A PROVA DE PUJALS E SAMBARINO DA CONJECTURA DE PALIS EM SUPERFÍCIES II: O TEOREMA DE MAÑÉ

CARLOS MATHEUS

Abstract. Esta é a segunda nota numa série de três textos visando entender as idéias da prova de Pujals e Sambarino [PS] da conjectura de Palis para C^1 difeomorfismos de superfícies. Como já tinhamos antecipado ao leitor que o esquema da prova deste resultado é longo e cheio de muitas idéias, resolvemos dividir este conjunto de notas assim:

- na primeira nota (já) estudamos os argumentos de Denjoy e Schwartz (envolvendo a combinação das propriedades de *distorção limitada* e *somabilidade dos comprimentos de intervalos errantes*) para mostrar que C^2 difeomorfismos f do círculo S^1 verificam $\Omega(f) = S^1$;
- nesta segunda nota estudaremos a prova de um teorema de Mañé sobre a hiperbolicidade de endomorfismos do intervalo e do círculo; em particular, veremos que todo C^2 endomorfismo *genérico* f cujos pontos críticos estejam nas bacias de poços satisfazem o Axioma A (mais precisamente, f admite um número finito de poços tal que o maximal invariante do complementar das bacias destes poços é um conjunto hiperbólico *uniformemente expansor*);
- finalmente, na terceira nota seguiremos as idéias de Pujals e Sambarino para estender estes dois argumentos para o contexto bidimensional e aplicá-los na prova da conjectura de Palis em dimensão 2.

1. Introdução

De acordo com o resumo acima, nosso objetivo de médio prazo será expor as idéias de E. Pujals e M. Sambarino sobre a prova da C^1 conjectura de Palis em superfícies (segundo a qual todo difeomorfismo de uma superfície pode ser C^1 aproximado por um difeomorfismo *Axioma A* ou por um difeomorfismo exibindo uma *tangência homoclínica.* Porém, a demonstração deste resultado é bastante intricada de modo que para tornar a apresentação mais clara dividimos a exposição em três partes, sendo que nas duas primeiras discutiremos fatos "unidimensionais" cujos mecanismos de funcionamento formam os pilares de sustentação dos argumentos de Pujals e Sambarino. Por outro lado, como estes fatos unidimensionais podem ser discutidos *sem menção* à conjectura de Palis, deixaremos as descrições das motivações históricas, importância e a prova desta conjectura para a terceira nota. Em outras palavras, o leitor familiar com os argumentos de Denjoy e o teorema de Mañé pode pular sem dificuldades para a leitura da terceira nota.

Sem mais demoras, iremos "esquecer" nossa motivação original acerca da conjectura de Palis e pensar que estamos estudando a dinâmica unidimensional de transformações suaves (do intervalo e/ou círculo).

Date: 12 de dezembro de 2007.

O escopo do teorema de Mañé é fornecer um critério para a *hiperbolicidade*[1] de transformações unidimensionais $f : N \to N$ (do intervalo $N = [0, 1]$ e do círculo $N = S^1$). A filosofia básica por trás deste resultado é a seguinte: denotando por $\Sigma(f)$ o complementar da bacias dos poços de f (ou seja, as órbitas periódicas atratoras), então $\Sigma(f)$ é um conjunto *hiperbólico* (i.e., um compacto invariante uniformemente expansor por f) se e somente se todos os pontos periódicos de f dentro de $\Sigma(f)$ são hiperbólicos e $\Sigma(f)$ *não contém nenhum ponto crítico*[2] de f. Para o leitor que já teve contato com dinâmica complexa (unidimensional), observamos que o teorema de Mañé é inspirado no teorema de Fatou sobre a hiperbolicidade de endomorfismos da esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ (segundo o qual o conjunto de Julia $J(f)$ de um endomorfismos holomorfos de $\overline{\mathbb{C}}$ é hiperbólico quando $J(f)$ não possui pontos críticos).

Apesar do trabalho original do Mañé [M] conter muitas aplicações de seu critério de hiperbolicidade, as limitações de espaço/tempo forçam-nos uma restrição dos tópicos a serem discutidos, de modo que iremos nos concentrar somente no teorema de caracterização de hiperbolicidade abaixo.

Theorem 1.1 (Theorem A de [M])**.** *Seja $\Lambda \subset N$ é um compacto invariante de um C^2 endomorfismo $f : N \to N$ unidimensional (i.e., $N = [0, 1]$ ou $N = S^1$). Suponha que Λ não possui pontos críticos de f e toda órbita periódica de f dentro de Λ é hiperbólica repulsora (ou seja, Λ não possui poços e órbitas periódicas não-hiperbólicas). Então, uma das seguintes possibilidades ocorre:*

- *Λ é um conjunto hiperbólico ou*
- *$\Lambda = S^1$ e f é topologicamente conjugado à uma rotação irracional.*

Fechando a introdução, daremos ao leitor a organização deste texto:

- na próxima seção, revisaremos alguns enunciados de fatos provados na primeira nota [MS] sobre o teorema de Denjoy-Schwartz;
- em seguida, provaremos o teorema 1.1 no caso do intervalo $N = [0, 1]$ seguindo a exposição de [KH]; a vantagem do teorema 1.1 apenas no caso do intervalo é que o caso adicional de rotações irracionais nunca ocorrem neste contexto, de modo que isto permitirá tomar alguns "atalhos"[3] no argumento original de Mañé; porém advertimos ao leitor que está prova foi incluída *somente* por sua brevidade em relação aos argumentos em [M] e suas aplicações em dinâmica unidimensional, apesar dela *não* ser útil para generalizações (p.ex., este argumento não pode ser ampliado para dar os resultados de Pujals-Sambarino); em particular, advertimos aos interessados apenas em se preparar para a terceira nota (i.e., no teorema de Pujals-Sambarino) que numa primeira leitura pulem completamente esta seção;
- finalmente, na última seção, estudaremos o teorema 1.1 no caso geral $N = [0, 1]$ ou $N = S^1$ seguindo a abordagem de Mañé [M]; apesar desta prova ser um pouco

[1]No sentido do Axioma A de Smale.

[2]Note que, ao contrário da primeira nota, aqui *não* iremos supor que f é um difeomorfismo, de maneira que pontos críticos são permitidos

[3]De fato, este argumento mais simples foi idealizado por Van Strien. Um fato interessante desta prova de Van Strien é sua aplicação na demonstração de certos resultados em dinânica unidimensional (tais como a *quase hiperbolicidade* dos parâmetros de Misiurewicz na família quadrática).

mais longa que a anterior, iremos faze-la porque alguns elementos do argumento de Mañé (como a construção de intervalos *adaptados* e a noção de *retornos de intervalos adaptados*) irão reaparecer no argumento de Pujals-Sambarino (sob notação mais complicada logicamente)!

2. Alguns fatos da prova de Schwartz do teorema de Denjoy

Esta seção coleciona alguns fatos já vistos na primeira nota [MS] acerca do teorema de Denjoy-Schwartz.

Lemma 2.1 (Lemma 1.1 de [MS]). *Se I é um intervalo sem pontos críticos de f^i para todo $i \leq n$ e $L < \infty$ é a constante de Lipschitz de $\log|f'|$ em $\bigcup_{i=0}^{n-1} f^i(I)$ então*

$$\left|\log \frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|}\right| \leq L \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(x) - f^i(y)|$$

para quaisquer $x, y \in I$.

De fato o lemma 1.1 de [MS] *não* está enunciado exatamente como acima, entretanto o resultado acima segue da prova deste lemma, especialmente da equação (1.2) de [MS], como o leitor pode verificar.[4]

Lemma 2.2 (Lemma 1.3 de [MS]). *Nas condições do lema 2.1, se I é um intervalo errante, então $\omega(I)$ contém um ponto crítico.*

3. Prova do teorema 1.1 no caso do intervalo $N = [0, 1]$

Seguiremos a exposição de [KH] para a demonstração do teorema de Mañé no caso mais simples do intervalo $N = [0, 1]$. O primeiro passo consiste em observar que o teorema 1.1 é uma consequência do seguinte enunciado:

Theorem 3.1. *Dados f um C^2 endomorfismo de $[0, 1]$ e U uma vizinhança dos pontos críticos $C(f)$ de f, temos que*

- *todas as órbitas periódicas de f dentro de $[0, 1] - U$ com periódo muito grande são hiperbólicas repulsoras*[5]*;*
- *se $\Sigma(f)$ denota o complementar das bacias dos poços de f e todos os pontos periódicos de f em $[0, 1] - U$ são hiperbólicos, então existem $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ constantes tais que todo segmento de órbita $\{x, f(x), \ldots, f^n(x)\} \subset [0, 1] - (U \cup \Sigma(f))$ verifica $|(f^n)'(x)| \geq C\lambda^n$.*

Remark 3.1. *Apesar de termos enfatizado que tecnicamente falando iríamos estudar apenas um dos resultados do artigo* [M] *(a saber o teorema 1.1), note que o primeiro item acima corresponde ao theorem C deste artigo. O leitor entendido deve ter reconhecido no primeiro item do teorema acima um resultado mostrando que o* fenômeno de Newhouse*, i.e., coexistência*

[4]Podem acreditar em mim, afinal eu já contei nestas notas alguma mentira que não fosse verdade? :)

[5]Em particular, f não pode ter uma infinidade de poços fora de U, i.e., o *fenômeno de Newhouse* não ocorre para f no complementar de U.

de infinitas fontes (e/ou poços) não ocorre na região de pontos com dinâmica afastada de pontos críticos.

Conforme comentamos acima, assumindo o enunciado deste teorema, podemos concluir diretamente o teorema 1.1 de Mañé no caso $N = [0,1]$: com efeito, dado $\Lambda \subset [0,1]$ um compacto invariante sem pontos críticos de f, podemos tomar W uma vizinhança de $C(f)$ tal que $W \cap \Lambda = \emptyset$. Em seguida, observamos que o primeiro item do teorema 3.1 acima diz que existe $N \in \mathbb{N}$ um inteiro grande limitando o período de todas as órbitas atratoras e não hiperbólicas dentro de $[0,1] - W$. Isto implica que o conjunto de órbitas periódicas atratoras e não hiperbólicas é *compacto*. Como no teorema 1.1 de Mañé supomos que Λ possui somente órbitas periódicas hiperbólicas repulsoras, segue que existe $V \supset \Lambda$ uma vizinhança de Λ a qual não possui órbitas periódicas atratoras e não-hiperbólicas. Portanto, Λ tem uma vizinhança $Z \supset \Lambda$ cujo fecho $\overline{Z}$ não contém pontos críticos, órbitas periódicas atratoras ou não-hiperbólicas. Em particular, isto significa que o segundo item do teorema 3.1 pode ser apicado com $(U = [0,1] - \overline{Z})$ para obtermos que Λ é um conjunto hiperbólico expansor, como queríamos.

Isto reduz nossa tarefa a discussão da prova do teorema 3.1. Começaremos com um resultado combinatório simples:

Lemma 3.1. *Seja p um ponto periódico de período n e I um intervalo tal que $I \cap \mathcal{O}(p) = \emptyset$ (onde $\mathcal{O}(p)$ é a órbita de p). Então, a multiplicidade de interseção*[6] *de $\{I, f(I), \dots, f^{n-1}(I)\}$ é 3 (ao máximo).*

Proof. Considere $J \supset f^n(I)$ o intervalo *maximal* tal que $J \cap \mathcal{O}(p) = \emptyset$. Da maximalidade de J segue que a fronteira ∂J de J deve intersectar a órbita de p. Porém, como ∂J possui apenas dois pontos, obtemos que o conjunto $A = \{0 \leq i \leq n-1 : f^i(p) \in \overline{J}\}$ tem cardinalidade $\#A \leq 3$. Por outro lado, note que a maximalidade de J implica que se $f^i(I) \cap J \neq \emptyset$ então $i \in A$. Usando estes dois fatos, podemos mostrar que a multiplicidade de interseção de $\{I, f(I), \dots, f^{n-1}(I)\}$ é ≤ 3 assim: sejam $0 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq n-1$ quatro índices tais que $f^{i_1}(I) \cap f^{i_2}(I) \cap f^{i_3}(I) \cap f^{i_4}(I) \neq \emptyset$. Aplicando f^{n-i_4} e f^{n-i_3}, segue que

$$\emptyset \neq f^{n-i_4+i_1}(I) \cap f^{n-i_4+i_2}(I) \cap f^{n-i_4+i_3}(I) \cap f^n(I) \subset f^{n-i_4+i_1}(I) \cap f^{n-i_4+i_2}(I) \cap f^{n-i_4+i_3}(I) \cap J.$$

Em particular, isto implica que os três índices $n - i_4 + i_1, n - i_4 + i_2, n - i_4 + i_3$ pertencem a A. Como $\#A \leq 3$ e $n \in A$, temos duas possibilidades

- dois índices coincidem: neste caso, ocorre a igualdade $n - i_4 + i_k = n - i_4 + i_l$, onde $k, l \in \{1,2,3\}$; ou seja $i_k = i_l$;
- os três índices são distintos entre si: neste caso, como $n \in A$, segue que $n - i_4 + i_k = n$ para algum $k \in \{1,2,3\}$; ou seja, $i_4 = i_k$;

De todo modo, obtemos que em todas as situações, dois dos quatro índices i_1, i_2, i_3, i_4 devem coincidir, o que prova o lema. □

Em seguida, veremos um lema simples sobre a dinâmica de intervalos por homeomorfismos[7]:

[6]A multiplicidade de interseção de uma coleção $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ de conjuntos é o menor inteiro m tal que toda subcoleção $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_{m+1}}\}$ de $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ com $m+1$ elementos satisfaz $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_{m+1}} = \emptyset$.

[7]Observamos que a dicotomia fornecida pelo enunciado deste lema simples será importante quando discutirmos o trabalho de Pujals-Sambarino porque, usando basicamente o mesmo argumento deste lema, iremos

Lemma 3.2. *Seja I um intervalo tal que $f^n_{/I} : I \to f^n(I)$ é homeomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, uma das possibilidades abaixo ocorre:*

- *I é um intervalo errante ou*
- *existem $i, k \in \mathbb{N}$ e J um intervalo tais que $f^i(I) \subset J$, $f^k(J) \subset J$ e $f^k_{/J}$ é uma aplicação monótona.*

Proof. Suponha que I é não-errante. Então, existem $i, k \in \mathbb{N}$ tais que $f^i(I) \cap f^{i+k}(I) \neq \emptyset$. Defina $J = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{i+nk}(I)$. Note que J é um intervalo (porque $f^i(I) \cap f^{i+k}(I) \neq \emptyset$ implica $f^{i+nk}(I) \cap f^{i+(n+1)k}(I) \neq \emptyset$) com $J \supset f^i(I)$ e $f^k(J) \subset J$, como queríamos demonstrar. □

Neste ponto, estamos aptos para provar a primeira parte do teorema 3.1. De fato, o primeiro item deste teorema é uma consequência direta do seguinte lema:

Lemma 3.3. *Seja U uma vizinhança de $C(f)$. Então, existe uma sequência $M_n \to \infty$ tal que todo ponto periódico de período n cuja órbita $\mathcal{O}(p)$ não intersecta U satisfaz $|(f^n)'(p)| > M_n$.*

Proof. Como este lema só trata de pontos periódicos fora de U, podemos mudar f dentro de U para uma aplicação g e provar o lema com g no lugar de f. Para facilitar o argumento, escolheremos g com as seguintes propriedades[8]:

- $g \equiv f$ em $[0,1] - U$,
- g é uma C^2 aplicação de um intervalo K contendo uma vizinhança de $[0,1]$ tal que ∂K é uma órbita periódica atratora de g com bacia de atração imediata em $K - [0,1]$,
- para todo ponto crítico c de f, existem $W_c \subset V_c \subset U$ intervalos abertos contendo c tais que $g(J) \cup g^2(J)$ contém um ponto hiperbólico repulsor onde J é qualquer uma das duas componentes conexas de $V_c - W_c$.

De acordo com nosso comentário anterior, basta provar o lema com g no lugar de f e $V = \bigcup_{c \in C(f)} V_c$ no lugar de U. A vantagem de g sobre f consiste no seguinte fato decorrente do terceiro item acima: existe $\delta > 0$ tal que, se denotarmos por $W = \bigcup_{c \in C(f)} W_c$, toda componente conexa J de $V - W$ verifica $\ell(f^i(J)) > \delta$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Esta propriedade de "expansão" de g será útil mais tarde nesta prova.

Agora nós fazemos a seguinte construção: para cada ponto periódico $p \in K - V$ de período n, tomamos I intervalo maximal contendo p tal que $g^i(I) \cap W = \emptyset$ para todo $i \leq n$ e $g^n(I) \cap \mathcal{O}(p) = \{p\}$. Com esta notação, afirmamos que $\ell(I) \to 0$ no seguinte sentido: para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $\ell(I) \leq \varepsilon$. Com efeito, caso contrário, teríamos uma constante $\varepsilon > 0$ e p_n uma sequência de pontos periódicos com períodos $m_n \to \infty$ tais que os intervalos I_n correspondentes possuiriam comprimentos "grandes": $\ell(I_n) > \varepsilon$. Isto implica que I_n não pode convergir a um ponto, de modo que, passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que I_n converge para um intervalo I. Porém, como $g^k(I_n) \cap W =$

obter que no contexto de difeomorfismos as variedades centro-instáveis locais serão intervalos errantes ou elas acumularam em círculos invariantes.

[8]Note que a existência de g com as propriedades acima não é difícil porque aqui podemos perturbar f *sem precisar manter a proximidade* na topologia C^2. Os detalhes ficam como exercício para o leitor.

$\emptyset$ para todo $k \leq m_n$ (por construção), segue que $g^k(I) \cap W = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, *I não pode acumular em pontos críticos*. Logo, I é um intervalo *não-errante* pelo lema 2.2. Aplicando o lema 3.2, obtemos que existem $i, k \in \mathbb{N}$ e um intervalo $J \supset I$ tais que $g^i(I) \subset J$, $g^k(J) \subset J$ e g^k é monótona em J. Note que estas propriedades dizem que J possui um ponto periódico de período $2k$ tal que todo ponto de J é atraído por esta órbita periódica. Isto é um absurdo porque $p_n \in g^i(I_n) \subset J$ para todo n grande (e pontos periódicos não podem ser atraídos por outras órbitas periódicas, exceto quando estas órbitas coincidem). Portanto, isto prova a afirmação $\ell(I) \to 0$.

Fechando a prova do lema, fazemos o seguinte argumento: suponha que não existissem M_n como na conclusão do lema; isto significa que existem $M > 0$ uma constante e p_n uma sequência de pontos periódicos de períodos $m_n \to \infty$ tais que $|(g^{m_n})'(p_n)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos c_n um ponto crítico tal que nenhum ponto de $\mathcal{O}(p_n)$ está entre p_n e c_n, e I_{c_n} a componente conexa de $I_n - \{p_n\}$ cuja imagem por g^{m_n} está entre p_n e c_n (onde I_n é o intervalo construído acima). Como I_n é escolhido maximal, existe $i \leq m_n$ e J_n uma componente conexa de $V - W$ tais que $J_n \subset g^i(I_{c_n})$. Pela propriedade de "expansão" de g, segue que $\ell(g^{m_n}(I_{c_n})) > \delta$. Combinando isto com o fato $\ell(I_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, obtemos que $\ell(g^{m_n}(I_{c_n}))/\ell(I_n) \to \infty$ quando $n \to \infty$. Por outro lado, o lema 3.1 diz que $\sum\limits_{i \leq m_n} \ell(g^i(I_n)) \leq 3\ell(K)$. Juntando estes dois fatos com o lema 2.2 (e o teorema do valor intermediário[9]), teríamos que

$$M \geq |(g^{m_n})'(p_n)| \geq e^{-L} \cdot \frac{\ell(g^{m_n}(I_{c_n}))}{\ell(I_{c_n})} \to \infty$$

quando $n \to \infty$. Esta contradição finaliza a prova do lema. $\square$

Uma vez que o primeiro item do teorema 3.1 já foi provado (pelo lema acima), iremos nos concentrar no segundo item deste teorema. Observe que, como neste segundo item assumimos que todos os pontos periódicos em $[0,1] - U$ são hiperbólicos (onde U é uma vizinhança de $C(f)$), podemos usar o primeiro item do teorema 3.1 para tomar $V \subset \overline{V} \subset U$ uma vizinhança de $C(f)$ tal que todos os pontos periódicos em $[0,1] - V$ ainda são todos hiperbólicos[10]. Visando simplificar a exposição, adotaremos a seguinte notação: dado $X \subset [0,1]$, definimos

$$\Lambda_n(X) := \{x \in [0,1] : f^j(x) \notin X \cup \Sigma(f) \ \forall\ 0 \leq j \leq n\},$$

onde $\Sigma(f)$ é a união das bacias de atração dos poços de f (uma notação já utilizada acima). Nosso objetivo de longo prazo será provar que os comprimentos dos iterados até tempo n de um intervalo dentro de $\Lambda_n(V)$ são uniformemente somáveis (i.e., a soma é limitada por uma constante $C > 0$ independente de n). Para obter isto, começaremos provando alguma hiperbolicidade em intervalos errantes dentro de $\Lambda_n(V)$. Mais precisamente, temos o seguinte lema:

[9] Segundo o qual existe $x_n \in I_{c_n}$ com $|(g^{m_n})'(x_n)| = \ell(g^n(I_{c_n}))/\ell(I_{c_n})$;

[10] A prova deste fato fica como exercício para o leitor. Uma sugestão é argumentar por contradição e usar o primeiro item do teorema 3.1.

Lemma 3.4. *Existem $\delta > 0$ e $0 < \lambda < 1$ constantes tais que, se $I \subset J \subset \Lambda_{n-1}(V)$ são intervalos com $\ell(J) < \delta$, $J, f(J), \ldots, f^{n-1}(J)$ são mutualmente disjuntos e $J \subset f^n(J)$, então*

$$\ell(f^n(I)) > \lambda \ell(I).$$

Proof. Como $J \subset f^n(J)$, segue que J contém um ponto periódico p de período n. Aplicando o lema 3.3 acima ao ponto p, vemos que $|(f^n)'(p)| > M_n$. Por outro lado, como $J \subset \Lambda_{n-1}(V)$ e $J, \ldots, f^{n-1}(J)$ são mutualmente disjuntos, o lema 2.1 fornece uma constante $C > 0$ tal que $|(f^n)'(x)| \geq C \cdot M_n$ para todo $x \in J$. Em particular, segue que $\ell(f^n(I)) \geq C \cdot M_n \cdot \ell(I)$ para qualquer $I \subset J$. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ inteiro grande tal que, nas condições acima, $\ell(f^n(I)) \geq 2\ell(I)$ para todo $n \geq N$. Por outro lado, temos apenas uma quantidade *finita* de órbitas periódicas com período $n < N$ em $\Lambda_{n-1}(V)$, as quais assumimos serem todas hiperbólicas repulsoras. Portanto, existem $\delta > 0$ e $\lambda > 1$ tais que, para toda órbita periódica x com período $n < N$ e todo $|y - x| < \delta$, vale $|(f^n)'(y)| > \lambda$. Ou seja, se $J \subset \Lambda_{n-1}(V)$ com $n < N$, $\ell(J) < \delta$ e $J, f(J), \ldots, f^{n-1}(J)$ disjuntos entre si, então $|(f^n)'(x)| > \lambda$ para todo $x \in J$. Isto prova o lema em qualquer dos casos ($n < N$ ou $n \geq N$). □

Em seguida, provaremos que as componentes conexas de $\Lambda_n(V)$ ficam pequenas:

Lemma 3.5. *Seja d_n o comprimento da maior componente conexa de $\Lambda_n(V)$. Então $d_n \to 0$ quando $n \to \infty$, i.e., para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $d_n < \varepsilon$ para qualquer $n \geq n_\varepsilon$.*

Proof. Argumentaremos por contradição: se d_n não converge a zero quando n cresce, existe $\varepsilon > 0$ e uma sequência I_n de componentes conexas de $\Lambda_n(V)$ tais que $\ell(I_n) \geq \varepsilon$ para todo n. Passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que I_n converge a um intervalo I. Como $I_n \subset \Lambda_n(V)$ para todo n, segue que $I \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n(V)$. Por definição de $\Lambda_n(V)$, obtemos que I é um intervalo tal que $\omega(I)$ não possui pontos críticos. Pelo lema 2.2, I não pode ser errante. Combinando este fato com o lema 3.2, vemos que existem $i, k \in \mathbb{N}$ e J intervalo tais que $f^i(I) \subset J$, $f^k(J) \subset J$ e f^k é monótono em J. Em particular, $f^i(I)$ deve acumular em órbita periódica atratora. Como os intervalos I_n convergem para I, isto forçaria $f^i(I_n) \cap \Sigma(f) \neq \emptyset$ para todo n grande, uma contradição com a definição de $\Lambda_n(V)$ e o fato de $I_n \subset \Lambda_n(V)$. □

Agora nós introduziremos uma definição importante para nossas discussões subsequentes:

Definition 3.1. *Um intervalo I é dito n-Markov se $f^i(I) \cap f^j(I) \neq \emptyset$ com $i \leq j \leq n$ implica $f^i(I) \subset f^j(I)$.*

Com esta definição em mãos, observamos que as componentes conexas de $\Lambda_n(V)$ são n-Markov quando n é grande. Especificamente, fixamos $\delta > 0$ como no lema 3.4, $\varepsilon < \delta$ uma cota inferior para os comprimentos das componentes conexas de $U - V$ e n_ε o inteiro dado pelo lema 3.5.

Lemma 3.6. *Se I é uma componente conexa de $\Lambda_n(V)$, $I \cap \Lambda_n(U) \neq \emptyset$ e $n \geq n_\varepsilon$, então I é um intervalo $(n - n_\varepsilon)$-Markov.*

Proof. Suponha por absurdo que existissem I nas condições acima e $i < j \leq n - n_\varepsilon$ inteiros tais que $f^i(I) \cap f^j(I) \neq \emptyset$ mas $f^i(I)$ não está contido em $f^j(I)$. Isto significa que um dos extremos a de I satisfaria $f^j(a) \in \text{int}(f^j(I))$. Afirmamos que $f^t(a)$ está longe de poços para todo $t < j$ (i.e., $f^t(a) \notin \partial\Sigma(f)$). Com efeito, se $f^t(a) \in \partial\Sigma(f)$ para algum $t < j$, valeria $f^{j-t}(f^t(a)) \in \partial\Sigma(f) \cap \text{int}(f^j(I))$, uma contradição. Além disso, $f^t(a) \notin \partial V$ porque caso contrário $f^t(I)$ conteria uma componente de $U - V$, de maneira que $\ell(f^t(I)) \geq \varepsilon$. Daí seguiria que $f^t(I)$ não estaria contido em $\Lambda_{n-t}(V)$ pelo lema 3.5, uma contradição com $I \subset \Lambda_n(V)$. Combinando estes dois fatos, vemos que existe uma vizinhança W de a tal que $f^j(W) \subset f^i(I)$ (pois $f^j(a) \in \text{int}(f^i(I))$) e $f^t(W) \cap (V \cup \Sigma(f)) = \emptyset$ para todo $t \leq j$ (pois $f^t(a) \notin \partial V \cup \partial\Sigma(f)$). Em particular, teríamos $W \subset \Lambda_n(V)$. Como I é uma componente conexa de $\Lambda_n(V)$, isto implicaria $W \subset I$, um absurdo porque W é uma vizinhança do ponto extremal a de I. □

Dando continuidade ao argumento, precisaremos de mais uma definição:

Definition 3.2. *Um intervalo n-Markov I é dito (λ, n)-hiperbólico se $f^i(I), f^j(I) \subset f^k(I)$ e $i < j \leq k \leq n$ implica $\ell(f^j(I)) > \lambda \cdot \ell(f^i(I))$.*

Em seguida, iremos melhorar o lema 3.6 para incluir a hiperbolicidade:

Lemma 3.7. *Nas condições do lema 3.6, I é $(\lambda, (n - n_\varepsilon))$-hiperbólico.*

Proof. Como a propriedade de n-Markov já foi provada no lema anterior, vamos nos reter na "hiperbolicidade". Dados $i < j \leq k \leq n - n_\varepsilon$, desejamos mostrar que $\ell(f^j(I)) > \lambda \cdot \ell(f^i(I))$.

Para isto, começaremos com o caso particular de j ser *minimal* com as propriedades de $f^j(I) \subset f^k(I)$ e $i < j \leq k$. Nesta situação, definimos $J := f^{k-j+i}(I) \subset f^{j-i}(I)$ e afirmamos que $J \subset f^{j-i}(J) := f^k(I)$ e os intervalos $J, f(J), \ldots, f^{j-i-1}(J)$ são mutualmente disjuntos. Visando provar a afirmação, relembremos que f^n é um difeomorfismo sobre I. Logo, $f^{j-i}(f^i(I)) = f^j(I) \subset f^k(I)$ e $J \subset \Lambda_{j-i}(V)$ é intervalo maximal tal que $f^{j-i}(J) \subset f^k(I)$. Logo, $f^i(I) \subset J$. Por outro lado, nossas hipóteses dizem que $f^i(I) \subset f^k(I) = f^{j-i}(J)$. Em particular, vemos que $J \cap f^{j-i}(J) \supset f^i(I) \neq \emptyset$. Como I é n-Markov, J é $(j-i)$-Markov, de maneira que $J \cap f^{j-i}(J) \neq \emptyset$ implica $J \subset f^{j-i}(J) = f^k(I)$. Para completar a afirmação, basta ver que $J, f(J), \ldots, f^{j-i-1}(J)$ são 2-a-2 disjuntos. Suponha que $f^n(J) \cap f^m(J) \neq \emptyset$ para $n < m \leq j - i$. Então $f^t(J) \cap f^{j-i}(J) \neq \emptyset$ onde $t = n + (j - i - m)$. Porém, a propriedade de $(j-i)$-Markov para J implicaria que $f^{i+t}(I) \subset f^t(J) \subset f^{j-i}(J) = f^k(I)$. Como $i < i + t = j - m + n < j$, teríamos uma contradição com a escolha de j como o menor índice $> i$ tal que $f^j(I) \subset f^k(I)$. Isto prova a afirmação. Em seguida, notamos que a afirmação permite aplicar o lema 3.2 ao intervalo J para concluir que $\ell(f^j(I)) > \lambda \cdot \ell(f^i(I))$ (já que $f^i(I) \subset J$). Com isso a hiperbolicidade fica estabelecida no caso j minimal para as propriedades $f^j(I) \subset f^k(I)$ e $j > i$.

Finalmente, o caso geral $i < j \leq k$ segue do caso particular acima do seguinte modo: por recorrência, podemos fixar $i := j_0 < j_1 < \cdots < j_m := j \leq k$ tais que j_{l+1} é minimal para as propriedades $f^{j_{l+1}}(I) \subset f^k(I)$ e $j_{l+1} > j_l$. Usando o caso particular já visto, sabemos que $\ell(f^{j_{l+1}}(I)) > \lambda \cdot \ell(f^{j_l}(I))$. Concatenando estas estimativas, vemos que $\ell(f^j(I)) = \ell(f^{j_m}(I)) > \lambda^m \cdot \ell(f^{j_0}(I)) = \lambda^m \ell(f^i(I)) \geq \lambda \cdot \ell(f^i(I))$, o que prova o lema. □

Relembre que nosso objetivo é conseguir somabilidade uniforme dos iterados de intervalos longe de pontos críticos e poços. Neste sentido, veremos que esta somabilidade é "grátis" quando temos hiperbolicidade. Mais precisamente, vale o seguinte lema:

Lemma 3.8. *Se I é um intervalo (λ, n)-hiperbólico (com $\lambda > 1$) então*

$$\sum_{j=0}^{n} f^j(I) \leq \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Proof. Usando a propriedade de Markov, podemos selecionar $\{i_1, \dots, i_m\} \subset \{0, \dots, n\}$ tais que para todo $a \leq n$, existe i_l com $f^a(I) \subset f^{i_l}(I)$ e $f^{i_1}(I), \dots, f^{i_m}(I)$ são disjuntos entre si. Em seguida, para cada i_l fixado, consideramos $A(i_l) = \{0 \leq a \leq n : f^a(I) \subset f^{i_l}(I)\}$. Por definição, temos que $\bigcup_{l=1}^{m} A(i_l) = \{0, \dots, n\}$. Além disso, a (λ, n)-hiperbolicidade de I permite dizer que[11]

$$\sum_{a \in A(i_j)} \ell(f^a(I)) < \left(\sum_{p=0}^{\#A(i_l)} \lambda^p \right) \cdot \ell(f^{i_l}(I)) \leq \frac{\lambda}{\lambda - 1} \ell(f^{i_l}(I))$$

para todo $l = 1, \dots, m$. Juntando estas estimativas e usando a disjunção dos $f^{i_l}(I)$, vemos que

$$\sum_{j=0}^{n} \ell(f^j(I)) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{a \in A(i_l)} \ell(f^a(I)) \leq \frac{\lambda}{\lambda - 1} \sum_{l=1}^{m} \ell(f^{i_l}(I)) \leq \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Isto completa o argumento. $\square$

Finalmente, iremos combinar os elementos acima para concluir a desejada somabilidade no caso geral:

Lemma 3.9. *Existe uma constante $C > 0$ tal que todo intervalo $I \subset \Lambda_n(V)$ verifica*

$$\sum_{i=0}^{n} \ell(f^i(I)) \leq C.$$

Proof. Temos duas possibilidades: $n \leq n_\varepsilon$ ou $n > n_\varepsilon$. Quando $n \leq n_\varepsilon$, fazemos a estimativa grosseira

$$\sum_{i=0}^{n} \ell(f^i(I)) \leq n_\varepsilon$$

já que todo subintervalo de $[0, 1]$ tem comprimento ≤ 1. Já no caso $n > n_\varepsilon$, usamos os lemas 3.7 e 3.8 para obter a estimativa

$$\sum_{i=0}^{n} \ell(f^i(I)) = \sum_{i=0}^{n-n_\varepsilon} \ell(f^i(I)) + \sum_{i=n-n_\varepsilon}^{n} \ell(f^i(I)) \leq \frac{\lambda}{\lambda - 1} + n_\varepsilon := C.$$

Com isto, vemos que, em qualquer dos casos, o lema está provado. $\square$

[11] Com efeito, ordenando $A(i_l) = \{a_1 < \dots < a_q := i_j\}$, vemos que a hiperbolicidade implica $\ell(f^{a_{s+1}}(I) > \lambda \ell(f^{a_s}(I)$. Concatenando estas estimativas, vemos que $\ell(f^{a_s}(I) < \lambda^{q-l} \cdot \ell(f^{i_l}(I)$ para todo s (onde $q = \#A(i_j)$), o que prova o fato afirmado.

Encerrando esta seção, veremos como usar a somabilidade do lema acima para concluir o segundo item do teorema 3.1 (e consequentemente a demonstração deste teorema). Suponha que o enunciado deste segundo item fosse falso. Isto significa que existem $n_i \to \infty$ e $x_i \in \Lambda_{n_i}(V)$ tais que $|(f^{n_i})'(x_i)| \to 1$. Fixemos $\varepsilon > 0$ uma cota inferior para os comprimentos das componentes conexas de $U - V$ tal que $\varepsilon < |x - y|$ para todo $x, y \in \partial\Sigma(f)$. Observe que, se I_i é a componente conexa de $\Lambda_{n_i}(V)$ contendo x_i, então $\ell(f^{m_i}(I_i)) > \varepsilon$ para algum $m_i < n_i$. De fato, sendo I_i uma componente conexa de $\Lambda_{n_i}(V)$, temos duas possibilidades:

- existe $m_i < n_i$ tal que $f^t(I_i) \cap \partial V \neq \emptyset$: neste caso, como $f^{m_i}(x_i) \notin U$, segue que $f^{m_i}(I_i)$ contém uma componente conexa de $U - V$, donde $\ell(f^{m_i}(I_i)) > \varepsilon$;
- existem $t_i < m_i < n_i$ tais que $f^{t_i}(a), f^{m_i}(b) \in \partial\Sigma(f)$, onde a e b são os extremos de I: neste caso, segue da invariância que $f^{m_i}(a) \in \partial\Sigma(f)$, de modo que $\varepsilon < \ell(f^{m_i}(I_i))$.

Por outro lado, sabemos que $\ell(I_i) \to 0$ quando $i \to \infty$ (pelo lema 3.5). Logo, a estimativa $\ell(f^{m_i}(I_i)) > \varepsilon$ diz que $m_i \to \infty$. Em seguida, notamos que, passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que $f^{m_i}(I_i)$ converge para um intervalo I com $\ell(I) \geq \varepsilon$. Entretanto, estamos supondo que $|(f^{n_i})'(x_i)| \to 1$, uma informação a qual combinada com o lema 3.9 de somabilidade e o lema 2.1 de distorção nos fornece $\ell(f^{n_i}(I_i)) \leq 2\ell(I_i)$ para todo i grande. Em particular, segue que $\ell(f^{n_i}(I_i)) \to 0$ quando $i \to \infty$ (já que $\ell(I_i) \to 0$ como vimos acima). Portanto, $n_i - m_i \to \infty$ quando $i \to \infty$, de maneira que $I \subset \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n(V)$, um absurdo com o lema 3.5.

Com isto terminamos a prova do segundo item do teorema 3.1 (e consequentemente a demonstração do teorema). Agora passaremos a investigar a prova do teorema 1.1 no caso geral seguindo o esquema original de Mañé.

4. Prova do teorema 1.1 no caso geral $N = [0, 1]$ ou $N = S^1$

Começaremos com algumas notações e definições preliminares fundamentais no que se seguirá. Dados f um endomorfismo de N, $\Lambda \subset N$ e $x \in \Lambda$, denotaremos por $\mathcal{O}^-(x, \Lambda)$ o conjunto das pré-órbitas de x dentro de Λ, i.e.,

$$\mathcal{O}^-(x, \Lambda) := \{\theta : \mathbb{N} \to \Lambda : \theta(0) = x \text{ e } f(\theta(n+1)) = \theta(n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Usando esta notação podemos dar um critério simples para a hiperbolicidade de conjuntos invariantes de f:

Lemma 4.1 (Lemma I.1 de [M])**.** *Sejam f um C^1 endomorfismo de N e Λ um compacto f-invariante. Suponha que*

$$\lim_{n \to \infty} |(f^n)'(\theta(n))| = \infty \tag{4.1}$$

para todo $x \in \Lambda$ e $\theta \in \mathcal{O}^-(x, \Lambda)$. Então, Λ é hiperbólico.

A vantagem deste lema é evidente: para obter hiperbolicidade, podemos simplesmente ver que as derivadas crescem arbitrariamente, ao invés de mostrar que as derivadas crescem exponencialmente (como a definição requer).

Proof. De fato Mañé refere-se a este lema como um exercício fácil cuja verificação fica para o leitor. Uma sugestão ao leitor para este "exercício" seria a seguinte: observe que Λ é hiperbólico equivale a $|(f^n)'(x)| \to \infty$ para todo $x \in \Lambda$. Com efeito, isto segue do seguinte argumento de compacidade. Como $|(f^n)'(x)| \to \infty$ para todo $x \in \Lambda$, podemos fixar para cada $x \in \Lambda$ um inteiro n_x e uma vizinhança U_x tais que $|(f^{n_x})'(y)| > 2$ para todo $y \in U_x$ e $n \geq n_x$. Por compacidade, podemos escolher um conjunto finito $\{x_1, \dots, x_k\} \subset \Lambda$ tal que as vizinhanças $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_k}\}$ formam uma cobertura de Λ. Tomando $N = \max\{n_{x_1}, \dots, n_{x_k}\}$, segue que $|(f^n)'(x)| > 2$ para todo $x \in \Lambda$ e $n \geq N$. Fixemos $C > 0$ uma constante[12] tal que $|(f^j)'(x)| \geq C$ para todo $x \in \Lambda$ e $0 \leq j \leq N$. Logo, para quaisquer $x \in \Lambda$ e $n \geq 1$, escrevendo $n = mN + r$ (onde $0 \leq r < N$), vemos que

$$|(f^n)'(x)| \geq C \cdot 2^m = C \cdot (2^{1/N})^{mN} \geq K \cdot \lambda^n,$$

onde $\lambda := 2^{1/N} > 1$ e $K = C/2$. Isto prova a hiperbolicidade de Λ sob a hipótese $|(f^n)'(x)| \to \infty$ para todo $x \in \Lambda$. Já a equivalência entre as hipóteses $|(f^n)'(x)| \to \infty$ e (4.1) fica para o leitor.[13] $\square$

Visando facilitar o uso deste lema, introduziremos os conceitos de *sequências coerentes de ramos (inversos)* e *intervalos adaptados*:

Definition 4.1. *Dado $J \subset N$ um intervalo aberto, dizemos que $\phi : J \to N$ é um* ramo *de f^{-n}/J se ϕ é uma aplicação C^1 tal que $f^n(\phi(x)) = x$ para todo $x \in J$. Uma* sequência coerente de ramos *é $(J, \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ onde $J \subset N$ é um intervalo aberto e $\phi_n : J \to N$ são ramos de f^{-n}/J tais que $f \circ \phi_{n+1} = \phi_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Dados f um C^1-endomorfismo e Λ um compacto f-invariante, dizemos que J é um intervalo adaptado *para Λ se existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in J \cap \Lambda$ e $\theta \in \mathcal{O}^-(x, \Lambda)$ tem-se uma sequência coerente de ramos $(J, \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ satisfazendo as condições:*

- $\phi_n(x) = \theta(n)$
- $d(\phi_n(J), C(f)) > \delta$
- $\phi_n(J) \subset J$ *ou* $\phi_n(J) \cap J = \emptyset$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, dizemos que uma sequência coerente de ramos $(J, \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ está associada *a Λ se existe $x \in J \cap \Lambda$ tal que $\phi_n(x) \in \Lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Em seguida, definiremos a noção de *conjunto de retornos de intervalos adaptados*:

Definition 4.2. *Sejam f um C^1 endomorfismo, Λ compacto f-invariante e J intervalo adaptado para Λ. Dizemos que $\psi : J \to J$ é um* retorno *associado a Λ se ψ é um ramo de f^{-m}/J com $f^j(\psi(J)) \cap J = \emptyset$ para todo $0 < j < m$ e $\psi(x) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(\Lambda)$ para algum*

[12] Essa constante existe por compacidade e o fato de Λ não possuir pontos críticos.

[13] Honestamente falando eu não verifiquei os detalhes disso, porém eu imagino que um argumento do seguinte tipo funcione: assumindo (4.1), suponha que a condição $|(f^n)'(x)| \to \infty$ para todo $x \in \Lambda$ não ocorre. Isto significa que existem uma constante $C > 0$ e $x_0 \in \Lambda$ com $|(f^n)'(x_0)| \leq C$ para todo $n \geq 1$. Olhamos para $\omega(x) \subset \Lambda$. Note que todo ponto $p \in \omega(x)$ possui uma pré-órbita θ contida em Λ (pois se $f^{n(i,0)}(x) \to p$, podemos tomar uma subsequência $n(i,1)$ de $n(i,0)$ tal que a sequência $f^{n(i,1)-1}(x)$ converge para um ponto $\theta(1)$ (isto é possível por compacidade). Note que $f^{n(i,1)}(x) = f(f^{n(i,1)-1}(x)) \to f(\theta(1))$ e $f^{n(i,1)}(x) \to p$ (porque $n(i,1)$ é subsequência de $n(i,0)$. Em seguida tomamos $n(i,2)$ uma subsequência de $n(i,1)$ tal que $f^{n(i,2)-2} \to \theta(2)$ e $f(\theta(2)) = \theta(1)$, $f(\theta(1)) = p$, etc. Desse modo definimos uma pré-órbita θ de p. Como estamos assumindo (4.1), i.e., pré-órbitas são hiperbólicas, vemos que as derivadas de f^n não podem permanecer limitadas em x_0 porque x_0 acumula em $\omega(x_0)$ um conjunto "hiperbólico" (no sentido de (4.1)).

$x \in J \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(\Lambda)$. Denotamos por $\mathcal{R}(\Lambda, J)$ o conjunto de retornos $\psi : J \to J$ de J associados a Λ.

Partindo destas noções, temos os seguintes lemas centrais:

Lemma 4.2 (Lemma I.2 de [M])**.** *Sejam f um C^2 endomorfismo não topologicamente equivalente a uma rotação irracional e $\Lambda \subset N - \partial N$ um compacto f-invariante sem pontos críticos de f. Então, para todo $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(\Lambda)$* não-periódico*, existe J intervalo adaptado para Λ contendo x (i.e., $x \in J$).*

Lemma 4.3 (Lemma I.3 de [M])**.** *Em adição as hipóteses do lema acima, suponha que o conjunto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(\Lambda)$ contém um ponto não-periódico. Então, existe J intervalo adaptado para Λ com* retornos contrativos *(com boas propriedades de distorção), i.e., temos duas constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que toda sequência coerente de ramos inversos $(J, \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ verifica*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\phi_m'(x)| \leq C, \tag{4.2}$$

$$\frac{|\phi_n'(x)|}{|\phi_n'(y)|} \leq C \tag{4.3}$$

para quaisquer $x, y \in J$, $n \geq 1$, e

$$|\psi'(x)| \leq \lambda < 1 \tag{4.4}$$

para todo $x \in J$, $\psi \in \mathcal{R}(\Lambda, J)$.

Estes dois resultados chaves fornecem critérios para a existência de intervalos adaptados com retornos contrativos e boas propriedades de distorção. Enquanto que a prova destes dois fatos irão ocupar todo o resto desta última seção, neste instante já podemos obter o teorema 1.1 como consequência destes lemas.

4.1. **Prova do teorema 1.1 assumindo os lemas 4.2 e 4.3.** Começamos por notar que podemos supor que $\Lambda \subset N - \partial N$. Com efeito, $\Lambda \cap \partial N \neq \emptyset$ implica $N = [0, 1]$. Daí estendemos f para um endomorfismo g de $[-1, 2]$ de modo que $\Lambda \cap \{-1, 2\} = \emptyset$ e trabalhamos com o endomorfismo g atuando em $N = [-1, 2]$ sem perda de generalidade.

A prova do teorema 1.1 será por redução ao absurdo: suponha que f não é topologicamente conjugado a uma rotação irracional e Λ não é hiperbólico. Denote por $\mathcal{F}$ a coleção de subconjuntos compactos invariantes não-hiperbólicos de Λ. Obviamente $\mathcal{F} \neq \emptyset$ porque $\Lambda \in \mathcal{F}$. Considere a ordem parcial $\prec$ em $\mathcal{F}$ definida como $A \prec B$ se $A \subset B$. Observe que toda subfamília $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ totalmente ordenada com respeito a $\prec$ possui uma cota inferior em $\mathcal{F}$: com efeito, o conjunto $\Gamma(\mathcal{G}) := \bigcap_{\Gamma\in\mathcal{G}} \Gamma$ é uma cota inferior para $\mathcal{G}$; mais ainda, $\Gamma(\mathcal{G}) \in \mathcal{F}$ porque caso contrário $\Gamma(\mathcal{G})$ seria um conjunto hiperbólico, de modo que a robustez da hiperbolicidade diria que, para alguma vizinhança compacta U de $\Gamma(\mathcal{G})$, o maximal invariante $\bigcap_{n\geq 0} f^n(U)$ é hiperbólico; por outro lado, sendo U uma vizinhança de $\Gamma(\mathcal{G})$, seguiria que $\Gamma \subset U$ para algum $\Gamma \in \mathcal{G}$, de maneira que Γ seria hiperbólico, uma contradição com $\Gamma \in \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Em particular, o lema de Zorn garante a existência de um elemento minimal Λ_0 para $\prec$ em $\mathcal{F}$. Observe que $\bigcap_{n\geq 0} f^n(\Lambda_0)$ não é hiperbólico (porque sua hiperbolicidade implicaria que Λ_0 é hiperbólico pelo critério do lema 4.1). Portanto, a minimalidade de Λ_0 com respeito a $\prec$ diz que $\bigcap_{n\geq 0} f^n(\Lambda_0) = \Lambda_0$, donde segue que $f(\Lambda_0) = \Lambda_0$. Mais ainda, Λ_0 deve possuir algum ponto *não-periódico* pois nossas hipóteses garantem que pontos periódicos em Λ_0 são hiperbólicos, de modo que o lema 4.1 implicaria que Λ_0 seria hiperbólico se ele possuisse apenas pontos periódicos. Agora tomamos proveito da existência de pontos não-periódicos em Λ_0 para aplicar o lema 4.3 e concluir que temos J um intervalo adaptado com retornos contrativos e boas propriedades de distorção. Com isto estamos aptos para mostrar que Λ_0 é hiperbólico através do critério do lema 4.1, um absurdo que finaliza a prova do teorema 1.1. Com este intuito, fixamos $x \in \Lambda_0$, $\theta \in \mathcal{O}^-(\Lambda_0, x)$ e denotamos por Γ o conjunto limite de θ (i.e., $\Gamma := \{p : \liminf_{n\to\infty} d(p, \theta(n)) = 0\}$). Observe que $\Gamma \subset \Lambda_0$ é um compacto invariante. Separamos nosso argumento em dois casos:

- $\Gamma \neq \Lambda_0$ ("dinâmica não-minimal"): nesta situação, sendo Γ um compacto invariante, vemos que a minimalidade de Λ_0 implica que Γ é hiperbólico; usando a hiperbolicidade de Γ, vemos que
$$\lim_{n\to\infty} |(f^n)'(\theta(n))| = \infty.$$
- $\Gamma = \Lambda_0$ ("dinâmica minimal"): nesta situação, a pré-órbita θ de x entra no intervalo adaptado J, ou seja, existe n_0 tal que $\theta(n_0) \in J \cap \Lambda_0$; definimos $\rho(n) = \theta(n + n_0)$ de modo que $\rho \in \mathcal{O}^-(\Lambda_0, \theta(n_0))$ e usamos o fato de J ser adaptado para Λ_0 para inferir que existe uma sequência coerente de ramos $(J, \{\phi_n\})$ tal que $\phi_n(\theta(n_0)) = \rho(n)$ para todo $n \geq 1$; mais ainda, (4.2) diz que $\sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n'(\theta(n_0))| < \infty$, donde $\lim_{n\to\infty} |\phi_n'(\theta(n_0))| = 0$. Logo, $\lim_{n\to\infty} |(f^n)'(\rho(n))| = \infty$ porque $(f^n)'(\rho(n)) = \phi_n'(\theta(n_0))^{-1}$; em particular,
$$\lim_{n\to\infty} |(f^n)'(\theta(n))| = |(f^{n_0})'(\theta(n_0)| \cdot \lim_{n\to\infty} |(f^{n-n_0})'(\rho(n - n_0))| = \infty.$$

Portanto, mostramos que, independentemente do caso, os pontos de Λ_0 verificam a condição do lema 4.1, de modo que Λ_0 seria hiperbólico, uma contradição. Isto termina a prova do teorema 1.1 (módulo os lemas 4.2 e 4.3).

4.2. **Prova do lema 4.2.** Começaremos a demonstração com algumas definições e um lema do tipo Denjoy.

Definition 4.3. *Dado f um endomorfismo de classe C^1 dizemos que um intervalo aberto $J \subset N$ é um* d-intervalo[14] *se $f^n_{/J}$ é injetiva e não possui pontos críticos para todo $n \geq 1$. Um d-intervalo $J \subset N$ é dito* eventualmente periódico *se existem um d-intervalo J_1 e $n \geq 0$, $m \geq 1$ inteiros tais que $f^m(J_1) \subset J_1$ e $f^n(J) \subset J_1$.*

Lemma 4.4. *Seja f um C^2-endomorfismo não topologicamente conjugado a uma rotação irracional. Então, todo d-intervalo J satisfaz uma das seguintes possibilidades:*

[14]A letra d no nome d-intervalo refere-se ao fato de f^n ser um difeomorfismo sobre o intervalo em consideração.

- *J é eventualmente periódico ou*
- *J acumula em pontos críticos:* $\liminf_{n\to\infty} d(f^n(J)), C(f)) = 0$.

Este lema foi dito ser do tipo Denjoy porque seu enunciado contém uma dicotomia entre intervalo não-errante versus acumulação em pontos críticos. Como o leitor pode esperar, a prova deste lema não foge ao esquema da prova dos lemas da nota [MS]. Por isso, daremos um esquema grosseiro da prova e deixamos os detalhes para o leitor conferir no texto [MS].

Proof. Começamos por observar que o caso de f ser um difeomorfismo já foi tratado em [MS]. Por isso, iremos assumir que f não é um difeomorfismo. Em particular, fixando J_0 um d-intervalo, podemos considerar d-intervalos maximais (únicos) $J_i \supset f^i(J)$ (porque f não é difeomorfismo). Suponha que existem $m > n \geq 0$ inteiros tais que $J_m \cap J_n \neq \emptyset$. Neste caso, a maximalidade implica $J_m = J_n$ e

$$f^{m-n}(J_m) \cap J_m \supset f^{m-n}(f^n(J_0)) \cap J_m = f^m(J_0) \cap J_m = f^m(J_0) \neq \emptyset.$$

Por outro lado, $f^{m-n}(J_m)$ é um d-intervalo, de modo que a maximalidade de J_m implica

$$f^{m-n}(J_m) \subset J_m.$$

Em outras palavras, J_0 é um intervalo eventualmente periódico quando existem $m > n \geq 0$ com $J_m \cap J_n \neq \emptyset$. Portanto, temos que analisar o que acontece no caso $J_m \cap J_n = \emptyset$ para todo m, n. Neste caso, os intervalos J_n formariam uma família "errante"[15]. Em particular, temos a condição de somabilidade

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ell(J_n) < \infty.$$

Usando estas condições (família errante e somabilidade) no argumento da prova do lema 1.3 de [MS] obtemos que J_n acumula em pontos críticos (compare com o enunciado do lema 2.2 acima). Ou seja,

$$\liminf_{n\to\infty} d(J_n, C(f)) = 0.$$

Entretanto, a somabilidade diz que $\ell(J_n) \to 0$ e a desigualdade triangular diz que

$$d(f^n(J_0), C(f)) \leq d(J_n, C(f)) + \ell(J_n).$$

Logo,

$$\liminf_{n\to\infty} d(f^n(J_0), C(f)) = 0$$

quando $J_m \cap J_n = \emptyset$ para todo n, m. Isto termina a prova do lema. □

Agora vamos para o corpo da prova do lema 4.2. Para isto, precisaremos de um pequeno resultado:

[15]De fato, o único "problema" aqui é a condição $f^{m-n}(J_n) = J_m$ a qual não é satisfeita (mas somente $J_m \supset f^{m-n}(J_n)$). Porém isto não é problema para o argumento de Denjoy-Schwartz porque o fato importante naquela prova é que os intervalos sejam d-intervalos.

Proposition 4.1. *Sejam f um C^2 endomorfismo e $\Lambda \subset N - \partial N$ um compacto invariante sem pontos críticos de f. Então, para quaisquer $\delta > 0$ e $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(\Lambda)$ ponto* não-periódico, *existe $\varepsilon > 0$ tal que todo intervalo aberto J contendo a com $\ell(J) \leq \varepsilon$ satisfaz a seguinte propriedade: para todo $x \in J \cap \Lambda$ e $\theta \in \mathcal{O}^-(\Lambda, x)$ tem-se uma sequência coerente de ramos $(J, \{\phi_n\})$ com $\phi_n(x) = \theta(n)$ e $\ell(\phi_n(J)) \leq \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Proof. Fixemos $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(\Lambda)$, $\delta > 0$ e definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, a constante $\varepsilon_n > 0$ como a maior constante positiva tal que o intervalo $J_n := (a - \varepsilon_n, a + \varepsilon_n)$ satisfaz as seguintes propriedades: para todo $x \in J_n \cap \Lambda$ e $\theta \in \mathcal{O}^-(\Lambda, x)$, existem $\phi_j : J_n \to N$ ramos inversos de $f^{-j}_{/J_n}$ com $\phi_j(x) = \theta(j)$, $\ell(\phi_j(J_n)) \leq \delta$ e $f \circ \phi_j = \phi_{j-1}$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Note que para efeito da prova do lema, podemos assumir sem perda de generalidade que $0 < 2\delta < d(\Lambda, C(f) \cup \partial N)$. Neste caso, a maximalidade de J_n diz que existe $1 \leq j_n \leq n$ com

$$\ell(\phi_{j_n}(J_n)) = \delta.$$

Por outro lado, note que o lema fica provado se mostrarmos que $\liminf_{n\to\infty} \varepsilon_n = \varepsilon > 0$. Com efeito, se este for o caso, basta notar que $J = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ verifica as conclusões desejadas. Iremos proceder por contradição. Suponha que $\liminf_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Isto implica que $j_n \to \infty$. Definimos $U_n = \phi_{j_n}(J_n)$. Passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que $U_n \to U$, onde U é um d-intervalo com comprimento δ. Pelo lema 4.4 (lema do tipo Denjoy-Schwartz), sabemos que existe V um d-intervalo e $m, N \geq 1$ inteiros tais que

$$f^m(U) \subset V \text{ e } f^N(V) \subset V \tag{4.5}$$

(pois U não acumula em pontos críticos). Em particular, como V é um d-intervalo, f^N/V não possui pontos crítcos. Logo, juntando o fato de f^N/V não ter pontos críticos com (4.5), segue que o ω-limite $\omega(q)$ de todo ponto $q \in U$ é uma órbita periódica (digamos $\omega(q) = \gamma$). Fixado $q \in U$, tome n_0 inteiro grande tal que $q \in U_n$ para todo $n \geq n_0$. Com esta notação, temos que

$$d(a, \gamma) \leq \varepsilon_n + d(J_n, \gamma) = \varepsilon_n + d(f^{j_n}(U_n), \gamma) \leq \varepsilon_n + d(f^{j_n}(q), \gamma).$$

Por outro lado, como $j_n \to \infty$ (i.e., j_n é uma sequência infinita) e $\omega(q) = \gamma$, sabemos que $\liminf_{n\to\infty} d(f^{j_n}(q), \gamma) = 0$. Além disso, estamos assumindo que $\liminf_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Portanto, obtemos que $a \in \gamma$, um absurdo com o fato de a não ser periódico. $\square$

Agora estamos aptos para demonstrar o lema 4.2. Começamos com o caso de f ser uma imersão (i.e., $C(f) = \emptyset$). Neste caso, olhamos para o grau $\deg(f)$ de f. Se $\deg(f) = \pm 1$, f é um difeomorfismo. Note que f tem número de rotação racional (porque f é C^2 e f não é topologicamente conjugada a uma rotação irracional, por hipótese). Em particular, f possui um ponto periódico (ao menos) e a teoria de homeomorfismos do círculo implica que todo ponto não-periódico x deve ser heteroclinicamente relacionado a órbitas periódicas (veja a proposition 11.2.2 de [KH] para mais detalhes). Usando esta informação vemos que[16] existe J intervalo adaptado contendo x, o que acabaria a prova. Se $\deg(f) = d$ com $d \neq \pm 1$,

[16] Já que todo intervalo aberto $x \in J$ com $f^{-n}(J) \cap J = \emptyset$ para todo $n \geq 1$ é adaptado.

consideramos $g(z) = z^d$ e um resultado de Shub garante que $g \circ h = h \circ f$ para algum $h : S^1 \to S^1$ monótono. Por outro lado, pode-se ver que a construção de intervalos adaptados para g não é difícil: qualquer intervalo J cujos extremos sejam pontos fixos de g^n tal que o interior de J não possui pontos fixos de g^n é um intervalo adaptado para qualquer $x \in S^1$. Em seguida, usando passamos esta construção de g para f através de h: dado $x \in \Lambda$, fixamos J um intervalo adaptado de g contendo $h(x)$ e notamos que $h^{-1}(J)$ é um intervalo adaptado de f contendo x. Isto termina a prova do lema 4.2 no caso de f ser uma imersão.

Agora estudaremos o caso de f não ser imersão (i.e., $C(f) \neq \emptyset$). Fixemos $x \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} f^n(\Lambda)$ ponto não-periódico, $\delta > 0$ tal que $0 < 2\delta < d(\Lambda, C(f) \cup \partial N)$ e consideramos $\varepsilon > 0$ fornecido pelo lema 4.1. Com estas escolhas, sabemos que todo intervalo $J \ni x$ com $\ell(J) \leq \varepsilon$ verifica o primeiro item da definição 4.1 de intervalo adaptado (pelo lema 4.1). Além disso, o segundo item da definição 4.1 também é verificado por J porque o lema 4.1 diz que $\ell(\phi_n(J)) < \delta$ para toda sequência coerente de ramos inversos $(J, \{\phi_n\})$ associada a Λ. Portanto,

$$d(\phi_n(J), C(f)) \geq d(\Lambda, C(f)) - \ell(\phi_n(J)) \geq d(\Lambda, C(f)) - \delta > \delta.$$

Em outras palavras, pelo lema 4.1, a condição $\ell(J) \leq \varepsilon$ garante que J satisfaz os dois primeiros requisitos da definição 4.1 de intervalo adaptado. Logo, resta-nos encontrar um intervalo $J \ni x$ com $\ell(J) \leq \varepsilon$ e verificando a terceira condição da definição 4.1. Para isto, dado J intervalo aberto, denotaremos por $\mathcal{C}(J)$ o conjunto de sequências coerentes de ramos inversos $(J, \{\phi_n\})$ associados a Λ e $\widehat{J}$ a componente conexa contendo x do aberto

$$J \cup \bigcup_{\{\phi_n\} \in \mathcal{C}(J)} \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi_n(J).$$

Note que a definição de $\widehat{J}$ torna claro que $(\widehat{J}, \{\phi_n\}) \in \mathcal{C}(J)$ e $\phi_n(\widehat{J}) \cap \widehat{J} \neq \emptyset$ implica $\phi_n(\widehat{J}) \subset \widehat{J}$ (i.e., $\widehat{J}$ sempre verifica a 3.ª condição na definição 4.1). Tomamos $J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset \{x\}$ intervalos abertos com $\ell(J_n) \to 0$ e olhamos para a sequência $\widehat{J}_1 \supset \widehat{J}_2 \supset \cdots \supset \{x\}$ correspondente. Se $\ell(\widehat{J}_n) \to 0$ acabamos porque escolhendo n grande com $\ell(\widehat{J}_n) \leq \varepsilon$ seguiria da discussão acima que $\widehat{J}_n$ é intervalo adaptado contendo x, o que acabaria a demonstração. Suponha que $\ell(\widehat{J}_n) \neq 0$, i.e., $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \widehat{J}_n \neq \{x\}$ e denotemos por $x \in U \subset \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \widehat{J}_n$ um intervalo aberto. Afirmamos que $U \subset \Lambda$. Com efeito, dados $y \in U$ e $\eta > 0$, tomemos m inteiro grande com $\ell(J_m) < \eta$ e

$$\sup\{\ell(\phi_n(J_m)) : n \geq 1, (J_m, \{\phi_n\}) \in \mathcal{C}(J_m)\} < \eta.$$

A existência de m como acima é garantida pelo lema 4.1. Note que a definição de $\widehat{J}_m$ e o fato de $y \in U \subset \widehat{J}_m$ implicam que $y \in J_m$ ou $y \in \phi_n(J_m)$ onde $\{\phi_n\} \in \mathcal{C}(J_m)$. Em qualquer caso, como $J_m := \phi_0(J_m)$ e $\phi_n(J_m)$ possuem pontos de Λ, pela escolha de m, temos $d(y, \Lambda) \leq d(y, \phi_n(J_m)) \leq \ell(\phi_n(J_m)) < \eta$. Como $\eta > 0$ é arbitrário, segue que $y \in \Lambda$. Ou seja, $U \subset \Lambda$, como queríamos.

Por outro lado, a invariância de Λ diz que $U \subset \Lambda$ implica $f^n(U) \subset \Lambda$ para todo $n \geq 0$. Como Λ não possui pontos críticos, segue que f^n/U não tem pontos críticos. Logo, U é um d-intervalo de f. Tomamos $U \subset V \subset \Lambda$ d-intervalo maximal. Pelo lema 4.4 (tipo Denjoy-Schwartz), V é eventualmente periódico. A construção de U mostra que $x \in \overline{U}$. Temos duas possibilidades:

- $x \in V$: como V é eventualmente periódico e x é um ponto não-periódico, um argumento simples (similar a prova da proposition 11.2.2 de [KH]) mostra que existe J intervalo aberto com $x \in J \subset V$ com $f^n(J) \cap J = \emptyset$ para todo $n \geq 1$. Daí segue que $\phi_n(J) \cap J = \emptyset$ para todo $n \geq 1$, i.e., J é um intervalo adaptado contendo x.
- $x \in \partial V$: em geral, a dicotomia do lema 4.1 aplicada em V diz que um ponto de ∂V é eventualmente periódico ou sua órbita contém um ponto crítico (às vezes ambos). Porém, como $x \in \Lambda$ e Λ não tem pontos críticos, vemos que x é eventualmente periódico. Por outro lado, estamos assumindo que x não é periódico. Em particular, segue que V é eventualmente periódico mas V não é periódico, e

$$\liminf_{n\to\infty} d(f^n(V), V) > 0. \tag{4.6}$$

Além disso, como $\widehat{J}_m \neq J_m$ (pois estamos assumindo $\ell(J_m) \to 0$ e $\ell(\widehat{J}_m) \nrightarrow 0$), temos que, para todo $m \geq 1$, existem $n_m \geq 1$ e $(J_m, \{\phi_n\}) \in \mathcal{C}(J_m)$ tais que

$$U \cap J_m \cap \phi_{n_m}(J_m) \neq \emptyset.$$

Consequentemente, $d(x, \phi_{n_m}(x)) \leq \ell(J_m) + \ell(\phi_{n_m}(J_m))$. Como $\ell(J_m) \to 0$ e o lema 4.1 garante que

$$\sup\{\ell(\phi_n(J_m) : n \geq 1, (J_m, \{\phi_n\}) \in \mathcal{C}(J_m)\} \to 0$$

quando $m \to \infty$, obtemos que $d(x, \phi_{n_m}(x)) \to 0$ quando $m \to \infty$. Combinando isto com o fato de x não ser periódico, segue que a sequência $\{n_m\}_{m\geq 1}$ não é limitada. Por outro lado, aplicando f^{n_m} em $U \cap \phi_{n_m}(J_m) \cap J_m$, tem-se que

$$\emptyset \neq f^{n_m}(U \cap \phi_{n_m}(J_m) \cap J_m) \subset f^{n_m}(U) \cap J_m \cap \phi_{n_m}(J_m) \subset f^{n_m}(V) \cap J_m.$$

Portanto, $d(f^{n_m}(V), V) \leq d(f^{n_m}(V), x) \leq \ell(J_m) \to 0$, uma contradição com (4.6).

Isto encerra a demonstração do lema 4.2.

4.3. **Prova do lema 4.3.** Começamos com um lema sobre certos intervalos adaptados:

Lemma 4.5. *Se $x \in \bigcap_{n\geq 0} f^n(\Lambda)$ é um ponto não-periódico, então existe $J_0 \ni x$ intervalo adaptado tal que, para todo $r > 0$, tem-se um intervalo adaptado $x \in J \subset J_0$ arbitrariamente pequeno com $\ell(\phi_n(J)) \leq r$ para quaisquer $n \geq 0$ e $(J_0, \{\phi_n\}) \in \mathcal{C}(J_0)$ com $\phi_n(J) \cap J \neq \emptyset$.*

Proof. O lema 4.2 garante a existência de intervalos adaptados J_0 arbitrariamente pequenos $J_0 \ni x$. Se o ω-limite $\omega(x)$ de x consiste somente de uma órbita periódica γ, tomamos J_0 com $\overline{J_0} \cap \gamma = \emptyset$. Isto sempre é possível porque x é não-periódico de modo que $x \notin \gamma$. Se $\omega(x)$ não se reduz a uma órbita periódica, tomamos $x \in J_0$ intervalo adaptado qualquer. Com esta escolha de J_0, suponha que J_0 não satisfaz a conclusão do lema. Então, existem $r > 0$, uma sequência de sequências coerentes $(J_0, \{\phi_n^{(i)}\})$, $i = 1, 2, \ldots$, uma sequência $n_1 < n_2 < \ldots$ de inteiros e uma sequência $J_1 \supset J_2 \supset \ldots \{x\}$ de intervalos com $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n = \{x\}$ com

$$\ell(\phi_{n_i}^{(i)}(J_0)) > r \quad \text{e} \quad \phi_{n_i}^{(i)}(J_i) \cap J_i \neq \emptyset. \tag{4.7}$$

Além disso, lembre que o fato de J_0 ser adaptado implica que para todo par de sequências coerentes $(J_0, \{\phi_n\})$ e $(J_0, \{\psi_n\})$ e todo par de inteiros $n \geq l \geq 1$ temos uma das seguintes relações

$$\phi_n(J_0) \cap \psi_l(J_0) = \emptyset, \quad \phi_n(J_0) \subset \psi_l(J_0) \quad \text{ou} \quad \phi_n(J_0) \supset \psi_l(J_0)$$

Usando isto, podemos refinar a escolha da sequência $(J_0, \{\phi_n^{(i)}\})$ de modo que

$$\phi_{n_i}^{(i)}(J_0) \subset \phi_{n_j}^{(j)}(J_0) \subset J_0 \tag{4.8}$$

para quaisquer $i \geq j \geq 1$. Combinando (4.8) e (4.7), segue que o conjunto

$$U := \operatorname{int} \bigcap_{i \geq 1} \phi_{n_i}^{(i)}(J_0)$$

é um intervalo aberto não-vazio contido em J_0 (com $\ell(U) \geq r$). Pode-se ver claramente que U é um d-intervalo. Como f não é topologicamente conjugada a uma rotação irracional, U deve ser eventualmente periódico pelo lema 4.4. Por outro lado,

$$\ell(\phi_{n_i}^{(i)}(J_0)) \to 0 \tag{4.9}$$

quando $i \to \infty$ pelo lema 4.1. Mais ainda, a definição de U e as propriedades (4.7) e (4.8) implicam

$$d(x, U) = \lim_{i \to \infty} d(x, \phi_{n_i}^{(i)}(J_0)) \leq \lim_{i \to \infty} d(x, \phi_{n_i}^{(i)}(J_0)) \leq \lim_{i \to \infty} (\ell(J_i) + \ell(\phi_{n_i}^{(i)}(J_i))).$$

Usando (4.9) e o fato de $\ell(J_i) \to 0$ na estimativa acima, segue que $x \in \overline{U}$. Entretanto, a definição de U garante que $f^{n_i}(U) \subset J_0$. Portanto, $\omega(x) \cap \overline{J_0} \neq \emptyset$. Porém os fatos de $x \in \overline{U}$ e U ser eventualmente periódico mostram que $\omega(x)$ é uma órbita periódica γ, de modo que $\gamma \cap \overline{J_0} \neq \emptyset$ é uma contradição com a escolha de J_0. Isto prova o lema. $\square$

O lema 4.3 afirma a existência de intervalos adaptados com retornos contrativos e boas propriedades de distorção. No próximo lema mostraremos que todo intervalo adaptado com retornos contrativos *sempre* possuem boas propriedades de distorção:

Lemma 4.6. *Seja J um intervalo adaptado tal que existe $0 < \lambda < 1$ com $|\psi'(x)| < \lambda$ para todo $x \in J$ e $\psi \in \mathcal{R}(J, \Lambda)$, ou $\mathcal{R}(J, \Lambda) = \emptyset$. Então, existe uma constante $C > 0$ com*

$$\frac{|\phi_n'(x)|}{|\phi_n'(y)|} \leq C \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n'(x)| \leq C$$

para quaisquer $x, y \in J$ e $(J, \{\phi_n\}) \in \mathcal{C}(J)$.

Proof. Afirmamos que existe uma constante $K > 0$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell(\phi_n(J)) \leq K$ para todo $(J, \{\phi_n\}) \in \mathcal{C}(J)$. Com efeito, tome $(J, \{\phi_n\}) \in \mathcal{C}(J)$. Se $\phi_n(J) \cap J = \emptyset$ (isto ocorre quando

$\mathcal{R}(J,\Lambda)=\emptyset$), temos $\phi_n(J)\cap\phi_m(J)=\emptyset$ para tood $1\le n\le m$, de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ell(\phi_n(J))\le \ell(N)=1.$$

Suponha agora que $\phi_{n_i}(J)\cap J\neq\emptyset$ para um conjunto infinito de valores de n, digamos $n_1<n_2<\dots$. A estratégia aqui será assim: dividiremos a soma acima em duas partes dependendo se a parcela correspondente está entre retornos ou ela é um retorno. Daí estimamos a soma entre retornos pela somabilidade e aproveitamos o fato dos retornos serem contrativos para estimar a soma dos retornos por uma série geométrica.[17] Podemos formalizar esta heurística do seguinte jeito: como J é adaptado, temos $\phi_{n_i}(J)\subset J$, donde $\phi_{n_i}\in\mathcal{R}(J,\Lambda)$. Além disso, usando que J é adaptado, podemos ver que existem $\psi_i\in\mathcal{R}(J,\Lambda)$ tais que $\psi_i|_{\phi_{n_i}(J)}=\phi_{n_{i+1}}\circ f^{n_{i-1}}$. Em seguida, definimos $\psi_1=\phi_{n_1}$, $m_1=n_1$ e $m_i=n_i-n_{i-1}$ para $i\geq 2$. Existem $\psi_n^{(i)}$ ramos inversos de f^{-n}/J para $1\le n\le m_i$ tais que $\phi_n^{(i)}=f\circ\phi_{n+1}^{(i)}$ e $\phi_{n_i}^{(i)}=\psi_i$. A definição de n_i implica que $\phi_n^{(i)}(J)\cap J=\emptyset$ para todo $1\le n<m_i$, de maneira que $\phi_n^{(i)}(J)\cap\phi_m^{(i)}(J)=\emptyset$ para todo $1\le n<m<m_i$. Portanto,

$$\sum_{n=0}^{m_i-1}\ell(\phi_n^{(i)}(J))\le\ell(N)=1.$$

Por outro lado, o lema de distorção 2.1 garante a existência de uma constante $L>0$ tal que

$$\frac{|(\phi_n^{(i)})'(x)|}{|(\phi_n^{(i)})'(y)|}\le e^L\sum_{n=0}^{m_i-1}\ell(\phi_n^{(i)}(J))\le e^L.$$

Isto implica

$$\sum_{n=0}^{m_i-1}\ell(\phi_n^{(i)}(A))\le e^L\frac{\ell(A)}{\ell(J)}.$$

Aplicando esta estimativa com $A=\phi_{n_{i-1}}(J)$ vemos que

$$\sum_{n=0}^{m_i-1}\ell(\phi_n^{(i)}(\phi_{n_{i-1}}(J)))\le e^L\ell(\phi_{n_{i-1}}(J))/\ell(J).$$

Porém $\phi_{n_{i-1}}$ é a composição dos $i-1$ retornos $\psi_1,\dots,\psi_{i-1}$, os quais estamos assumindo todos contrativos. Em particular, $|\phi'_{n_{i-1}}(x)|\le\lambda^{i-1}$ para todo $x\in J$, donde $\ell(\phi_{n_{i-1}}(J))\le\lambda^{i-1}\cdot\ell(J)$. Substituindo esta desigualdade na estimativa acima, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ell(\phi_n(J))\le\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{m_i-1}\ell(\phi_n^{(i)}(\phi_{n_{i-1}}(J))\le e^L\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i.$$

[17] Esta idéia importante irá reaparecer na terceira nota durante o argumento de Pujals-Sambarino.

Finalmente, uma modificação do argumento no caso de finitos retornos (i.e., $\phi_n(J) \cap J \neq \emptyset$ apenas para uma quantidade finita de valores de n) dá

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(\phi_n(J)) \leq \ell(N) + e^L \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i.$$

Uma vez que nossa afirmativa de somabilidade está provada, a demonstração acaba em vista do lema 2.1 de distorção. □

Agora vamos aplicar estas ferramentas para a prova do lema 4.3. Começaremos com o caso $\Lambda = N$. Nesta situação, $C(f) = \emptyset$ (i.e., f é uma imersão). Se f é injetiva, então f é um difeomorfismo. Como assumimos que f não é topologicamente conjugada a rotção irracional, f possui pontos periódicos. Porém, a hipótese de hiperbolicidade dos pontos periódicos em $\Lambda = N$ diz que f possui pontos não-periódicos também. Daí fica simples construir intervalos abertos $J \subset N$ com $f^{-n}(J) \cap J = \emptyset$ para todo $n \geq 1$. Isto significa que $\mathcal{R}(J, \Lambda) = \emptyset$ e o lema 4.6 implica que J verifica as conclusões do lema 4.3. Se f não é injetiva, $N = S^1$ e f é uma imersão com grau $d \neq \pm 1$. Neste caso, f é semi-conjugada a $g(z) = z^d$ por uma aplicação monótona $h : S^1 \to S^1$. Em particular, $h^{-1}(\{z\})$ é um ponto ou intervalo $[a, b]$ fechado (para todo $z \in S^1$). No último caso, o intervalo aberto (a, b) é dito um *plateau* de f. Denote por $J(f)$ o complementar da união dos plateaux de f. Se $J(f) \neq S^1$, i.e., f possui um plateau J, então $f^{-n}(J) \cap J = \emptyset$ para todo $n \geq 1$ e o argumento anterior se aplica para obtermos a conclusão do lema 4.3. Com isto, resta apenas o caso $J(f) = S^1$, i.e., f é topologicamente conjugado a $z \mapsto z^d$. Afirmamos que neste caso existe um intervalo adaptado J_0 tal que para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $\psi_0 \in \mathcal{R}(J_0, S^1)$ com $\ell(\phi_0(J_0)) < \varepsilon$ e $\ell(\phi(\psi_0(J_0))) < \varepsilon$ para quaisquer $n \geq 1$ e ϕ ramo inverso de f^{-n}/J_0. Com efeito, note que basta provar esta afirmativa para $f(z) = z^d$ (porque o caso geral segue por conjugação). Em seguida, tomamos J_0 como um intervalo aberto com extremos em pontos fixos de f^m para algum m mas J_0 não contém pontos fixos de f^m. Daí segue que, se $m|d| \geq 3$, então $\#\mathcal{R}(J_0, S^1) = \infty$ e $\psi_1(J_0) \cap \psi_2(J_0) = \emptyset$ quando ψ_1 e ψ_2 são retornos distintos. Em particular, existe $\psi_0 \in \mathcal{R}(J_0, S^1)$ com $\ell(\phi_0(J_0)) < \varepsilon$. Além disso, a propriedade $\ell(\phi(\psi_0(J_0))) < \varepsilon$ vale para qualquer ramo inverso ϕ de f^{-n}/J_0 porque tais ramos são contrativos. Isto prova a afirmação.

Neste ponto, para fechar a prova do lema 4.3 no caso $\Lambda = N$, nosso objetivo será combinar esta afirmação com a proposição (geral) abaixo:

Proposition 4.2. *Seja J_0 um intervalo adaptado tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\psi_0 \in \mathcal{R}(J_0, \Lambda)$ com $\ell(\psi_0(J_0)) < \varepsilon$. Então, existe $J \subset J_0$ intervalo adaptado satisfazendo*

$$\mathcal{R}(J, \Lambda) = \emptyset \quad \text{ou} \quad \exists\ 0 < \lambda < 1 \text{ com } |\psi'(x)| < \lambda \text{ para todo } x \in J \text{ e } \psi \in \mathcal{R}(J, \Lambda). \tag{4.10}$$

Proof. Fixemos $L > 0$ uma constante para a qual o lema 2.1 (de distorção) se aplique em S^1 (isto é possível porque f é imersão C^2) e $\varepsilon > 0$ uma constante satisfazendo

$$\varepsilon \cdot \frac{e^{2L}}{\ell(J_0)} < \frac{1}{2}.$$

Em seguida, consideramos o intervalo adaptado J_0 e o retorno $\psi_0 \in \mathcal{R}(J_0, S^1)$ nas hipóteses da proposição. Defina $J := \psi_0(J_0)$. Afirmamos que $|\psi'(x)| < 1/2$ para todo $\psi \in \mathcal{R}(J, S^1)$ e

$x \in J$. Para isto, iremos provar primeiro que

$$|\psi'(x)| \leq e^L \frac{\ell(\psi(J_0))}{\ell(J_0)}$$

para todo $\psi \in \mathcal{R}(J_0, S^1)$. Com este intuito, tome $(J_0, \{\phi_n\})$ uma sequência coerente e $k \geq 1$ verificando $\psi = \phi_k$ e $\phi_n(J_0) \cap J_0 = \emptyset$ para todo $1 \leq n < k$. Daí segue que $\phi_n(J_0) \cap \phi_m(J_0) = \emptyset$ para todo $1 \leq n < m \leq k$, de modo que

$$\sum_{n=1}^{k} \ell(\phi_n(J_0)) \leq \ell(N) = 1.$$

Usando isto no lema 2.1 (de distorção), vemos que $|\psi'(x)| = |\phi_k'(x)| \leq e^L \frac{\ell(\psi(J_0))}{\ell(J_0)}$, como queríamos. Agora iremos nos aproveitar desta estimativa para mostrar a desigualdade $|\psi'(x)| < 1/2$ (para todo $\psi \in \mathcal{R}(J, S^1)$) afirmada. Tomamos $(J_0, \{\phi_n\})$ sequência coerente e $k \geq 1$ com $\psi = \phi_k/J$ e $\phi_n(J) \cap J = \emptyset$ para todo $1 \leq n < k$. Temos dois casos:

- $\phi_n(J_0) \cap J_0$ para qualquer $1 \leq n < k$: nesta situação, $\phi_k \in \mathcal{R}(J_0, S^1)$ e podemos usar diretamente a estimativa anterior e as escolhas de J_0, $\varepsilon > 0$ para obter que
$$|\psi'(x)| = |\phi_k'(x)| \leq e^L \frac{\varepsilon}{\ell(J_0)} < 1/2.$$
- existe $1 \leq n_0 < k$ tal que $\phi_{n_0}(J_0) \cap J_0 \neq \emptyset$: neste contexto, podemos assumir que n_0 é o maior inteiro com esta propriedade. Defina $\psi_n := \phi_{n+n_0} \circ f^{n_0}/\phi_{n_0}(J_0)$. A maximalidade de n_0 garante que $(\phi_{n_0}(J_0), \{\psi_n\})$ é uma sequência coerente, a qual pode ser estendida para uma sequência coerente $(J_0, \{\psi_n\})$ tal que[18] $\psi_n(J_0) \cap J_0 = \emptyset$ para todo $1 \leq n < k - n_0$. Esta propriedade de disjunção implica que $\psi_{k-n_0} \in \mathcal{R}(J_0, S^1)$. Usando a estimativa para retornos de J_0, sabemos que $|\psi_{k-n_0}'(x)| \leq e^L \cdot \frac{\ell(\psi_{k-n_0}(J_0))}{\ell(J_0)}$ para todo $x \in J_0$. Porém $\psi_{k-n_0}(J_0) \subset J$ (por definição), de modo que
$$|\psi_{k-n_0}'(x)| \leq e^L \ell(J)/\ell(J_0).$$
Por outro lado, a propriedade de disjunção $\phi_n(J) \cap \phi_m(J) = \emptyset$ para $1 \leq n < m < n_0$ implica numa estimativa de somabilidade, a qual inserida no lema 2.1 (de distorção) fornece
$$|\phi_{n_0}'(x)| \leq e^L \cdot \frac{\ell(\phi_{n_0}(J))}{\ell(J)}.$$
Como $\psi = \psi_{k-n_0} \circ \phi_{n_0}$, pela regra da cadeia, as estimativas acima implicam
$$|\psi'(x)| = |\psi_{k-n_0}'(\phi_{n_0}(x))| \cdot |\phi_{n_0}'(x)| \leq e^{2L}\varepsilon/\ell(J_0) < 1/2.$$

□

Conforme comentamos um pouco antes de enunciar a proposição, a afirmação feita acima e este resultado encerram a demonstração do lema 4.3 no caso "simples" $\Lambda = N$. Com isto, dedicaremos o resto destas notas ao estudo do caso mais interessante (do ponto de vista de aplicações) $\Lambda \neq N$. Primeiramente observe que podemos supor que $f(\Lambda) = \Lambda$. Com

[18] Pois $\psi_n(J_0) \cap J_0 \neq \emptyset$ implica $\psi_n(J_0) \subset J_0$ já que J_0 é adaptado, de modo que $\phi_{n+n_0}(J_0) \cap J_0 = \psi_n(\phi_{n+n_0}(J_0)) \cap J_0 \neq \emptyset$, contrariando a maximalidade de n_0.

efeito, basta trocar Λ por $\bigcap\limits_{n\geq 0} f^n(\Lambda)$ e usar que intervalos adaptados J para $\bigcap\limits_{n\geq 0} f^n(\Lambda)$ com as propriedades do lema 4.3 também servem para Λ. Neste ponto, iremos tomar proveito do lema 4.5 para eliminar um caso "fácil":

Proposition 4.3. *Suponha que existe um intervalo aberto $U \subset N - \Lambda$ com algum extremo $x \in \Lambda$ não-periódico. Então, existe J intervalo adaptado satisfazendo* (4.10) *(e as conclusões do lema 4.3 em particular).*

Proof. Escreva $U = (x, b)$. Nas hipóteses desta proposição podemos usar o lema 4.5 para obter um intervalo adaptado $x \in J_0 = (b^-, b^+,)$ tal que $b \notin \overline{J_0}$. Como J_0 é adaptado, existe $\delta > 0$ tal que para todo $(J_0, \{\phi_n\}) \in \mathcal{C}(J_0)$ vale $d(\phi_n(J_0), C(f)) > \delta$. Isto permite escolher uma constante $L = L(\delta, f)$ tal que o lema 2.1 de distorção pode ser aplicado. Fixemos $r > 0$ uma constante pequena tal que $e^{2L} \cdot r/(b^+ - x) < 1/2$. Pelo lema 4.5 existe um intervalo adaptado $x \in J = (a^-, a^+) \subset J_0$ com a seguinte propriedade: se $(J_0, \{\phi_n\}) \in \mathcal{C}(J_0)$ e $\phi_n(J) \cap J \neq \emptyset$ para algum $n \geq 0$, então $\ell(J) \leq r$. Defina $J_1 = (x, b^+)$.

Considere[19] $\psi \in \mathcal{R}(J, \Lambda)$. Por definição, existe $x_0 \in J \cap \Lambda$ com $\psi(x_0) \in \Lambda$. Fixemos $k \geq 1$ com $f^k(\psi(x_0)) = x_0$ e $\theta \in \mathcal{O}^-(\Lambda, x_0)$ com $\theta(k) = \psi(x_0)$. Tomemos $(J_0, \{\phi_n\}) \in \mathcal{C}(J_0)$ com $\theta(n) = \phi_n(x_0)$, de modo que $\phi_k = \psi$ e $\phi_n(J) \cap J = \emptyset$ para todo $1 \leq n < k$. Afirmo que para todo $n \geq 1$, $\phi_n(J) \cap J = \emptyset$ implica $\phi_n(J_1) \cap J_1 = \emptyset$. Caso contrário $\phi_n(J) \cap J = \emptyset$ mas $\phi_n(J_1) \cap J_1 \neq \emptyset$ para algum $n \geq 1$. Isto implica que $\phi_n(J_0) \cap J_0 \neq \emptyset$. Como J_0 é adaptado, isto daria $\phi_n(J_0) \subset J_0$. Em particular, $\phi_n(J) \subset J_0$. Sendo $\phi_n(J) \cap J = \emptyset$, teríamos $\phi_n(J) \subset (b^-, a^-)$ ou $\phi_n(J) \subset (a^+, b^+)$. Porém, a inclusão $\phi_n(J) \subset (a^+, b^+)$ é impossível porque $\phi_n(x_0) \in \Lambda$ e $\phi_n(J) \ni \phi_n(x_0)$, mas (a^+, b^+) não possui pontos de Λ. Logo, a única possibilidade seria $\phi_n(J) \subset (b^-, a^-)$. Por outro lado, $\phi_n(J_1)$ possui o extremo $\phi_n(x)$ em $\overline{\phi_n(J)}$. Portanto, $\phi_n(J_1)$ possuiria um extremo em $[b^-, a^-]$. Mais ainda, $\phi_n(J_1) \subset \phi_n(J_0) \subset J_0$, de modo que $\phi_n(J_1)$ é um intervalo em (b^-, b^+). Resumindo, $\phi_n(J_1)$ seria um subintervalo de (b^-, b^+) com um extremo em $[b^-, a^-]$ cuja interseção com $J_1 = (x, b^+)$ é não-vazia. Isto significaria que $\phi_n(J_1) \supset (x, a^+)$, donde $x_0 \in \phi_n(J_1)$. Em particular, $f^n(x_0) \in J_1$, de maneira que $J_1 \cap \Lambda \neq \emptyset$. Isto é uma contradição porque $J_1 \subset (x, b)$ e $(x, b) \subset N - \Lambda$. Com isso a afirmação fica provada.

Usando esta afirmação, sabemos que $\phi_n(J_1) \cap J_1 = \emptyset$ para todo $1 \leq n < k$, donde $\phi_n(J_1) \cap \phi_m(J_1) = \emptyset$ para todo $0 \leq n < m < k$. Em particular, $\sum\limits_{n=0}^{k-1} \ell(\phi_n(J_1)) \leq \ell(N) = 1$. Aplicando o lema 2.1 de distorção, segue que, para todo $y \in \overline{J}$,

$$|\phi_k'(y)| \leq \frac{\ell(\phi_k(J_1))}{\ell(J_1)} e^L \sum_{n=0}^{k-1} \ell(\phi_n(J_1)) \leq e^L \cdot \frac{\ell(\phi_k(J_0))}{b^+ - x} \leq e^L \cdot \frac{r}{b^+ - x}.$$

Similarmente, como $\phi_n(J) \cap J = \emptyset$ para todo $1 \leq n < k$ (pela escolha de ϕ_n), temos $\phi_n(J) \cap \phi_m(J) = \emptyset$ para todo $0 \leq n < m < k$, de modo que o lema de distorção garante a

[19]Estamos assumindo aqui que $\mathcal{R}(J, \Lambda) \neq \emptyset$ porque se $\mathcal{R}(J, \Lambda) = \emptyset$, J satisfaz (4.10) e não temos o que provar.

estimativa

$$\frac{|\phi_k'(y)|}{|\phi_k'(z)|} \leq e^L \sum_{n=0}^{k-1} \ell(\phi_n(J)) \leq e^L$$

para quaisquer $y, z \in \overline{J}$. Como $a^+ \in J_1 \cap J$, uma combinação das duas estimativas anteriores implica que para todo $z \in \overline{J}$ vale

$$|\psi'(z)| := |\phi_k'(z)| = |\phi_k'(a^+)| \cdot \frac{|\phi_k'(z)|}{|\phi_k'(a)|} \leq e^{2L} \cdot \frac{r}{b^+ - x} < \frac{1}{2}.$$

Isto finaliza a prova da proposição. □

Uma vez que o caso "fácil" de $U = N - \Lambda$ possuir um ponto não-periódico em sua fronteira já foi tratado com o auxílio do lema 4.5, iremos iniciar uma pequena "ginástica" para lidar com o caso de *todos* os pontos de ∂U serem periódicos[20]. Iniciamos nossa yoga com uma observação simples:

Proposition 4.4. *Se J_0 é um intervalo adaptado com $\#\mathcal{R}(J_0, \Lambda) = \infty$ então J_0 satisfaz* (4.10) *(e as conclusões do lema 4.3).*

Proof. Com efeito, como retornos distintos $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{R}(J_0, \Lambda)$ satisfazem $\psi_1(J_0) \cap \psi_2(J_0) = \emptyset$ e $\psi_1(J_0), \psi_2(J_0) \subset J_0$, vemos que $\sum\limits_{\psi \in \mathcal{R}(J_0,\Lambda)} \ell(\psi(J_0)) \leq \ell(J_0) \leq 1$, de maneira que $\#\mathcal{R}(J_0, \Lambda) = \infty$ implicaria que para todo $\varepsilon > 0$ existiria $\psi_0 \in \mathcal{R}(J_0, \Lambda)$ com $\ell(\psi_0(J_0)) < \varepsilon$. Portanto, pela proposição 4.2, J_0 satisfaz (4.10), como queríamos. □

Em seguida, dados $J \subset N$ e $x \in J$, definimos $N(x, J)$ como o menor inteiro $n > 0$ tal que $f^n(x) \in J$ (com a convenção $N(x, J) = \infty$ quando $f^n(x) \notin J$ para todo $n \in \mathbb{N}$).

Proposition 4.5. *Se J_0 é um intervalo adaptado com* $\sup\{N(x, J_0) : x \in \Lambda \cap J_0\} = \infty$, *então existe J intervalo adaptado satisfazendo* (4.10).

Proof. Suponha que $A := \{x \in J_0 \cap \Lambda : N(x, J_0) = \infty\} = \emptyset$. Isto implica que existe uma sequência $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset J_0$ com $n_i := N(x_i, J_0) < \infty$ e $n_i \to \infty$ quando $i \to \infty$. Obviamente podemos assumir que $n_i \neq n_j$ sempre que $i \neq j$, de modo que os retornos $\psi_i \in \mathcal{R}(J_0, \Lambda)$ com $f^{n_i}(\psi_i(x_i)) = x_i$ são distintos entre si. Em particular, $\#\mathcal{R}(J_0, \Lambda) = \infty$ de maneira que a proposição 4.4 finaliza a prova. No outro caso, $A \neq \emptyset$, digamos $x \in A$. Temos duas possibilidades: $\mathrm{int}(A) = \emptyset$ ou $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$. Na primeira hipótese, x é acumulado por uma sequência de pontos $\{x_i\} \subset J_0 \cap \Lambda$ com $N(x_i, J_0) < \infty$ e $N(x_i, J_0) \to \infty$, o que nos conduz ao caso já tratado antes. Na segunda hipótese, temos um intervalo $J \subset J_0$ com $N(y, J) = \infty$ para todo $y \in J \cap \Lambda$. Isto significa que J é adaptado e $\mathcal{R}(J, \Lambda) = \emptyset$ de maneira que J satisfaz (4.10). Isto termina a demonstração. □

Agora usaremos esta proposição para tratar o caso Λ "não-minimal":

[20] De fato, este caso não foi tratado inicialmente no artigo [M], mas Mañé publicou uma *errata* [M+] para este artigo onde este caso é incluído. Com efeito este caso é importante porque muitos repulsores Λ possuem a "fronteira dinâmica" $\partial(N - \Lambda)$ constituída *apenas* de pontos periódicos, p.ex., quando Λ é localmente maximal isto sempre ocorre de acordo com os argumentos de Newhouse e Palis devidamente restritos ao caso unidimensional (veja o theorem ?? do livro [PT]).

Proposition 4.6. *Se $x \notin \omega(x)$ para algum $x \in \Lambda$, então algum intervalo adaptado J satisfaz* (4.10).

Proof. Fixemos $x \in \Lambda$ com $x \notin \omega(x)$. Como x não é periódico, podemos usar a proposição 4.1 para obter um intervalo adaptado $J_0 \ni x$ com comprimento $\ell(J_0)$ suficientemete pequeno tal que $f^n(x) \notin J_0$ para todo $n \geq 1$. Isto significaria que $N(x, J_0) = \infty$, de modo que a proposição 4.5 acabaria a prova. $\square$

Corollary 4.1. *Seja $\{x_i\} \subset \Lambda$ uma sequência de pontos periódicos com períodos $n_i \to \infty$ tal que $x_i \to x$ com x ponto periódico. Então, algum intervalo adaptado J verifica* (4.10).

Proof. Denote por γ a órbita de x. A existência da sequência $\{x_i\}$ com as propriedades acima garante que existe um ponto $y \notin \gamma$ com $f(y) \in \gamma$ o qual é acumulado pelas órbitas de x_i. Isto implica que $y \in \Lambda$, $\omega(y) = \gamma$ e $y \notin \gamma$. Ou seja, acabamos de construir um ponto $y \in \Lambda$ com $y \notin \omega(y)$. Pela proposição 4.6, acabamos a prova. $\square$

Defina Λ_0 como o fecho do conjunto de pontos não-periódicos de Λ.

Proposition 4.7. *Se $\Lambda - \Lambda_0$ contém uma fonte x (i.e., ponto periódico repulsor), então algum intervalo adaptado satisfaz* (4.10).

Proof. Suponhamos x é um ponto isolado de Λ, ou seja, $x \notin \overline{\Lambda - \{x\}}$. Neste caso podemos tomar $U \ni x$ intervalo aberto tal que f^n leva U difeomorficamente em $f^n(U)$, $\{x\} = f^n(U) \cap \Lambda$ e $f^n(U) \supset U$, onde n é o periódo de x. Neste caso $J = f^n(U)$ é um intervalo adaptado e $\mathcal{R}(J, \Lambda)$ possui apenas um elemento, a saber, a aplicação $\psi : U \to U$ com $f^n(\psi(y)) = y$ para todo $y \in U$ e $\psi(x) = x$. Como x é um repulsor, J satisfaz (4.10). Na outra hipótese, x é acumulado por pontos de $\Lambda - \{x\}$. Sendo $x \notin \Lambda_0$, vemos que x deve ser acumulado por pontos periódicos x_i de Λ. Além disso, o fato de x ser uma fonte implica que os períodos n_i de x_i tendem para infinito quando i cresce. Pelo corolário 4.1, terminamos a demonstração. $\square$

Encerrando a série de observações simples, provemos o seguinte fato:

Proposition 4.8. *Suponha que $\Lambda_0 := \overline{\{x \in \Lambda : x \text{ não é periódico}\}}$ contém algum ponto periódico $x \in \Lambda_0$. Então, algum intervalo adaptado verifica* (4.10).

Proof. Seja γ a órbita de x. Se existir $y \in \Lambda$ com $f(y) \in \gamma$ mas $y \notin \gamma$, teríamos $y \notin \omega(y)$ e a prova estaria acabada pela proposição 4.6. Por isso, podemos assumir que y com estas propriedades não existe. Note que existem vizinhanças arbitrariamente pequenas U de γ e aplicações contínuas $\phi : U \to N$ com $\phi|\gamma = (f|\gamma)^{-1}$ e $f \circ \phi(x) = x$. A ausência de pontos $y \in \Lambda - \gamma$ com $f(y) \in \gamma$ implica que U pode ser tomada pequena tal que $f^{-1}(p) \cap \Lambda = \phi(p)$ para todo $p \in U \cap \Lambda$. Tomemos $z \in \Lambda$ não periódico muito perto de x (isso sempre é possível porque $x \in \lambda_0$) de maneira que o intervalo (x, z) é levado difeomorficamente em $(f^m(x), f^m(z))$ por f^m, $(f^j(x), f^j(z)) \subset U$ para todo $0 \leq j \leq m$ e $f^m(x) = x$ para algum $m > 0$. Quando $f^m(z) < z$, temos que $\omega(z)$ é uma órbita periódica em U. Como z não é periódico, seguiria que $z \notin \omega(z)$ e pela proposição 4.6 acabamos. Finalmente, afirmamos que o caso $f^m(z) > z$ não ocorre, o que encerraria a discussão. Caso contrário, z seria recorrente, de modo que poderíamos escolher $N > m$ com $f^N(z) \in (x, f^m(z))$. Defina $V = \bigcup_{j=0}^{m} (f^j(x), f^j(z)) \subset U$. Usando que $f^m(z) > z$, vemos que $\phi(V) \subset V$. Por outro lado, $f^N(z) \in \Lambda \cap V$. Juntando isso com a escolha de U com $f^{-1}(p) \cap \Lambda = \phi(p)$ para todo $p \in U \cap \Lambda$, segue que $f^{N-1}(z) = \phi(f^N(z)) \in \phi(V)$. Repetindo o argumento, obteríamos $f^j(z) \in V$ para todo $0 \leq j \leq N$. Como N pode ser feito arbitrariamente grande (porque z é recorrente), isto implicaria que toda a órbita de z estaria em V, uma contradição com o fato de $f^m(z) > z$ dizer que $f^{m+1}(z) > f(z)$, ou seja, $f^{m+1}(z) \notin (f(x), f(z))$ (e consequentemente $f^{m+1}(z) \notin V$). Logo, z não é recorrente em nenhum caso e isto completa o argumento. □

Neste ponto, estamos aptos para terminar a prova do lema 4.3. Tomemos $U \subset N - \Lambda_0$ um intervalo com algum extremo $x_0 \in \Lambda_0$. Se x_0 é periódico, a proposição 4.8 diz que não temos o que provar. Quando x_0 não é periódico, aplicamos a proposição 4.3 para Λ_0 e obtemos um intervalo adaptado J tal que $\mathcal{R}(J, \Lambda_0) = \emptyset$ ou existe $0 < \lambda < 1$ com $|\psi'(x)| < \lambda$ para todo $x \in J$ e $\psi \in \mathcal{R}(J, \Lambda_0)$. Como os pontos não-periódicos são densos em Λ_0, podemos escolher $z_0 \in J \cap \Lambda_0$ ponto não-periódico. Suponha inicialmente que $z_0 \notin \overline{\Lambda - \Lambda_0}$. Pelo lema 4.5, podemos tomar $z_0 \in J_0 \subset J$ intervalo adaptado de comprimento pequeno de maneira que $J_0 \cap (\Lambda - \Lambda_0) = \emptyset$. Isto significa que $J_0 \cap \Lambda_0 = J_0 \cap \Lambda$. Em particular, $\mathcal{R}(J_0, \Lambda_0) = \mathcal{R}(J_0, \Lambda)$. Isto implica que os retornos $\psi \in \mathcal{R}(J_0, \Lambda)$ são composições de uma quantidade finita de elementos de $\mathcal{R}(J, \Lambda)$. Como os elementos de $\mathcal{R}(J, \Lambda)$ verificam $|\psi'(x)| < \lambda$ para todo $x \in J$, isto mostra que J_0 satisfaz (4.10) (o que prova o lema neste caso). Com isto, basta considerar o caso $z_0 \in \overline{\Lambda - \Lambda_0}$. Neste contexto, tomemos uma sequência $\{x_i\} \subset \Lambda - \Lambda_0$ convergindo para z_0. Por definição de Λ_0, os pontos x_i são periódicos. Denotemos por γ_i suas órbitas e n_i seus períodos. Afirmamos que basta considerar o caso em que para todo $\varepsilon > 0$ existe i_0 inteiro tal que $i \geq i_0$ implica $\gamma_i \in B(\Lambda_0, \varepsilon) := \{z : d(z, \Lambda_0) < \varepsilon\}$. Com efeito, começamos por notar que $n_i \to \infty$ porque x_i acumula no ponto não-periódico z_0. No caso não coberto pela afirmação, sabemos que existe uma sequência $y_i \in \gamma_i$ tal que $y_i \to y \notin \Lambda_0$. Como $y \notin \Lambda_0$, y é periódico e y é o limite de uma sequência de pontos periódicos com períodos tendendo a infinito. Pelo corolário 4.1, o lema 4.3 vale, o que prova nossa afirmação. Em seguida usamos o lema 4.5 para obter um intervalo adaptado $z_0 \in J_1$ com $\overline{J_1} \subset J$ e definimos $\delta = d(J_1, N - J)$. Observe que pela proposição 4.5 podemos assumir que $N_0 = \sup\{N(x, J_0) : x \in J_0 \cap \Lambda\} < \infty$. Fixamos $0 < \varepsilon < \delta/2$ tal que para todo $a \in \Lambda_0$ e $y \in N$ com $d(y, a) < \varepsilon$ valem $d(f^j(a), f^j(y)) < \delta/2$ e os intervalos $(f^j(a), f^j(y))$ não possuem pontos críticos para todo $0 \leq j \leq N_0$. Agora para essa escolha de $\varepsilon > 0$ tomemos i_0 inteiro tal que $\gamma_i \in B_\varepsilon(\Lambda_0)$ para todo $i \geq i_0$ (isto sendo possível pela nossa afirmação anterior). Desejamos mostrar que para todo $x \in \gamma_i \cap J_1$ com $i \geq i_0$ vale a seguinte propriedade: existe $n \geq 1$ com $f^n(x) \in J_1$ e $|(f^n)'(x)| > \lambda^{-1}$. Isto implica que x_i é uma fonte (para $i \geq i_0$) e como $x_i \notin \Lambda_0$, a proposição 4.7 diz que o lema está provado. Para mostrar a afirmativa desejada acima, tomamos $x \in \gamma_i \cap J_1$. Por definição existe $1 \leq n \leq N_0$ com $f^n(x) \in J_1$. Como $\gamma_i \in B_\varepsilon(\Lambda_0)$ e $0 < \varepsilon < \delta/2$, deve existir $a \in \Lambda_0$ com $d(a, x) < \delta/2$. Logo, $a \in J \cap \Lambda_0$ e $d(f^n(a), f^n(x)) < \delta/2$. Como $f^(x) \in J_1$, segue $f^n(a) \in J \cap \Lambda_0$. Portanto, existe uma aplicação ψ a qual é uma composição de elementos de $\mathcal{R}(J, \Lambda_0)$ com $\psi(f^n(a)) = a$. Como os intervalos $(f^j(a), f^j(x))$ não possuem pontos críticos para todo $0 \leq j \leq n \leq N_0$, fica fácil de verificar que $\psi(f^n(x)) = x$. Em particular, obtemos $|(f^n)'(x)| = |\psi'(f^n(x))|^{-1} > \lambda^{-1}$. Isto termina a prova do lema 4.3 (ufa!).

Uma vez que o leitor me acompanhou até aqui, eu peço para que ele descanse um pouco e, após relaxar por um tempo, tente reler este argumento de um ponto de vista mais global porque isto fará uma diferença *crucial* na leitura da terceira nota sobre o trabalho de Pujals e Sambarino. Para ajudar o leitor na sua altamente recomendada releitura do argumento acima, deixarei algumas palavras-chaves que poderão ser úteis na seleção dos trechos centrais: *sequências coerentes de ramos inversos*, *intervalos adaptados*, *retornos de intervalos adaptados*, *lemas 4.2 e 4.3 sobre a existência de intervalos adaptados com retornos contrativos* e *intervalos adaptados com retornos contrativos implicam o teorema 1.1 de hiperbolicidade de Mañé.*

Bem, como a terceira nota só deverá sair após as festas de Natal e Ano Novo de 2007, para você que foi paciente e acompanhou-me até aqui, um feliz Natal e próspero Ano Novo! :)

References

[KH] A. Katok and B. Hasselblat, Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems, *Encyclopedia of Math. and its applications*, vol. 54, Cambridge Univ. Press, 1995.

[M] R. Mañé, Hyperbolicity, sinks and measure in one dimensional dynamics, *Comm. in Math. Phys.*, vol. 100, 1985, p. 495–524.

[M+] R. Mañé, Erratum: Hyperbolicity, sinks and measure in one dimensional dynamics, *Comm. in Math. Phys.*, vol. 112, 1987, p. 721–724.

[MS] C. Matheus, A prova de Pujals e Sambarino da conjectura de Palis em superfícies I: o teorema de Denjoy e o argumento de Schwarz, 2007 (disponível na homepage www.impa.br/∼cmateus).

[PS] E. Pujals and M. Sambarino, Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms, *Annals of Mathematics*, vol. 151, 2000, p. 961–1023.

[PT] J. Palis and F. Takens, Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations, *Cambridge Studies in Adv. Math.*, vol. 35, Cambridge Univ. Press 1993.