

Uma prova simples da invariância da medida de Birkhoff de certos bilhares

Arbieto-Matheus

16 de dezembro de 2003

1 Introdução

Em uma conversa com o prof. Marcelo Viana, ele nos mostrou um argumento *simples* para provar a invariância da medida de Birkhoff quando o bilhar é *poligonal*. Como não é comum encontrar uma prova deste fato bastante conhecido na maioria dos livros-textos (por exemplo, Mañé [M]), decidimos escrever esta nota contendo uma prova simples do teorema de Birkhoff em um caso particular, porém bem ilustrativo.

Lembre-se que, se U é um aberto limitado de \mathbb{R}^2 cujo bordo ∂U é a união finita de curvas suaves por partes, podemos definir um sistema dinâmico assim: considere uma partícula em U em movimento retilíneo uniforme cujas colisões com ∂U são perfeitamente elásticas (i.e., os ângulos de incidência e reflexão são sempre os mesmos). O movimento da partícula pode ser estudado através da seguinte transformação $T : K \rightarrow K$ (aqui $K := S^1 \times \partial U$). Dado $(\theta, p) \in K$, olhamos para a partícula colidindo com ∂U no ponto p com ângulo θ . Esta informação nos permite determinar o próximo ponto de colisão q e o respectivo ângulo de incidência η . Definimos então $T(\theta, p) = (\eta, q)$. Veja a figura 1

Exercício 1. Prove que T é mensurável. Sugestão: Mostre que T^{-1} (ou equivalentemente T) envia retângulos em conjuntos mensuráveis de K , onde $A \subset K$ é um retângulo se $A = I \times J$, com I e J arcos de S^1 e ∂U , resp. Isto conclui o exercício pois os retângulos geram a σ -álgebra de Borel.

Seja dr a medida de Lebesgue em ∂U (i.e., se $I \subset \partial U$, $dr(I)$ é o comprimento de I) e $d\theta$ a medida de Lebesgue em S^1 .

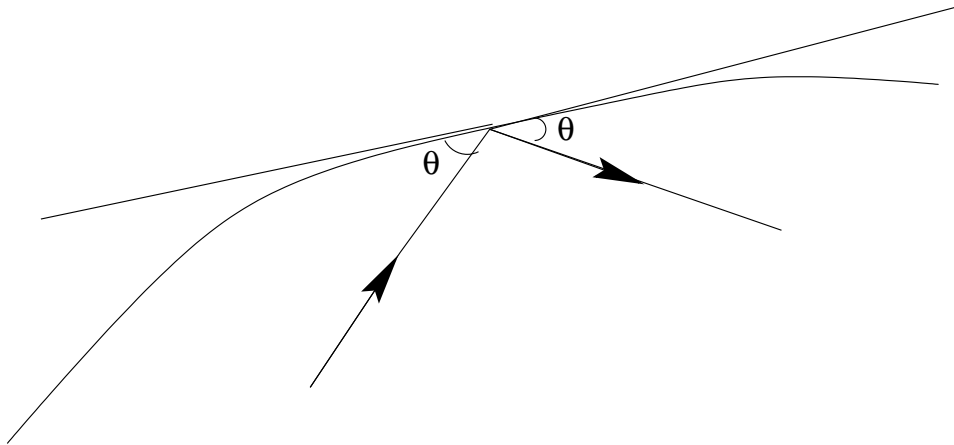


Figura 1: Definição da transformação associada ao bilhar

Definição 1.1. A medida de Birkhoff em K é:

$$\mu(A) := \int_A \text{sen} \theta \, dr \, d\theta.$$

Teorema 1.2 (Birkhoff). A medida de Birkhoff μ é T -invariante, i.e., $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \subset K$ mensurável.

2 Prova do teorema de Birkhoff

Nesta seção assumiremos que ∂U é linear por partes.

Sabemos que os ângulos de incidência e reflexão são sempre os mesmos. Em particular, se $A = \{\theta_0\} \times J_0 \subset K$, então, por paralelismo das trajetórias da partícula com dados iniciais em A , obtemos que $T(A) = \{\theta_1\} \times J_1$. Veja a figura 2, onde nesta figura dr_i denota o comprimento dos arcos J_i , $i = 0, 1$.

Mais ainda, por paralelismo, as quantidades l_0, l_1 da figura 2 são *iguais*,

$$l_0 = l_1. \tag{1}$$

Mas, por definição (veja a figura2),

$$l_i = \text{sen} \theta_i dr_i \text{ para } i = 0, 1. \tag{2}$$

Portanto, acabamos de provar a seguinte afirmação:

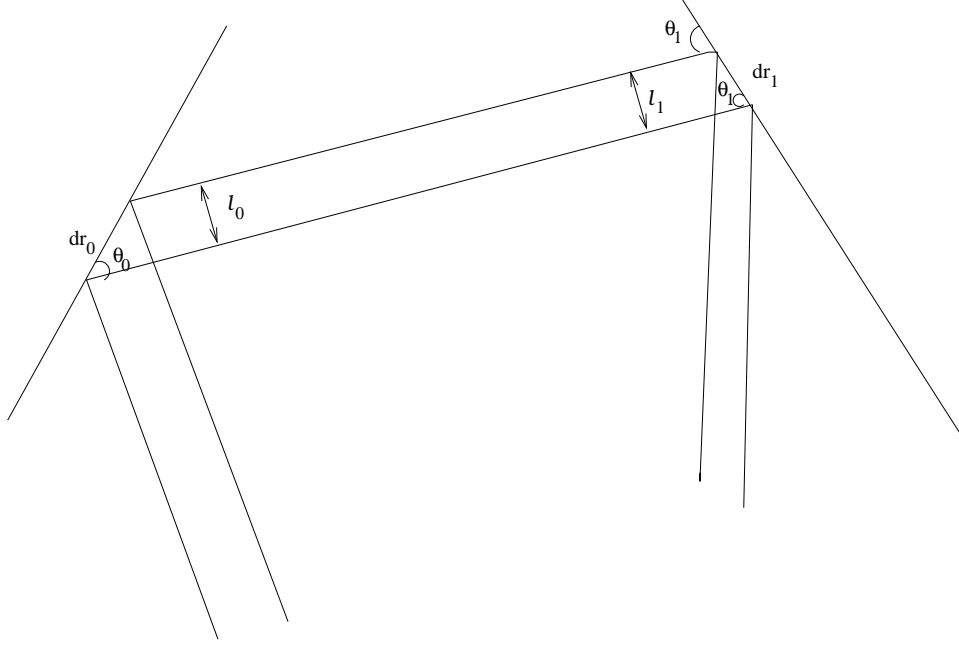


Figura 2: O caso de ângulo constante θ_0

Afirmção 2.1. *Se $A \subset K$ satisfaz $A = \{\theta_0\} \times J_0$, então $T(A) = \{\theta_1\} \times J_1$. Mais ainda, se dr_i são os comprimentos de J_i ($i = 0, 1$), então $\text{sen}\theta_0 dr_0 = \text{sen}\theta_1 dr_1$.*

Defina $\pi^1 : K = S^1 \times \partial U \rightarrow S^1$, $\pi^2 : K = S^1 \times \partial U \rightarrow \partial U$ as projeções canônicas. Agora, se $A = I_0 \times \{r_0\}$, onde $r_0 \in \partial U$ e I_0 é um arco de S^1 , então temos $\pi^1(T(A)) = I_1$ e $\pi^2(T(A)) = J_1$, com $I_1 \subset S^1$, $J_1 \subset \partial U$ sendo intervalos. Definindo $\partial I_i = \{x_i, y_i\}$, $\partial J_i = \{p_i, q_i\}$ se colocarmos $d\theta_i :=$ comprimento de (I_i) , por definição,

$$d\theta_0 = \text{ângulo entre as trajetórias de } (x_0, r_0) \text{ e } (y_0, r_0). \quad (3)$$

$$d\theta_1 = \text{ângulo entre as trajetórias de } (x_1, p_1) \text{ e } (y_1, q_1). \quad (4)$$

Veja a figura 3.

Tome a translação paralela da trajetória com dados (x_1, p_1) para o ponto $\pi^2(T(y_0, r_0)) := q_1$ de ∂U , como na figura 4 (na última página).

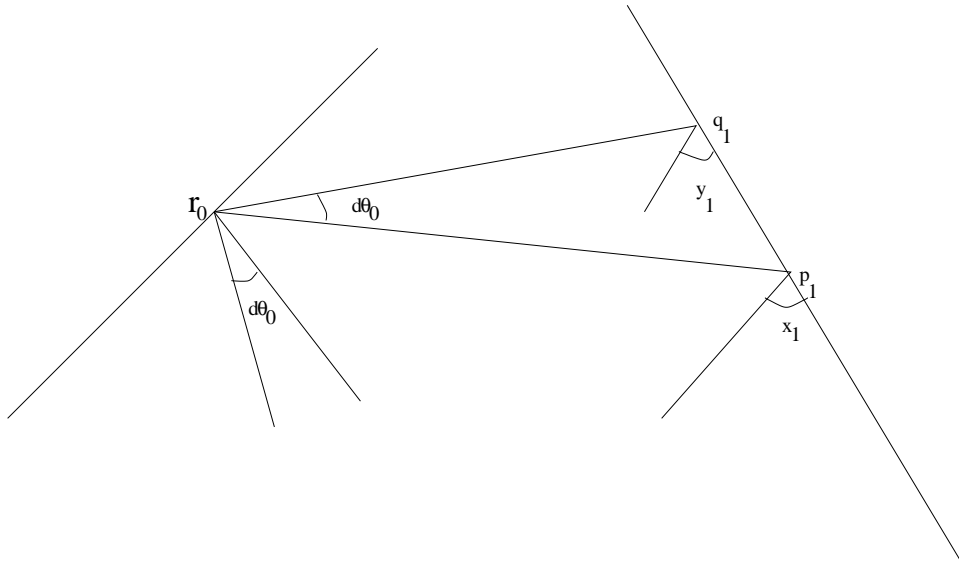


Figura 3: O caso de posição constante r_0

Da figura 4 concluímos (já que os ângulos de incidência e reflexão são iguais) que

$$\text{ângulo entre } (x_0, r_0) \text{ e } (y_0, r_0) = \text{ângulo entre } (x_1, p_1) \text{ e } (y_1, q_1). \quad (5)$$

As equações (3), (4) e (5) juntas provam a afirmação:

Afirmção 2.2. *Se $A \subset K$ satisfaz $A = I_0 \times \{r_0\}$, então $d\theta_0 = d\theta_1$, onde $d\theta_i$ é o comprimento dos arcos I_0 e $I_1 = \pi^1(T(A))$.*

Para finalizar a prova, deixamos para o leitor o seguinte exercício:

Exercício 2. Prove que o teorema de Birkhoff segue das afirmações 2.1, 2.2. Sugestão: Note que μ é uma medida produto e use o teorema de Fubini.

Fechando esta nota, propomos:

Exercício 3. Tente provar o teorema de Birkhoff no caso geral seguindo as idéias do caso linear por partes. Sugestão: Se você não conseguir fazer este exercício, veja a prova em [CM].

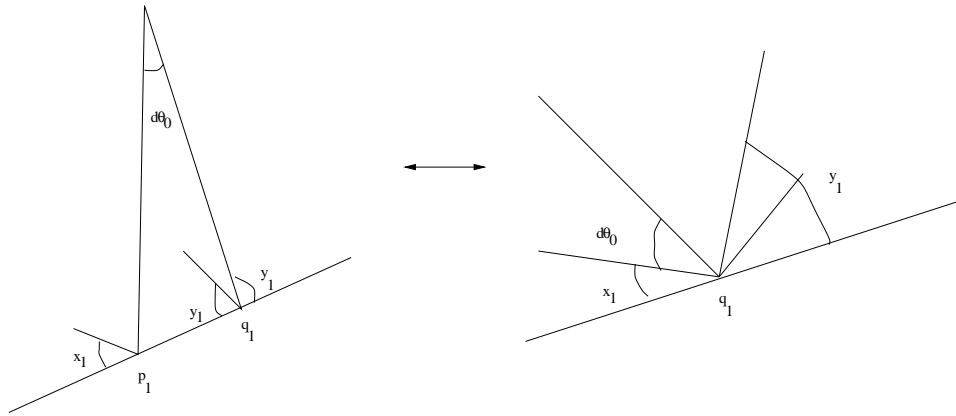


Figura 4: Transporte paralelo das trajetórias

Referências

- [CM] N. Chernov and R. Markarian, Introduction to the Ergodic Theory of Chaotic Billiards, *Instituto de Matemática y Ciencias Afines, Lima, Peru*, 2001. (veja também www.math.uab.edu/chernov/papers/pubs.html)
- [M] R. Mañé, Introdução à Teoria Ergódica, *Projeto Euclides*, IMPA, 1983.