

A evolução de curvas planas convexas

Prof. Alexander Arbieto

5 de junho de 2008

1 Introdução

O objetivo deste apêndice é apresentar o seguinte fenômeno: Seja C uma curva planar convexa então é possível deformar C através de uma equação diferencial de modo que no limite obteremos um ponto. Porém, a deformação ocorre de maneira que a curva torna-se assintoticamente circular. Ou seja, quando observamos com uma lupa como é a curva quando ela está prestes a se tornar um ponto, o que vemos é quase um pequeno círculo.

Mais precisamente seja $C_0 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva fechada convexa. Consideramos a seguinte equação diferencial:

$$\begin{cases} C_t(u, s) = k(u, s)N(u, s) \\ C(u, 0) = C_0 \end{cases}$$

Onde a solução $C : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma família a um parâmetro de curvas, C_t é a derivada de C na segunda variável, $k(u, s)$ e $N(u, s)$ são a curvatura da curva e o vetor normal de $C(\cdot, s)$ em u respectivamente. Iremos nos referir a esta equação (assim como suas soluções) como *o fluxo pela curvatura* ou mesmo *k-fluxo*.

Pretendemos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 1.1 (Gage-Hamilton). *O fluxo pela curvatura é bem posto, ou seja temos existência e unicidade da solução definida em um intervalo da forma $I = [0, T_{max}]$. Além disso, para todo $s \in I$ a curva $C(\cdot, s)$ é convexa, a razão entre o raio do círculo inscrito e o círculo circunscrito tende a 1 quando $s \rightarrow T_{max}$ assim como a razão entre a curvatura máxima e a curvatura mínima que também tende a 1.*

2 Existência Local do fluxo pela curvatura

Nesta seção veremos que quando a curva original C_0 é convexa, o problema da existência de soluções para o k -fluxo é equivalente a encontrar uma função $k : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ k é $C^{2+\alpha}$ na primeira variável,

$C^{1+\alpha}$ na segunda restrito ao domínio $S^1 \times [0, T - \varepsilon]^1$ e que satisfaça a seguinte equação diferencial:

$$k_t = k^2 k_{\theta\theta} + k^3. \quad (*)$$

Onde k_t denota a derivada parcial na segunda variável e $k_{\theta,\theta}$ denota a derivada parcial de segunda ordem na primeira variável. Além disso queremos que $k(\theta, 0) = \psi(\theta)$ seja uma função $C^{1+\alpha}$ positiva tal que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{(\cos \theta, \sin \theta)}{\psi(\theta)} = 0.$$

A vantagem é que a equação (*) é uma equação parabólica e por teoria geral de EDP's e sempre um problema localmente bem posto. E isto implicaria a primeira afirmação do teorema de Gage-Hamilton. O leitor que não se sentir à vontade com tais argumentos de EDP pode omitir o resto da seção e assumir a existência e unicidade local do fluxo pela curvatura.

Vamos supor então que exista solução do k -fluxo e iremos denotá-la por C . A convexidade da curva inicial permite parametrizá-la pelo ângulo que ela faz com uma direção fixa, que iremos supor que é a horizontal.

Note que se k é curvatura de uma curva fechada, simples e convexa α então $\frac{(\cos \theta, \sin \theta)}{k(\theta)} d\theta = \frac{T(\theta)}{k(\theta)} = \frac{d\phi}{ds} ds$. E portanto:

$$\int_0^{2\pi} \frac{(\cos \theta, \sin \theta)}{k(\theta)} d\theta = 0.$$

Por outro lado, se uma função $k > 0$, 2π -periódica satisfaz a equação acima então a curva $\alpha(\theta) = (a, b) + \int_0^\theta \frac{(\cos r, \sin r)}{k(r)} dr$ é fechada e simples² além disso, k é a função de curvatura de α e como $k > 0$ a curva é convexa.

Para mostrar que k satisfaz a equação (*) vamos precisar de certas equações derivadas do k -fluxo.

Teorema 2.1. *Denotando por θ o ângulo entre o vetor tangente a curva T e a horizontal, s o parâmetro de comprimento de arco temos*

1. $\theta_t = k_s$ e $\theta_s = k$.
2. $k_t = k_{ss} + k^3$.

Demonstração. Para provar (1), observe que $T = (\cos \theta, \sin \theta)$ e $N = (-\sin \theta, \cos \theta)$. Daí $T_t = \theta_t(-\sin(\theta), \cos(\theta)) = \theta_t N$. Da mesma forma $T_s = \theta_s N$.

Agora se v é a velocidade da curva então $\partial_s = \frac{1}{v} \partial u^3$ e portanto:

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_s &= \left(\partial_t \frac{1}{v} \right) \partial_u + \frac{1}{v} (\partial_t \partial_u) = \left(\frac{-v_t}{v^2} \right) \partial_u + \left(\frac{1}{v} \partial_u \right) \partial_t \\ &= k^2 \partial_s + \partial_s \partial_t. \end{aligned}$$

¹Aqui estamos usando espaços Hölder, para maiores detalhes ver o Glossário no final da monografia.

²Isto segue do fato do mapa de Gauss ser injetivo.

³Lembre que $u \in S^1$ é a primeira variável de C

Daí temos que:

$$T_t = (C_s)_t = (C_t)_s + k^2 C_s = (kN)_s + k^2 T = k_s N - k^2 T + k^2 T = k_s N.$$

E portanto $\theta_t = k_s$. Como pela equação de Frenet $T_s = kN$ temos que $\theta_s = k$.
Para provar (2) note que:

$$k_t = (\theta_s)_t = (\theta_t)_s + k^2 \theta_s = k_{ss} + k^3.$$

□

Daí pela regra da cadeia, denotando por τ o tempo quando a outra coordenada é θ , isto é $k(\theta, \tau)$ temos que:

$$k_t = k_\tau + k_\theta \theta_t = k_\tau + k_\theta k_s = k_\tau + k(k_\theta)^2$$

$$k_{ss} = \theta_s (\theta_s k_\theta)_\theta = k(k_\theta)^2 + k^2 k_{\theta\theta}.$$

E pelo teorema anterior, temos que k satisfaz a equação (*).

Vamos agora supor que k é solução de (*) satisfaz as hipóteses acima mencionadas, considere a família de curvas dadas por:

$$C(\theta, t) = (a, b)(t) + \int_0^\theta \frac{(\cos(r), \sin(r))}{k(r, t)} dr.$$

Se $(a_t, b_t)(t) = (k_\theta(0, t), -k(0, t))$ então integração por partes na definição de C mostra que $C_t = kN - k_\theta T$.

Vamos mudar as coordenadas, definindo $u(\theta, t)$ satisfazendo:

$$u_t = \frac{1}{v(u(\theta, t))} k_\theta(u(\theta, t))$$

e condição inicial $u(\theta, 0) = \theta$. Daí definindo $D(\theta, t) = C(u(\theta, t), t)$ temos:

$$D_t = C_u u_t + C_t = v u_t T + kN - k_\theta T = kN.$$

O que mostra a existência de uma solução pro k -fluxo.

De brinde obtemos que as curvas da família associada ao k -fluxo permanecem convexas. De fato, temos que $k_{min}(t) = \min_{\theta \in [0, 2\pi]} k(\theta, t)$ é uma função não-decrescente. Do contrário, seja $0 < \varepsilon < k_{min}(0)$ tal que para algum t_0 tem-se $k_{min}(t_0) = k_{min}(0) - \varepsilon$ e suponha que esse t_0 é o menor possível. Como k é contínua e $[0, 2\pi]$ é compacto, existe θ_0 tal que $k(\theta_0, t_0) = k_{min}(t_0)$. Assim temos que $k_t(\theta_0, t_0) \leq 0$, $k_{\theta\theta}(\theta_0, t_0) \geq 0$ e $k(\theta_0, t_0) > 0$. Mas isto é impossível devido a equação (*).

Outro bônus que a equação (*) nos dá é o seguinte:

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\int k^2 - (k_\theta)^2 \right) &= 2 \int (k k_t - k_\theta k_{\theta t}) d\theta = 2 \int (k_{\theta\theta} + k) k_t \\ &= 2 \int k^2 (k_{\theta\theta} + k)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Onde na segunda igualdade usamos integração por partes e na terceira a equação (*). Esta estimativa nos dá o seguinte:

Corollário 2.2. *Existe um D tal que $\int_0^{2\pi} (k_\theta)^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} k^2 d\theta + D$, para todo t no intervalo de existência da solução do k -fluxo.*

3 Preservando Simplicidade

Vamos supor que a solução do k -fluxo existe num intervalo $[0, T)$ e que a curva inicial C_0 é fechada e simples, vamos provar que estas propriedades são partilhadas por todas as curvas C_t do k -fluxo. De fato iremos analisar a função $f : S^1 \times S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(u_1, u_2, t) = \|C(u_1, t) - C(u_2, t)\|^2.$$

Como C_t satisfaz o k -fluxo temos que: $f_t = 2\langle C(u_1, t) - C(u_2, t), (kN)(u_1, t) - (kN)(u_2, t) \rangle$. Derivando nas outras variáveis:

$$\begin{aligned} f_{s_1} &= 2\langle C(u_1, t) - C(u_2, t), T(u_1, t) \rangle \Rightarrow \\ f_{s_1 s_1} &= 2\langle T(u_1, t), T(u_1, t) \rangle + 2\langle C(u_1, t) - C(u_2, t), (kN)u_1, t) \rangle \\ &= 2 - \langle C(u_1, t) - C(u_2, t), (kN)u_1, t) \rangle \\ f_{s_2} &= -2\langle C(u_1, t) - C(u_2, t), T(u_2, t) \rangle \Rightarrow \\ f_{s_2 s_2} &= 2\langle T(u_2, t), T(u_2, t) \rangle + 2\langle C(u_1, t) - C(u_2, t), (kN)u_2, t) \rangle \\ &= 2 - 2\langle C(u_1, t) - C(u_2, t), (kN)u_2, t) \rangle. \end{aligned}$$

Isto implica:

$$f_{s_1 s_1} + f_{s_2 s_2} = 2\langle C(u_1, t) - C(u_2, t), (kN)(u_1, t)(kN)(u_2, t) \rangle + 4.$$

E Portanto temos a seguinte equação, que será muito útil mais tarde:

$$f_t = \Delta f - 4. \quad (1)$$

Outro fato que é consequência do teorema de Schur é o seguinte: vamos denotar $s(u_1, u_2, t) = |\int_{u_1}^{u_2} v(u, t) du|$ onde $v(u, t)$ é a velocidade da curva $C(., t)$.

Lema 3.1. *Se existir um $c > 0$ tal que $|k(u, t)| \leq c$ então $f(u_1, u_2, t) \geq (\frac{2}{c} \sin(\frac{c}{2}s(u_1, u_2, t)))^2$.*

Demonstração. Seja um arco \widehat{PQ} de comprimento $l < \pi r$ numa circunferência de raio r . Considere O o centro da circunferência. Seja $\alpha = \frac{l}{r}$ o menor ângulo entre OP e OQ , então $\frac{d}{2} = r \sin(\frac{\alpha}{2})$. Daí $d = 2r \sin(\frac{l}{2r})$. Da mesma forma se $l = \pi r$ então $d = 2r$ e se $l > \pi r$ então $d = -2r \sin(\frac{l}{2r})$. De qualquer maneira temos:

$$d^2 = (2r \sin(\frac{l}{2r}))^2.$$

O lema segue então comparando, via o teorema de Schur, a curva $C(., t)$ e o arco de comprimento $s(u_1, u_2, t)$ sobre o círculo de raio $\frac{1}{c}$ e usando a fórmula acima. \square

Vamos fixar $c > 0$ e considerar o conjunto aberto $E := \{(u_1, u_2, t); s(u_1, u_2, t) < \frac{\pi}{c}\}$. Se $f(u_1, u_2, t) = 0$ e $(u_1, u_2, t) \in E$ então pelo lema temos que $\frac{c}{2}s(u_1, u_2, t) = n\pi$. Mas em E temos $s(u_1, u_2, t) < \frac{\pi}{2}$. Logo $n = 0$ e portanto $u_1 = u_2$.

Vamos considerar então E^c , note que ∂E^c é formada pela união de dois conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{(u_1, u_2, t); s(u_1, u_2, t) = \frac{\pi}{c} \text{ e } t \in [0, T]\} \text{ e} \\ B &= \{(u_1, u_2, 0); s(u_1, u_2, 0) \geq \frac{\pi}{c}\}. \end{aligned}$$

Pelo lema $f \geq (\frac{2}{c})^2$ em A e como por hipótese a curva inicial é simples, por compacidade f assume um mínimo em B . Seja m o mínimo de f em $A \cup B$.

Defina então $g(u_1, u_2, t) = f(u_1, u_2, t) + \varepsilon t$ e note que por 1 temos $g_t = \Delta g - 4 + \varepsilon$. Seja $0 < \delta < m$ e suponha que existe $(u_1, u_2, t_0) \in E^c$ tal que $g(u_1, u_2, t_0) = m - \delta$, podemos tomar t_0 como o primeiro tempo onde isto ocorre. Como E^c é compacto e na fronteira $f \geq m$ o ponto (u_1, u_2, t_0) está no interior de E^c . Neste ponto temos $g_t \leq 0$ e $\det_{s_1, s_2}(Dg) \geq 0$ (onde fixamos t_0 para calcular Dg). Como num ponto de mínimo as retas tangentes são paralelas temos que $g_{s_1 s_2} = -2 < T(u_2, t_0), T(u_1, t_0) \rangle = \pm 2$. Daí:

$$\Delta g = g_{s_1 s_1} + g_{s_2 s_2} \geq 2\sqrt{g_{s_1 s_1} g_{s_2 s_2}} \geq 2|g_{s_1 s_2}| \geq 4.$$

Mas isto é uma contradição com a equação diferencial que g satisfaz.

Como δ é qualquer temos que $g \geq m$, isto é que $f + \varepsilon t \geq m$ em E^c . Como ε também arbitrário temos que $f \geq m > 0$. O que mostra que as curvas ao longo da evolução do k -fluxo são simples.

O leitor familiarizado com equações parabólicas, notará que o que fizemos nada mais é do que uma aplicação do princípio do máximo.

4 Estimativas a priori da Curvatura

Até então, só obtivemos existência local do k -fluxo. O natural é tentar mostrar que o fluxo existe até um tempo máximo de extinção, que de acordo com o enunciado do teorema é o tempo onde a curva se torna um ponto.

Sabe-se da teoria de equações diferenciais ordinárias que a solução de uma EDO sai de qualquer compacto quando ela se aproxima do tempo maximal de existência da solução, em particular o teorema de Picard aliado a um argumento de compacidade mostra que enquanto o campo for limitado a solução continua existindo.

No nosso caso não temos uma EDO e sim uma EDP, mas o caráter parabólico da mesma diz que a filosofia mencionada acima se aplica, desde que se tome um maior cuidado. No caso o “campo” é kN , o vetor normal é unitário e portanto é limitado, o problema todo então é dominar o crescimento de k . Este é o objetivo desta seção.

Novamente iremos supor que as curvas envolvidas são convexas e portanto podemos parametrizar a curvatura pelo ângulo θ que a tangente a curva faz com

uma direção fixa (por exemplo, horizontal como fizemos antes). Uma quantidade importante para o estudo da curvatura é o conceito de curvatura mediana k^* , para defini-la vamos considerar o conceito de w -curvatura mediana para $w \in [0, 2\pi]$:

$$k_w^* = \sup\{b; k(\theta) > b \text{ em algum intervalo de comprimento } w\}.$$

Por definição a curvatura mediana k^* é k_π^* .

A primeira observação é que a curvatura mediana de cada curva C_t pode ser estimada através da área A que a curva limita e seu comprimento, ou seja é possível estimá-la geometricamente:

$$k^* \leq \frac{L}{A}.$$

De fato, dado $M < k^*(C_t)$ existe um intervalo $I = (a, a + \pi)$ onde $k(\theta, t) > M$ para $\theta \in I$. Por convexidade, C_t está entre as retas tangentes de C_t nos pontos $C_t(a)$ e $C_t(a + \pi)$. Se l é a distância entre as retas, temos que:

$$l = \int_a^{a+\pi} \frac{\sin(\theta - a)}{k(\theta, t)} d\theta \leq \frac{2}{M}.$$

Agora a área é limitada pela largura l vezes o diâmetro, que por sua vez é menor ou igual a $\frac{l}{2}$. Daí temos que $A \leq l\frac{L}{2} \leq \frac{2}{M}L^2$ o que implica $M \leq \frac{L}{A}$ e prova a afirmação.

Uma vez estimada a curvatura mediana, podemos por desigualdades tipo Sobolev, estimar o logaritmo da curvatura em média:

Lema 4.1. *Se $k^*(t)$ é limitada em $[0, T)$ então $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta$ é limitada no mesmo intervalo.*

Demonstração. Usando a equação de k temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{k(\theta, t)} k_t(\theta, t) d\theta = \int_0^{2\pi} (k(k)_{\theta\theta} + k^2) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (k^2 - (k_\theta)^2) d\theta. \end{aligned}$$

Onde na ultima igualdade usamos integração por partes.

Fixado t , pela definição de curvatura mediana, o conjunto $U = \{\theta; k(\theta, t) > k^*(t)\}$ é uma união enumerável de intervalos abertos disjuntos $\{I_i\}$ com comprimento $l(I_i) \leq \pi$. Daí temos que $k(\theta, t) = k^*(t)$ em ∂I_i para todo i . Vamos usar então a desigualdade de Wirtinger⁴ na função $k(\theta, t) - k^*(t)$ (lembre que t está fixado) para obter:

$$\int_{I_i} (k - k^*)^2 \leq \int_{I_i} (k_\theta)^2.$$

⁴Ver glossário

E portanto, expandindo o quadrado no lado esquerdo da desigualdade e somando sobre todos os intervalos temos:

$$\int_{\bar{U}} k^2 - (k_\theta)^2 \leq 2k^*(t) \int_{\bar{U}} k(\theta, t) d\theta \leq 2k^*(t) \int_0^{2\pi} k(\theta, t) d\theta.$$

Agora em \bar{U}^c temos trivialmente que:

$$\int_{\bar{U}^c} k^2 - (k_\theta)^2 d\theta \leq \int_{\bar{U}^c} k^2 \leq 2\pi(k^*(t))^2.$$

Note agora que denotando por $L(t)$ e v o comprimento e a função velocidade da curva C_t respectivamente temos:

$$(v^2)_t = \partial_t(\langle C_u, C_u \rangle) = 2\langle F_u, (F_u)_t \rangle = 2\langle F_u, (F_t)_u \rangle \quad (2)$$

$$= 2\langle vT, (kN)_u \rangle = 2\langle vT, k_u N - vk^2 T \rangle = -2v^2 k^2 = 2vv_t. \quad (3)$$

E portanto $v_t = -k^2 v$. Com isso temos:

$$L_t = \partial_t \left(\int v du \right) = \int (v_t) du = \int -k^2 v du = - \int k^2 ds = - \int k d\theta. \quad (4)$$

Juntando isso com a estimativa obtida no começo, temos:

$$\partial_t \left(\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta \right) \leq 2k^*(t) L_t + 2\pi(k^*(t))^2.$$

Por hipótese, existe M que majora k^* , integrando a desigualdade acima temos:

$$\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta \leq \int_0^{2\pi} \log k(\theta, 0) d\theta + 2M(L(0) - L(t)) + 2\pi M^2 t.$$

E como pela equação 4 $L(t) \geq 0$ é não-crescente, temos a limitação desejada \square

O poder deste lema está no fato de que por mais que ele estime a curvatura em média (integrando), ele nos dará de fato uma estimativa uniforme:

Teorema 4.2. *Se $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta$ é limitada em $[0, T)$ então $k(\theta, t)$ é uniformemente limitada em $S^1 \times [0, T)$.*

Demonstração. Por hipótese, vamos supor que $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta \leq M$. Primeiramente notamos que dado $\delta > 0$ existe uma constante $C > 0$ tal que se $I \subset S^1$ é um intervalo de comprimento δ e $t \in [0, T)$ é qualquer então existe um ponto $a \in I$ tal que $k(a, t) < C$.

De fato, vamos supor que $k \geq C$ em I , então $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta \geq \delta \log C + (2\pi - \delta) \log k_{\min}(t)$. Mas, como estamos no caso convexo, $k_{\min}(t)$ é não-decrescente, e portanto podemos trocar $k_{\min}(t)$ por $k_{\min}(0)$. Basta tomar então C tal que $\delta \log C + (2\pi - \delta) \log k_{\min}(0) > M$, e obtemos a existência de a .

Vamos fixar então $\theta_0 \in S^1$, $t \in [0, T)$ e $\delta > 0$, dado I um intervalo de comprimento $l(I) = \delta$ contendo θ_0 , seja a obtido previamente onde $k(a, t) \leq C$.

Pelo corolário 2.2, o teorema fundamental do Cálculo e Cauchy-Schwarz temos que:

$$\begin{aligned} k(\theta_0) &= k(a) + \int_a^{\theta_0} k_\theta d\theta \leq C + \sqrt{\delta} \sqrt{\int_0^{2\pi} (k_\theta)^2 d\theta} \\ &\leq C + \sqrt{\delta} \sqrt{2\pi k_{max}^2 + D} \leq C + \sqrt{2\pi\delta} k_{max} + \sqrt{\delta D}. \end{aligned}$$

E observe que esta estimativa independe de θ_0 ! Em particular $k_{max} \leq C + \sqrt{2\pi\delta} k_{max} + \sqrt{\delta D}$ e portanto para todo $t \in [0, T]$:

$$k_{max}(t) \leq \frac{C + \sqrt{\delta D}}{1 - \sqrt{2\pi\delta}}.$$

□

Combinando estas três estimativas, obtemos o seguinte:

Corolário 4.3. *Se as áreas limitadas pelas curvas C_t são limitadas por baixo e afastadas de zero então a curvatura k é uniformemente limitada.*

Demonstração. De fato, se A_t é a área delimitada por C_t e $A_t > M$ então pela estimativa geométrica $k^* \leq L/M$ e portanto $\int \log k$ é limitada em $[0, T]$ e isto implica uma limitação uniforme para k . □

4.1 Bootstrap

Uma vez que obtivemos cotas uniformes (estimativas C^0), vamos usufruir do caráter parabólico da equação para estimar as derivadas da solução (estimativas C^k). Este método é comum na teoria de Equações Diferenciais Parciais, porém iremos apresentá-lo de maneira elementar. A ferramenta fundamental aqui é o princípio do máximo⁵:

Lema 4.4 (Princípio do Máximo). *Seja $M := \max_{\theta \in S^1} u(\theta, 0)$, onde u é solução de $u_t = au_{\theta\theta} + bu_\theta + cu$. Se $a \geq 0$ e $cM \leq 0$ então $u \leq M$.*

Tome $u = e^{rt} k_\theta$ e vamos supor que a constante r satisfaz $r \leq -3k^2$. Então:

$$\begin{aligned} \partial_t(e^{rt} k_\theta) &= r e^{rt} k_\theta + e^{rt} (k_t)_\theta = r e^{rt} k_\theta + e^{rt} (k^2 k_{\theta\theta} + k^3)_\theta \\ &= k^2 (e^{rt} k_\theta)_{\theta\theta} + 2k k_\theta (e^{rt} k_\theta)_\theta + (3k^2 + r) (e^{rt} k_\theta). \end{aligned}$$

E pelo princípio do máximo teríamos $k_\theta \leq M r^{-rt}$. Ou seja:

Corolário 4.5. *Se k é uniformemente limitada então k_θ também o é.*

⁵Ver Glossário.

Iremos agora estimar as derivadas de ordem superior de k em relação a θ . Para não carregar muito a notação iremos denotar por k' a derivada com respeito a θ . Uma vez com estimativas C^0 de k e k' podemos usar a desigualdade de Gronwall⁶ para estimar a norma L^4 de k'' .

Note que:

$$\begin{aligned}\partial_t \left(\int_0^{2\pi} (k'')^4 \right) &= 4 \int_0^{2\pi} (k'')^3 (k^2 k'' + k^3)'' = - \int_0^{2\pi} ((k'')^3)' (k^2 k'' + k^3)' \\ &= -12 \int_0^{2\pi} k^3 (k'')^2 (k''')^2 + 2kk'(k'')^3(k''') + 3k^2 k'(k'')^2(k''') d\theta\end{aligned}$$

Onde usamos integração por partes na segunda igualdade.

Para estimar tais produtos, usaremos uma desigualdade elementar clássica, porém muito útil, do tipo:

$$ab \leq \frac{a^2}{4\varepsilon} + \varepsilon b^2.$$

Por exemplo, o segundo termo é estimado por:

$$[k(k'')(k''')][-12(k')(k'')^2] \leq \frac{k^2(k'')^2(k''')^2}{4\varepsilon} + 144\varepsilon(k')^2(k'')^2.$$

Analogamente, o terceiro termo é dominado por:

$$[k(k'')(k''')][-12(k(k')(k''))] \leq \frac{k^2(k'')^2(k''')^2}{4\varepsilon} + 144\varepsilon k^2(k')^2(k'')^2.$$

E portanto, denotando por C_1 e C_2 constantes temos:

$$\partial_t \left(\int_0^{2\pi} (k'')^4 \right) \leq \left(-12 + \frac{15}{\varepsilon}\right) \int_0^{2\pi} k^2(k'')^2(k''')^2 + \int_0^{2\pi} C_1(k')^2(k'')^4 + C_2 k^2(k')^2(k'')^2.$$

Tomando $\varepsilon = 5/4$ e lembrando que k e k' são limitadas por uma constante C por exemplo temos:

$$\partial_t \left(\int_0^{2\pi} (k'')^4 \right) \leq C \int_0^{2\pi} (k'')^4 + (k'')^2 \leq C \int_0^{2\pi} (k'')^4 + (\sqrt{2\pi}C) \sqrt{\int_0^{2\pi} (k'')^4}.$$

Onde usamos Cauchy-Schwarz na segunda desigualdade. Agora, o lema de Gronwall diz que $\int_0^{2\pi} (k'')^4$ cresce no máximo exponencialmente e portanto é limitada em intervalos de tempo limitados, obtemos então o:

Corollário 4.6. *Se k e k' são uniformemente limitadas então $\|k''\|_{L^4}$ é limitada.*

⁶ver Glossário

Podemos usar Gronwall novamente para estimar a norma L^2 de k''' . De fato:

$$\begin{aligned}\partial_t \left(\int_0^{2\pi} (k''')^2 \right) &= 2 \int_0^{2\pi} (k''')(k^2 k'' + k^3)''' = -2 \int_0^{2\pi} k''''(k^2 k'' + k^3)'' \\ &= -2 \int_0^{2\pi} k^2 (k''')^2 + 4kk'k''k'''' + 2k(k'')^2 k'''' + \\ &\quad + 2k'k''k'''' + 3k^2 k''k'''' + 6(k')^2 k''''.\end{aligned}$$

Novamente cada termo é estimado, como antes, pelo primeiro termo vezes uma constante e alguns termos penalizadores. De qualquer maneira, se C é limitante para k, k' e $\int (k'')^4$, C_1, C_2 constantes então:

$$\begin{aligned}\partial_t \left(\int_0^{2\pi} (k''')^2 \right) &\leq C \left(\int_0^{2\pi} (k')^2 (k''')^2 + k''^4 + \frac{(k')^4}{k^2} (k'')^2 + k^2 (k'')^2 + (k')^4 \right) \\ &\leq C_1 \int_0^{2\pi} (k''')^2 + C_2.\end{aligned}$$

Novamente por Gronwall, $\int_0^{2\pi} (k''')^2$ cresce no máximo exponencialmente e portanto temos:

Corollário 4.7. *Se k, k' e $\|k''\|_{L^4}$ são limitadas então $\|k'''\|_{L^2}$ também o é.*

E pela desigualdade de Sobolev⁷ temos o seguinte resultado⁸:

Corollário 4.8. *Se $k, k', \|k''\|_{L^4}$ e $\|k'''\|_{L^2}$ são limitadas então k'' é limitada.*

Demonstração. Basta usar a desigualdade de Sobolev em uma dimensão para a função k'' obtendo:

$$\sup |(k'')|^2 \leq C \int ((k'')')^2 + (k'')^2.$$

□

Por indução pode-se mostrar que limitação de três derivadas consecutivas implica na limitação na derivada seguinte. De fato note que por indução, se denotamos por $k^{(j)}$ a j -ésima derivada de k então:

$$(k^{(n)})_t = k^2 k^{(n+2)} + 2nk k' k^{(n+1)} + p(k, k', \dots, k^{(n-1)}) k^{(n)} + q(k, k', \dots, k^{(n-1)}).$$

Onde p e q são certos polinômios. Se $k^{(j)}$ é limitado para $j = 0 \dots n-1$, então os polinômios são limitados em intervalos finitos de tempo e usando o princípio do máximo para $k^{(n)} e^{rt}$ como fizemos antes, para um r adequado temos que $k^{(n)}$ é limitado em intervalos finitos. E portanto temos que:

Corollário 4.9. *Se k, k' e k'' são limitadas então $k^{(n)}$ é limitado para todo n .*

⁷ver Glossário

⁸O leitor familiarizado com técnicas de análise notará que tudo isto é apenas um argumento de interpolação.

4.2 Resumo e Conclusão da seção

Na seção passada mostramos que se as áreas delimitadas pelas curvas C_t em $[0, T]$ são limitadas por baixo e afastadas de zero então a curvatura k é uniformemente limitada nesse intervalo de tempo.

Em seguida, usando o princípio do máximo, mostramos que esta limitação implica na limitação de k'^9 .

Daí, o objetivo é limitar k'' . Porém isto foi feito em dois passos, finalizando com um argumento de interpolação. De fato, usando a desigualdade de Gronwall mostramos que a limitação de k e k' implica a limitação de $\int (k'')^4$. Uma segunda aplicação do lema de Gronwall permitiu a limitação de $\int (k''')^2$ e finalmente a desigualdade de Sobolev (interpolando dois espaços) nos disse que k'' é limitada em $[0, T]$.

Por indução, gerando equações diferenciais ordinárias para as derivadas de k a partir da original, nos permitiu mostrar que *todas* as derivadas de k eram limitadas. Isto nos dá o seguinte teorema, que é a conclusão desta seção:

Teorema 4.10. *A solução do k -fluxo iniciando em uma curva convexa existe enquanto a área delimitada pelas curvas C_t , dadas pela solução, não se anule.*

Demonstração. Enquanto a área estiver afastada de zero, num intervalo $[0, T]$, todas as derivadas espaciais (na variável θ) de k são limitadas. As equações diferenciais de k e suas derivadas dizem que as derivadas temporais (na variável t) também são limitadas. Daí, pelo teorema de Arzelá-Ascoli, $k(t)$ converge uniformemente, junto com suas derivadas, para uma função $k(T)$ quando t tende à T , logo $k(T)$ é de classe C^∞ e é solução da equação de k . Isto permite estender a solução para um intervalo da forma $[0, T + \varepsilon)$ \square

5 Arredondando as soluções

Nesta seção iremos terminar a prova do teorema de Gage-Hamilton, de fato, analisaremos o que acontece quando as curvas degeneram até um ponto, e ver que isso ocorre em tempo finito e de maneira assintoticamente circular.

Pelos resultados da seção anterior, sabemos que enquanto a área delimitada pelas curvas for positiva, o k -fluxo existe para tempos um pouco maiores. Esperamos então que o fluxo deixe de existir quando a área for para zero, que é o caso quando a curva degenera à um ponto.

Seja então $A(t)$ a área delimitada pela curva $C(t)$, pelo teorema de Gauss-Green temos que se parametrizamos a curva planar por $(x(u), y(u))$ então:

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy_u - yx_u) du = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle C, vN \rangle du.$$

⁹Onde k' significa a derivada de k na variável θ .

Derivando temos:

$$\begin{aligned}
A_t &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\langle C_t, vN \rangle + \langle C, v_t N + vN_t \rangle) du \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (vk - \langle C, vk^2 N \rangle + \langle C, -k_u T \rangle) du \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (vk - \langle C, vk^2 N \rangle + \langle C_u, kT \rangle + \langle C, vk^2 N \rangle) du \\
&= -\int_0^{2\pi} vk du = -\int_0^{2\pi} k ds = -2\pi.
\end{aligned}$$

Onde na terceira igualdade integramos por partes, e na última usamos que a curvatura total de uma curva planar simples fechada é 2π . Em particular o k -fluxo existe até o tempo $T_0 = \frac{A(0)}{2\pi}$.

Alem disso, pela desigualdade isoperimétrica, temos que $\pi \frac{L}{A} \leq \int_0^L k^2 ds$ onde A é a área delimitada pela curva e L o comprimento da mesma. Assim:

$$\left(\frac{L^2}{A}\right)_t = -2\frac{L}{A} \left(\int_0^L k^2 ds - \pi \frac{L}{A}\right) \leq -0.$$

Daí como $A \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \frac{A(0)}{2\pi}$ temos que $L \rightarrow 0$ também, ou seja, a curva realmente degenera à um ponto. De fato obtemos que a área é dada por $A = 2\pi\left(\frac{A(0)}{2\pi} - t\right)$.

Em seguida iremos investigar o comportamento circular assintótico quando $t \rightarrow \frac{A(0)}{2\pi}$. Para isso devemos demonstrar a aproximação assintótica entre o máximo e o mínimo da curvatura.

Vamos denotar por $r(t)$ e $R(t)$ os raios do maior círculo inscrito e do menor círculo circunscrito da curva $k(t)$, definida pela curva $C(t)$ (i.e. $k(t)$ de fato é uma função $k(t, u)$ para t fixado). Fixado $t \in [0, T)$ e $M < k_w^*$ próximo da w -curvatura mediana. Por definição, o conjunto $\{\theta; k(\theta, t) > M\}$ contém um intervalo da forma $(-\frac{w}{2}, \frac{w}{2})$ (a menos de rotação).

Considere o círculo inscrito e o circunscrito, como t é fixado, vamos denotar seus raios por r e R respectivamente. Seja a a distância do centro do círculo inscrito ao ponto p do círculo circunscrito que intersecta a curva $k(t)$, que podemos supor a menos de rotação que p está no eixo real. Fixe o ponto no eixo real tal que traçando o setor circular nesse ponto de abertura w (simétrico), a distância desse ponto à curva $k(t)$ no extremo do setor é $1/M$. Finalmente seja a tangente ao círculo inscrito que passa pelo ponto do círculo com ângulo w e considere a interseção desta reta com o eixo real e chame de d a distância desse ponto ao ponto p .

Primeiramente, temos que $2r = r + a$. Isto implica que $\frac{R}{r} - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{a}{2r}$.

Além disso, por um arumento de trigonometria básica temos que:

$$\cos\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{1/M}{1/M + d} = \frac{r}{a + d}.$$

Daí temos que:

$$a = \frac{r}{\cos(\frac{w}{2})} - d = \frac{r}{\cos(\frac{w}{2})} - \frac{1}{M} \left(\frac{1}{\cos(\frac{w}{2})} - 1 \right).$$

Definindo a função $K(w) = \left(\frac{1}{2 \cos(\frac{w}{2})} - \frac{1}{2} \right) = \frac{2 \cos(\frac{w}{2})}{1 - \cos(\frac{w}{2})}$ e juntando as duas equações, obtemos:

$$Mr \leq \frac{1}{1 - K(w) \left(\frac{R}{r} - 1 \right)}.$$

Como M é arbitrariamente próximo à k_w^* temos que:

$$k_w^*(t)r(t) \leq \frac{1}{1 - K(w) \left(\frac{R(t)}{r(t)} - 1 \right)}. \quad (5)$$

Usando a curvatura mediana podemos estimar o máximo da curvatura, obtendo a seguinte:

Proposição 5.1. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C(\varepsilon)$ tal que:*

$$k_{max}(t)r(t) \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{1}{1 - C(\varepsilon) \left(\frac{R}{r} - 1 \right)}.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ e fixe $t \in [0, T]$. Seja a tal que $k(a, t) = k_{max}(t)$ e seja $\delta > 0$ tal que $k(\theta, t) \geq (1 - \varepsilon)k_{max}(t)$ para todo $\theta \in (a - \frac{w}{2}, a + \frac{w}{2})$. Assim, para todo $\theta \in (a - \frac{w}{2}, a)$ temos:

$$\begin{aligned} k(a, t) &= k(\theta, t) + \int_{\theta}^a k_{\theta} \leq k(\theta, t) + \sqrt{\delta} \left(\int_{\theta}^a (k_{\theta})^2 \right)^{1/2} \\ &\leq k(\theta, t) + \sqrt{\delta} (D + \int k^2)^{1/2} \leq k(\theta, t) + k_{max} \sqrt{2\pi\delta} + \sqrt{\delta D}. \end{aligned}$$

Onde na primeira desigualdade usamos Cauchy-Schwarz e na segunda desigualdade usamos o corolário 2.2. Escolha então M tal que $\sqrt{D} \leq Mk_{min}(0)$. Daí como $k_{min}(0) \leq k_{min}(t) \leq k_{max}(t)$ temos que:

$$k(a, t) \leq k(\theta, t) + (\sqrt{2\pi\delta} + \sqrt{\delta}M)k_{max}(t).$$

Tome então δ tal que $\sqrt{2\pi\delta} + \sqrt{\delta}M < \varepsilon$ e obtenha $(1 - \varepsilon)k_{max}(t) \leq k(\theta, t)$. Analogamente, obtem-se a estimativa para $\theta \in (a, a + \frac{w}{2})$. Logo temos:

$$k_w^*(t) \geq k_{max}(t)(1 - \varepsilon) \quad \forall t.$$

Agora é só usar a equação 5. □

Note também que argumentos similares aos feitos durante a prova mostram que $k(\theta, t)r(t)$ é uma família equicontínua em qualquer intervalo da forma (t, T_{max}) onde $T_{max} = \frac{A(0)}{2\pi}$.

Usando a desigualdade de Bonnesen ¹⁰ obtemos a estimativa:

$$\frac{L^2}{A} - 4\pi \geq \frac{\pi^2}{A}(R-r)^2 \leq \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2.$$

Agora pela estimativa de Gage¹¹ temos que $\frac{L^2}{A}$ converge à 4π quando $t \rightarrow \frac{A(0)}{2\pi}$. Daí temos que $\frac{r}{R}$ converge à 1. Em particular, pela proposição anterior, para todo $\varepsilon > 0$ se t é suficientemente próximo à $\frac{A(0)}{2\pi}$ então:

$$k_{max}(t)r(t) \leq \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^2.$$

Falta mostrar a uniformidade da convergência. Para isto vamos mostrar primeiramente que $k(\theta, t)r(t)$ tende à 1 uniformemente. De fato, pelo teorema de Arzelá-Ascoli a equicontinuidade e a limitação uniforme mostra que existe uma sequência $t_n \rightarrow \frac{A(0)}{2\pi}$ tal que $k(\theta, t_n)r(t_n)$ converge uniformemente para alguma função $f(\theta)$. Note que $f(\theta) \leq 1$ e portanto $\int \frac{d\theta}{f(\theta)} \geq 2\pi$.

Por outro lado, $(k(\theta, t_n)r(t_n))^{-1}$ converge pontualmente para $f(\theta)^{-1}$. Usando o lema de Fatou temos que:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\theta}{f(\theta)} &\leq \liminf \int \frac{d\theta}{k(\theta, t_n)r(t_n)} = \liminf \int \frac{ds}{r(t_n)} \\ &= \liminf \frac{L(t_n)}{r(t_n)} \leq \liminf \frac{(2\pi R(t_n))R(t_n)}{R(t_n)r(t_n)} \leq 2\pi. \end{aligned}$$

As duas desigualdades implicam que $f(\theta)$ é constante igual à 1.

Como $\frac{k_{min}(t)}{k_{max}(t)} = (k_{min}(t)r(t))\frac{1}{k_{max}(t)r(t)}$ temos que $\frac{k_{min}(t)}{k_{max}(t)}$ converge uniformemente à 1.

Finalmente, note que pela desigualdade de Bonnesen temos:

$$\frac{L^2}{A} - 4\pi \geq \frac{(L - 2\pi r)^2}{A} = \left(\frac{L}{\sqrt{A}} - \frac{2\pi r}{\sqrt{2\pi(T_{max} - t)}}\right)^2.$$

E como $\frac{L}{\sqrt{A}} \rightarrow 2\sqrt{\pi}$ temos que $\frac{r}{\sqrt{T_{max}-t}} \rightarrow \sqrt{2}$ e portando pela convergência uniforme de $k(\theta, t)r(t)$ à 1 temos:

Corollário 5.2. $k(\theta, t)\sqrt{2T_{max} - 2t} \rightarrow 1$ uniformemente.

6 Glossário

¹⁰Ver glossário.

¹¹Ver Glossário