k \to \infty$; em particular, $\omega(T) = \{p, f(p), \dots, f^{s-1}(p)\}$;
- $f^s(U) = U$: neste contexto o outro ponto do bordo $\{q\} := \partial U - \{p\}$ deve ser (fracamente) repulsor; como $\ell(f^n(T)) \to 0$ quando $n \to \infty$, segue que $f^n(T)$ *não* pode acumular em q; por outro lado, os pontos de U são atraídos por p, de modo que $f^{ks}(x) \to p$ para todo $x \in T$; ou seja, $\omega(T)$ se reduz a órbita periódica de p.

Isto completa a prova deste lema. □

Finalmente, o teorema de Denjoy segue deste lema do seguinte jeito: como I_0 é assumido ser errante maximal, o intervalo T não pode ser errante. Logo, o lema acima garante que f deve possuir pontos periódicos, de maneira que o número de rotação $\tau(f)$ de f é racional, um absurdo com a hipótese $\tau(f) \notin \mathbb{Q}$ do teorema de Denjoy (em seu enunciado clássico).

Remark 1.2. *Uma prova alternativa do teorema de Denjoy (baseada em utilizar o lema 1.1 de distorção limitada para comparar comprimentos entre iterados de um intervalo errante) pode ser feita assim. Primeiramente iremos assumir como uma "caixa preta" o seguinte fato da teoria de homeomorfismos do círculo:*

Dado I um intervalo errante de um homeomorfismo f de S^1 com $\tau(f)$ irracional, existe uma sequência de inteiros $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$ tais que, para todo $x \in I$ e todo $j \geq 1$, os intervalos $\{f^k([x, f^{-n_j}(x)]); 0 \leq k < n_j\}$ são mutualmente disjuntos.

A prova deste resultado envolve argumentos simples de ordenação de intervalos do círculo. Veja o lemma 12.1.2 de [KH] *(pag. 402) para mais detalhes.*

Partindo deste fato sobre a dinâmica em intervalos errantes, observamos que o fato dos intervalos $\{f^k([x, f^{-n_j}(x)]); 0 \leq k < n_j\}$ são disjuntos quando $x \in I$ nos permite aplicar o lema 1.1 de distorção limitada com $y = f^{-n_j}(x)$. Daí segue que

$$e^{-L} \leq \frac{(f^{n_j})'(x)}{(f^{n_j})'(f^{-n_j}(x))} = (f^{n_j})'(x) \cdot (f^{-n_j})'(x).$$

Combinando esta estimativa com a desigualdade $\sqrt{a \cdot b} \leq \max\{a, b\} \leq a + b$, vemos que

$$e^{-L/2} \leq \sqrt{(f^{n_j})'(x) \cdot (f^{-n_j})'(x)} \leq (f^{n_j})'(x) + (f^{-n_j})'(x).$$

Integrando esta estimativa sobre o intervalo I, segue que

$$\begin{aligned} e^{-L/2} \cdot \ell(I) &\leq \int_I (f^{n_j})'(x)dx + \int_I (f^{-n_j})'(x)dx = \ell(f^{n_j}(I)) + \ell(f^{-n_j}(I)) \\ &\leq 2 \max\{\ell(f^{n_j}(I)), \ell(f^{-n_j}(I))\}. \end{aligned}$$

[9]Porque se existisse $x_0 \in U$ tal que $f^{ks}(x) \to r \neq p$, teríamos que $r \in U$ (pois $f^s(U) \neq U$) seria um ponto periódico, uma possibilidade já excluída.

Logo, vemos que a desigualdade $2\ell(f^n(I)) \geq e^{-L/2} \cdot \ell(I)$ *ocorre para uma quantidade infinita de inteiros* $n \in \mathbb{Z}$. *Porém, isto contraria a estimativa de somabilidade* (1.1) *para os intervalos* $f^n(I)$, *já que* (1.1) *implica* $\ell(f^n(I)) \to 0$ *quando* $n \to \infty$.

Fechando a discussão desta primeira nota, faremos dois comentários acerca do enunciado do teorema de Denjoy:

- *A hipótese de diferenciabilidade* C^2: Conforme vimos na prova acima, a diferenciabilidade alta (C^2) entrou na prova do teorema de Denjoy para assegurar a importante propriedade de *distorção limitada*. Uma pergunta natural relacionada é: "até que ponto a diferenciabilidade é necessária no teorema de Denjoy?". Revisando a prova acima, pode-se ver que a prova do lema de distorção não requer toda a força da diferenciabilidade C^2: por exemplo, o mesmo argumento se aplicaria se f fosse apenas $C^{1+\epsilon}$ (ou mais geral $\log|f'|$ possui variação limitada ou f é C^1 com derivada na classe de Zygmund). Entretanto, certamente alguma diferenciabilidade um pouco melhor que C^1 se faz necessária. Com efeito, Denjoy construiu um exemplo f de um difeomorfismo C^1 do círculo tal que f tem número de rotação irracional (logo f não possui pontos periódicos) mas f possui intervalos errantes (de modo que f não pode ser conjugado topologicamente a uma rotação irracional). A idéia de Denjoy é exatamente tomar uma rotação irracional e fazer cirurgias em S^1 ao longo de uma órbita fixada de maneira a introduzir intervalos (de comprimentos somáveis) sobre estes pontos. Pode-se mostrar que isto gera um difeomorfismo C^1 (no qual certamente não vale o lema de distorção). Para detalhes veja a seção 12.2 de [KH].
- *A regularidade da conjugação entre o difeomorfismo e a rotação associada*: Foi comentado pouco antes do enunciado da versão fraca do teorema de Denjoy que pode-se provar que todo C^2 difeomorfismo do círculo com número de rotação *irracional* é topologicamente conjugado a uma rotação irracional. O leitor mais curioso pode-se perguntar sobre a regularidade desta conjugação. Em geral, mesmo assumindo que f é um difeomorfismo *analítico real*, não podemos esperar que a conjugação h seja diferenciável. Com efeito, existem exemplos de difeomorfismos tais que a conjugação h é um homeomorfismo não-diferenciável (veja a seção 12.5 de [KH]). Por outro lado, atualmente é sabido que as *propriedades aritméticas* do número irracional $\alpha = \tau(f)$ desempenham papel importante na classe de diferenciabilidade de h. Mais precisamente, quanto melhor as condições *Diofantinas* sobre α (i.e., quanto mais "devagar" α for aproximável por racionais, melhor será a regularidade de h). Por exemplo, Arnold provou que, para todo α irracional verificando a condição Diofantina $|q\alpha - p| > C|q|^{-d}$, existe $\varepsilon = \varepsilon(C,d) > 0$ tal que toda f analítico "ε-próximo" (na topologia analítica) da rotação irracional R_α de ângulo α é *analiticamente conjugado* a R_α. Além disso, Yoccoz provou que se α verifica a condição Diofantina acima e $2 + \beta := d$, então todo C^k difeomorfismo f com $k > 2\beta + 1$ cujo número de rotação é α pode ser conjugado a rotação R_α por uma conjugação h de classe $C^{k-1-\beta-\varepsilon}$ para todo $\varepsilon > 0$. Para mais detalhes veja [KH].

Com isto encerramos nossas discussões acerca do teorema de Denjoy sobre a não-existência de intervalos errantes para C^2 difeomorfismos do círculo, sendo que as palavras(/idéias)-chaves são: regularidade alta (C^2), distorção limitada, somabilidade e intervalos errantes acumulam em pontos críticos. Bem, uma vez que o leitor tenha entendido pelo menos o que estas palavras significam e como elas se interrelacionam, mantenham-nas grudas nas suas mentes[10] até o próximo capítulo (quer dizer, a próxima nota), o qual será sobre o *teorema de Mañé*!

References

[KH] A. Katok and B. Hasselblat, Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems, *Encyclopedia of Math. and its applications*, vol. 54, Cambridge Univ. Press, 1995.

[PS] E. Pujals and M. Sambarino, Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms, *Annals of Mathematics*, vol. 151, 2000, p. 961–1023.

[10]O que não será uma missão difícil: afinal, se nós mantemos (involuntariamente) refrões de músicas chatas na cabeça, quem dirá manter um assunto interessante como este! :)