Prova do teorema de Veech seguindo Forni

David Diica e Yakov Simpson-Weller

9 de fevereiro de 2004

1 Contexto

Nestas notas mostraremos uma prova relativamente curta (dada por Forni em [F]) de um teorema de Veech [V] que diz:

Teorema 1.1. *O fluxo de Teichmüller é não-uniformemente hiperbólico.*

Antes de descrever a história do problema, vamos introduzir algumas notações (e definir o que é o fluxo geodésico de Teichmüller).

- M é uma superfície de Riemann de gênero g;
- T_g = o espaço de Teichmüller correspondente;
- Q_g = diferenciais holomorfas quadráticas não-nulas $\simeq$ fibrado cotangente de T_g menos a seção nula.

Dado $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_\sigma)$ com κ_i inteiro par positivo e $\sum\limits_i \kappa_i = 4g - 4$, definimos $Q_\kappa \subset Q_g$ como o conjunto das diferenciais quadráticas q tais que q é o quadrado de uma diferencial holomorfa e os zeros distintos de q tem ordens $(\kappa_1, \ldots, \kappa_\sigma)$.

A subvariedade analítica complexa Q_κ de Q_g é dita um *estrato* de Q_g.

Observação 1.2. A condição $\sum\limits_i \kappa_i = 4g - 4$ implica na finitude dos estratos.

Se definirmos o grupo $\Gamma_g = \operatorname{Diff}^+(M)/\operatorname{Diff}_0^+(M)$ (dito o *mapping class group*), então $\mathcal{M}_g := Q_g/\Gamma_g$ é o *espaço de moduli* e $\mathcal{M}_\kappa := Q_\kappa/\Gamma_g$ são seus estratos.

Dada uma diferencial quadrática q, o conjunto dos seus zeros será denotado por Σ_q.

$\mathcal{M}_\kappa$ tem estrutura afim complexa natural dada pelo *period map*: localmente, se $q \in Q_\kappa$, podemos definir a raiz quadrada $q^{1/2}$ de q, uma diferencial holomorfa com zeros em Σ_q. A classe de cohomologia de $q^{1/2}$ em $H^1(M_q, \Sigma_q, \mathbb{C})$ é dada por integração sobre ciclos relativos de (M_q, Σ_q).

Fixamos a medida de Lebesgue em $H^1(M_q, \Sigma_q, \mathbb{C})$ unicamente normalizada para que o $(2g-1+\sigma)$-toro complexo obtido do quociente pelo lattice inteiro $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} H^1(M_q, \Sigma_q, \mathbb{C})$ tenha medida total 1. Então, o push-forward de Lebesgue sobre $\mathcal{M}_\kappa$ (via projeção) é denotado por μ_κ.

Além disso, temos função $A : Q_g \to \mathbb{R}^+$ que a cada q associa a área total de M_q (com respeito a forma de área ω_q da métrica R_q induzida por q; para as definições de ω_q e R_q veja a próxima seção).

Note que o grupo $GL_+(2,\mathbb{R})$ atua em Q_κ via transformações lineares nos pares de 1-formas reais $(\Re(q^{1/2}), \Im(q^{1/2}))$. Mais ainda, tal ação comuta com Γ_g, donde induz ação em $\mathcal{M}_\kappa$. Nas coordenadas afins dadas pelo *period map*, esta ação é a ação do grupo $GL_+(2,\mathbb{R})$ sobre o espaço vetorial

$$H^1(M_q, \Sigma_q, \mathbb{C}) \equiv \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} H^1(M_q, \Sigma_q, \mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} H^1(M_q, \Sigma_q, \mathbb{R}) \qquad (1)$$

no primeiro fator do produto tensorial. Tal ação comuta com Γ_g e portanto induz ação em $\mathcal{M}_\kappa$. Das definições, $SL(2,\mathbb{R})$ preserva μ_κ e A. Logo $Q_\kappa^{(1)} := A^{-1}(1) \cap Q_\kappa$ tem medida natural $\mu_\kappa^{(1)} := \mu_\kappa / dA$. A ação das matrizes diagonais $G_t = \mathrm{diag}(e^t, e^{-t})$ gera um fluxo que preserva medida. Pelas considerações acima, tal fluxo atua de fato em $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$.

Definição 1.3. O fluxo G_t de $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ é chamado *fluxo de Teichmüller*.

Quanto as propriedades deste fluxo, tem-se:

Teorema 1.4 (Veech [V]). *$\mu_\kappa^{(1)}$ é medida finita de $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ e $G_t = diag(e^t, e^{-t})$ é ergódico em $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ com respeito a $\mu_\kappa^{(1)}$.*

Por outro lado, toda a informação não-trivial sobre os expoentes de Lyapounov deste fluxo estão contidas num cociclo natural, definido por Kontsevich e Zorich, sobre o fluxo de Teichmüller.

O *cociclo de Kontsevich-Zorich* é construído assim: seja $H_g^1(M, \mathbb{C})$ o fibrado holomorfo com fibra $H^1(M_q, \mathbb{C})$ sobre $Q_g^{(1)}$. Como $Q_g^{(1)}$ é simplesmente conexo, $H_g^1(M, \mathbb{C})$ pode ser trivializado. Mais ainda, tal trivialização pode ser feita por transporte paralelo com respeito a conexão de *Gauss-Manin* (a qual, neste caso, é dada pela propriedade de que as seções paralelas são as seções holomorfas localmente constantes). Ou seja, $H^1_g(M,\mathbb{C}) \equiv Q^{(1)}_g \times H^1(M,\mathbb{C})$. Por outro lado, o fluxo de Teichmüller G_t em $Q^{(1)}_g$ se levanta trivialmente a um fibrado produto como a identidade no segundo fator. Logo, ele se levanta a um fluxo em $H^1_g(M,\mathbb{C})$. Por passagem ao quociente com respeito ao grupo Γ_g, o fluxo está definido em $\mathcal{H}^1_g(M,\mathbb{C}) := H^1_g(M,\mathbb{C})/\Gamma_g$. Neste ponto definimos:

Definição 1.5. A restrição do fluxo acima ao subfibrado real $\mathcal{H}^1_g(M,\mathbb{R}) := H^1_g(M,\mathbb{R})/\Gamma_g$ é dito o *cociclo de Kontsevich-Zorich*, o qual será denotado por G^{KZ}_t.

Observação 1.6. O cociclo deixa invariante os estratos $\mathcal{H}^1_\kappa(M,\mathbb{R})$ (definidos pela restrição a $\mathcal{M}_\kappa$ do fibrado $\mathcal{H}^1_g(M,\mathbb{R})$).

Como $H^1(M,\mathbb{R})$ tem estrutura simplética natural dada pelo produto exterior das classes de cohomologia de de Rham, o cociclo de Kontsevich-Zorich é *simplético*. Neste caso, os expoentes de Lyapounov são simétricos em relação a origem.

Baseados em experimentos numéricos, Kontsevich e Zorich [K] conjecturaram que *o espectro de Lyapounov é simples*:

CONJECTURA DE KONTSEVICH-ZORICH. Os $2g$ expoentes de Lyapounov do cociclo de Kontsevich-Zorich satisfazem:

$$1 = \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_g > 0 > \lambda_{g+1} = -\lambda_g > \cdots > \lambda_{2g} = -\lambda_1 = -1. \tag{2}$$

Observação 1.7. Veech [V] provou que o fluxo geodésico de Teichmüller é *não-uniformemente hiperbólico*. Entretanto, como o fibrado $\mathcal{H}^1_g(M,\mathbb{R})$ não coincide com todo o espaço tangente a $\mathcal{M}^{(1)}_\kappa$, o teorema de Veech não implica a conjectura de Kontsevich-Zorich. Por (1), os expoentes de Lyapounov do fluxo de Teichmüller (em função dos expoentes do cociclo de Kontsevich-Zorich) são (ver [K]):

$$\begin{aligned} 2 \geq 1+\lambda_2 \ldots 1+\lambda_g \geq 1 \\ \geq 1-\lambda_g \cdots \geq 1-\lambda_2 \geq 0 \geq -1+\lambda_2 \geq \cdots \geq -1+\lambda_g \\ \geq -1 \geq -1-\lambda_{g-1} \geq \cdots \geq -1-\lambda_2 \geq -2. \end{aligned} \tag{3}$$

onde os expoentes 1 e -1 acima tem multiplicidade pelo menos $\sigma_\kappa - 1$.

A hiperbolicidade não-uniforme do *fluxo de Teichmüller* (teorema 1.1) é portanto equivalente a :

Teorema A. $\lambda_2 < 1(= \lambda_1)$ *(ou seja, o maior expoente é simples).*

O objetivo destas notas é apresentar uma simplificação da prova original de Veech [V] do teorema acima dada por Forni em [F]. Note que neste mesmo trabalho, Forni aplica os métodos da prova dada abaixo para também mostrar a *hiperbolicidade não-uniforme* do cociclo de Kontsevich-Zorich (ou seja, $\lambda_g > 0$).

Para finalizar, as notas estão organizadas como se segue. Na próxima seção exibiremos as coordenadas com as quais faremos a estimativa do segundo expoente e provaremos o teorema A, módulo alguns lemas mais ou menos gerais sobre EDO's em espaços de Banach, os quais serão demonstrados no apêndice.

2 Uma fórmula variacional

Nesta seção estudaremos a fórmula variacional que Forni utilizou para provar o teorema A. Para isto, precisaremos introduzir:

2.1 Representação de Hodge como boas coordenadas

Seja $q \in \mathcal{M}_\kappa^{(1)}$. Toda classe de cohomologia $c \in H^1(M_q, \mathbb{R})$ pode ser representada por diferencial harmônica, já que $c = [\Re(h^+)]$, onde h^+ é uma diferencial holomorfa de M_q. Isto permite introduzir em $H^1(M_q, \mathbb{R})$ a norma de Hodge. Esta observação simples permitirá, como veremos logo abaixo, construir boas coordenadas para calcular os expoentes de Lyapounov do cociclo de Kontsevich-Zorich.

Definimos por $R_q := |q|^{1/2}$ a métrica plana (suave) induzida por q em M, a qual é degenerada em Σ_q, e ω_q a forma de área correspondente. Ou seja, se $p \in M_q - \Sigma_q$, fixando coordenada holomorfa canônica $z := x + iy$ tal que $q = dz^2$, então

$$R_q = (dx^2 + dy^2)^{1/2} \quad \text{e} \quad \omega_q = dx \wedge dy.$$

Se $p \in \Sigma_q$ é um zero de ordem k, então nas coordenadas canônicas vale $q = z^k dz^2$, donde

$$R_q = |z|^{k/2}(dx^2+dy^2)^{1/2} \quad \text{e} \quad \omega_q = |z|^k dx \wedge dy.$$

Denotamos por $\mathcal{F}_q := \{\Im(q^{1/2}) = 0\}$ a *folheação horizontal* de q e por $\mathcal{F}_{-q} := \{\Re(q^{1/2}) = 0\}$ a *folheação vertical* de q.

Observação 2.1. Estas folheações estão na classe das *measured foliations* de Thurston. Suas medidas transversais são $|\Im(q^{1/2})|$ e $|\Re(q^{1/2})|$ resp.

Existe um único referencial *positivamente orientado* $\{S, T\}$ de $TM|_{M_q - \Sigma_q}$ R_q-ortonormal tal que S (resp. T) é tangente a folheação horizantal (resp. vertical) de q. Note que S, T são suaves em $M_q - \Sigma_q$, mas não em Σ_q.

Defina $\eta_T := \Re(q^{1/2}) = -i_T\omega_q$, $\eta_S := \Im(q^{1/2}) = i_S\omega_q$, onde se ω é uma forma diferencial e X é um campo de vetores, então $i_X\omega$ é o produto interior de X por ω. Claramente vale $\omega_q = \eta_T \wedge \eta_S$ e, como η_S, η_T são 1-formas fechadas, S, T preservam a forma de área ω_q.

Definição 2.2.

- $L_q^2(M) := L^2(M, \omega_q)$;
- $H^1(M)$ é o espaço de Sobolev das funções fracamente diferenciáveis com derivadas em L^2;
- Os operadores de *Cauchy-Riemann* são $\partial_q^{\pm} := S \pm iT$, os quais são fechados em $H^1(M) \subset L^2(M)$;
- R_q^+ (resp. R_q^-) é a imagem de ∂_q^+ (resp. ∂_q^-);
- $\mathcal{M}_q^-$ (resp. $\mathcal{M}_q^+$) é o espaço das L_q^2 funções anti-meromorfas (resp. meromorfas) com pólos em Σ_q.

Note que as imagens $R_q^{\pm}$ dos operadores de Cauchy-Riemann são fechadas e tem codimensões finitas. De fato, as adjuntas dos operadores de Cauchy-Riemann satisfazem $(\partial_q^{\pm})^* = -\partial_q^{\mp}$, donde, pela teoria de espaços de Hilbert, $R_q^{\pm}$ é ortogonal a $\mathcal{M}_q^{\mp}$, já que $\mathcal{M}_q^{\mp}$ são os núcleos dos operadores $\partial_q^{\pm}$. Portanto, temos as decomposições ortogonais

$$L_q^2(M) = R_q^- \oplus \mathcal{M}_q^+ = R_q^+ \oplus \mathcal{M}_q^- \tag{4}$$

e as projeções ortogonais associadas $\pi_q^{\pm} : L_q^2(M) \to \mathcal{M}_q^{\pm}$.

As transformações $\mathbb{R}$-lineares $c_q^{\pm} : \mathcal{M}_q^{\pm} \to H^1(M_q, \mathbb{R})$

$$c_q^+(m^+) := [\Re(m^+ q^{1/2})], \quad c_q^-(m^-) := [\Re(m^- \overline{q}^{1/2})] \tag{5}$$

são isomorfismos de espaços vetoriais tais que

$$\|c_q^{\pm}(m^{\pm})\|_q^2 := \int_M c_q^{\pm}(m^{\pm}) \wedge *c_q^{\pm}(m^{\pm}) = |m^{\pm}|_0^2, \tag{6}$$

onde $\|.\|_q$ é a norma de Hodge na cohomologia $H^1(M_q, \mathbb{R})$, o operador $*$ de Hodge é dado por $*\eta_T = \eta_S, *\eta_S = -\eta_T$ e $|.|_0$ é a norma de $L_q^2(M)$.

Podemos resumir estas afirmações na proposição:

Proposição 2.3. *Os espaços $\mathcal{M}_q^{\pm}$ com o produto interno de $L_q^2(M)$ são* isomorfos *a $H^1(M_q, \mathbb{R})$ com o produto interno de Hodge determinado pela métrica R_q e pela forma de área ω_q.*

Demonstração. A única parte a ser realmente provada é que $c_q^{\pm}$ são isomorfismos. Mas isto decorre do fato de que se $h^{\pm}$ é diferencial holomorfa, resp. anti-holomorfa, então $h^+/q^{\frac{1}{2}}$, resp. $h^-/\overline{q}^{\frac{1}{2}}$, é função meromorfa, resp. anti-meromorfa, com pólos em Σ_q as quais estão em $L_q^2(M)$. □

Ou seja, a representação de Hodge de qualquer classe de cohomologia como a parte real de uma diferencial holomorfa nos leva a uma identificação natural com os espaços de funções meromorfas e anti-meromorfas.

Para "inaugurar" nossos isomorfismos, notamos que a *forma simplética* em $H^1(M_q, \mathbb{R})$ dada pelo produto exterior pode ser escrito em $\mathcal{M}_q^{\pm}$ como:

$$c_q^{\pm}(m_1^{\pm}) \wedge c_q^{\pm}(m_2^{\pm}) = \Im(m_1^{\pm}, m_2^{\pm})_q, \tag{7}$$

onde $(.,.)_q$ é o produto interno de $L_q^2(M)$.

Por outro lado, calcularemos agora o cociclo de Kontsevich-Zorich usando os isomorfimos.

Pela decomposição de $L_q^2(M)$ na equação (4), toda $u \in L_q^2(M)$ se escreve como $u = \partial_q^+ v + \pi_q^-(u)$, com $v \in H^1(M)$. O operador $U_q : L_q^2(M) \to L_q^2(M)$ dado por

$$U_q(u) := \partial_q^- v - \overline{\pi_q^-(u)} \quad \text{se} \quad u = \partial_q^- v + \pi_q^-(u), \tag{8}$$

é uma isometria $\mathbb{R}$-linear.De fato, pela ortogonalidade da decomposição (4), temos

$$|U_q(u)|_0^2 = |\partial_q^- v|_0^2 + |\pi_q^-(u)|_0^2 = |\partial_q^+ v|_0^2 + |\pi_q^-(u)|_0^2 = |u|_0^2. \tag{9}$$

Seja $q_t := G_t(q)$ a órbita de uma diferencial quadrática $q \in Q_\kappa^{(1)}$ pelo fluxo de Teichmüller. Por definição, q_t é determinado pelas equações

$$\eta_T(t) := \Re(q_t^{1/2}) = e^t \Re(q^{1/2}) = e^t \eta_T, \quad \eta_S(t) := \Im(q_t^{1/2}) = e^{-t} \Im(q^{1/2}) = e^{-t} \eta_S \tag{10}$$

Observação 2.4. Um fato *muito importante* no que se segue é que, da equação acima, segue que a forma de área ω_q da métrica R_q é *invariante* pelo fluxo geodésico de Teichmüller.

Sejam $\{S_t, T_t\}$ o referencial ortonormal e $\partial_t^\pm := S_t \pm iT_t$ os operadores de Cauchy-Riemann determinados por q_t. Temos

$$\partial_t^\pm = S_t \pm iT_t = e^{-t} S \pm i e^t T. \tag{11}$$

Sejam $\mathcal{M}_t^\pm := N(\partial_t^\pm) \subset L_q^2(M)$ os subespaços das funções meromorfas, resp. anti-meromorfas de $M_t := M_{q_t}$.

O cociclo de Kontsevich-Zorich G_t^{KZ} ao longo da órbita $q_t = G_t(q)$ do fluxo de Teichmüller é dado pela seguinte fórmula:

Lema 2.5. *A equação diferencial ordinária*

$$u' = U_{q_t}(u) \tag{12}$$

é bem definida em $L_q^2(M)$ e satisfaz as seguintes propriedades:

1. *O problema de Cauchy para (12) é bem-posto (i.e., temos existência para todo tempo e unicidade);*

2. *Se $u_t \in L_q^2(M)$ é solução de (12) com condição inicial $u_0 \in \mathcal{M}_q^+$, então $u_t \in \mathcal{M}_t^+$ para todo $t \in \mathbb{R}$;*

3. *Seja $m_t^+ \in \mathcal{M}_t^+$ a única solução de (12) com condição inicial $m_0^+ = m^+ \in \mathcal{M}_q^+$. Então, para todo $t \in \mathbb{R}$ vale*

$$G_t^{KZ}(c_q^+(m^+)) = c_{q_t}^+(m_t^+). \tag{13}$$

Como a prova deste lema tem apenas haver com EDOs em espaços de Hibert, ela será feita no apêndice.

Voltando ao cociclo de Kontsevich-Zorich, para calcular expoentes de Lyapounov, saber somente o cociclo ao longo de certas órbitas não é suficiente, já que precisamos também entender como a norma de vetores tangentes variam.

Portanto, para provar o teorema A, conhecer a primeira variação da norma de Hodge é importante. Com este intuito, sejam $c \in H^1(M_q, \mathbb{R})$ e $c_t := G_t^{KZ}(c)$, digamos $c_t = [\Re(m_t^+ q_t^{1/2})], m_t^+ \in \mathcal{M}_t^+$. Temos

Lema 2.6. *A norma de Hodge evolui pelo cociclo de Kontsevich-Zorich de acordo com a fórmula*

$$\frac{d}{dt}|m_t^+|_0^2 = -2\Re B_q(m_t^+) := -2\Re \int_M (m_t^+)^2 \omega_q, \tag{14}$$

onde $B_q(m^+) := \int_M (m^+)^2 \omega_q$.

A prova deste lema será dada no apêndice.

Prosseguindo com nossas considerações, o que queremos é dar uma cota superior para o segundo expoente de Lyapounov do cociclo de Kontsevich-Zorich. Para isto, definimos a seguinte função $\Lambda^+ : \mathcal{M}_\kappa^{(1)}/SO(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$\Lambda^+(q) := \max\left\{ \frac{|B_q(m^+)|}{|m^+|_0^2} : m^+ \in \mathcal{M}_q^+ - \{0\}, \int_M m^+ \omega_q = 0 \right\}.$$

Após estas considerações, estamos prontos para provar o teorema A.

2.2 Prova do teorema A

De fato, o que iremos provar é o seguinte:

Corolário 2.7. *Seja μ uma medida G_t-ergódica em $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$. Então vale a seguinte cota para o segundo expoente de Lyapounov de μ:*

$$\lambda_2^\mu \leq \int_{\mathcal{M}_\kappa^{(1)}} \Lambda^+ d\mu < \lambda_1^\mu = 1. \tag{15}$$

Observação 2.8. É claro que a desigualdade (15) implica o teorema A.

Demonstração. Para $q \in \mathcal{M}_\kappa^{(1)}$, definimos os sub-fibrados

- $E_1(q) := \mathbb{R} \cdot [\Im(q^{1/2})]$,
- $E_{-1}(q) := \mathbb{R} \cdot [\Re(q^{1/2})]$,

- $E_0(q) := \{c \in H^1(M_q, \mathbb{R}) : c \wedge [\Re(q^{1/2})] = c \wedge [\Im(q^{1/2})] = 0\}$.

Isto nos dá uma decomposição $H^1_\kappa(M, \mathbb{R}) = E_1 \oplus E_0 \oplus E_{-1}$ de $H^1_\kappa(M, \mathbb{R})$ em três sub-fibrados contínuos e invariantes com relação ao cociclo de Kontsevich-Zorich. Note que E_1 e E_{-1} são 1-dimensionais, donde segue que para toda probabilidade G_t-ergódica μ, vale $\lambda_1^\mu = 1, \lambda_{2g}^\mu = -\lambda_1^\mu = -1$.

Por outro lado, uma classe de cohomologia $c = [\Re(m^+ q^{1/2})] \in E_0(q)$ se e só se $\int_M m^+ \omega_q = 0$, e o fibrado E_0 é invariante pela ação do grupo $SO(2, \mathbb{R})$ sobre $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$. Sejam $c \in E_0(q)$, $q_t := G_t(q)$ e $c_t := G_t^{KZ}(c)$. Em particular, $c_t = [\Re(m_t^+ q_t^{1/2})]$, onde $m_t^+ \in \mathcal{M}_t^+$ tem integral zero.

Logo pelo lema 2.6,

$$\frac{d}{dt} \log |m_t^+|_0 = -\frac{\Re B_q(m_t^+)}{|m_t^+|_0^2} \leq \Lambda^+(q_t).$$

Integrando temos

$$\frac{1}{\tau} \log \frac{|m_\tau^+|_0}{|m^+|_0} \leq \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Lambda^+(q_t) dt. \tag{16}$$

Pelo teorema de Oseledets, como μ é *ergódica*, tomando o limite em (16) quando $\tau \to \infty$, obtemos a primeira desigualdade de (15).

Para obter a segunda desigualdade, provaremos que $\Lambda^+(q) < 1$ para *todo* $q \in \mathcal{M}_\kappa^{(1)}$. De fato, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz vale

$$|B_q(m^+)| = |(m^+, \overline{m^+})_q| \leq |m^+|_0^2, \tag{17}$$

com igualdade se e só se existe $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$ tal que $\overline{m^+} = \lambda m^+$. Porém, neste caso m^+ seria meromorfa e anti-meromorfa ao mesmo tempo, portanto constante. Como m^+ tem integral zero, concluímos que a igualdade em (17) implica $m^+ = 0$. Segue que se $m^+ \neq 0$, a desigualdade (17) é estrita. Como a esfera unitária de $\mathcal{M}_q^+ \subset L_q^2(M)$ é compacta, obtemos $\Lambda^+(q) < 1$.

Isto conclui a demonstração. $\square$

3 Apêndice: EDOs em espaços de Hilbert

Neste apêndice daremos as provas dos lemas 2.5 e 2.6.

Prova do lema 2.5. A EDO (12) está bem-definida porque o espaço $L^2_q(M)$ é invariante ao longo de órbitas do fluxo de Teichmüller. Além disso, a função $F(t,u) := U_{q_t}(u)$ é uniformemente Lipschitz na segunda coordenada pois U_q é isometria. Mais ainda F é suave em $\mathbb{R} \times L^2_q(M)$. De fato, os operadores de Cauchy-Riemann $\partial^{\pm}_t$, densamente definidos em $L^2_q(M)$ com domínio comum $H^1(M)$, dependem suavemente em $t \in \mathbb{R}$ (isto segue da expressão explícita destes operadores em termos do referencial ortonormal $\{S, T\}$). Portanto, a teoria clássica de EDOs em espaços de Banach se aplica, o que nos dá existência e unicidade.

Como toda solução satisfaz $|u'_t|_0 = |u_t|_0$ (U_q é isometria), temos

$$|u_t|_0 \leq |u_0|_0 + \int_0^t |u_s|_0 ds, \tag{18}$$

donde por Gronwall $|u_t|_0$ não vai para infinito em tempo finito. Em particular, soluções locais podem ser estendidas para todo tempo real. Isto prova o item 1 do lema 2.5.

Pelas equações (10) e (11), vale

$$\frac{d}{dt} q_t^{1/2} = \overline{q_t}^{1/2}, \frac{d}{dt}\partial^{\pm} = -\partial^{mp},$$

donde, se u_t é solução da EDO (12), temos

$$\frac{d}{dt}(\partial^+_t u_t) = -\partial^-_t(u_t) + \partial^+_t(u'_t) = 0.$$

Isto prova que o fluxo da EDO (12) preserva funções meromorfas, o que conclui o item 2 do lema 2.5.

Finalmente, sejam $\pi^{\pm}_t : L^2_q(M) \to \mathcal{M}^{\pm}_t \subset L^2_q(M)$ as projeções ortogonais. Se $m^+_t \in \mathcal{M}^+_t$ é solução de (12), existe $v_t \in H^1(M)$ (única a menos de constante aditiva) tal que

$$m^+_t = \partial^+_t v_t + \pi^-_t(m^+_t), \quad \frac{d}{dt} m^+_t = \partial^-_t v_t - \overline{\pi^-_t(m^+_t)}. \tag{19}$$

Se v_t é escolhido com integral zero para todo $t \in \mathbb{R}$, então $t \to v_t \in H^1(M)$ é função suave. Pela equação (19),

$$\frac{d}{dt}\Re(m^+_t q_t^{1/2}) = \Re\big((\frac{d}{dt} m^+_t + \overline{m^+_t}) q_t^{1/2}\big) = 2\Re(dv_t) \equiv 0 \in H^1(M, \mathbb{R}).$$

A definição do cociclo de Kontsevich-Zorich G_t^{KZ} implica que a equação (13) segue. De fato, o cociclo atua como a identidade em classes de cohomologia. Isto prova o item 3 do lema 2.5. $\square$

Prova do lema 2.6. Por (6) e a invariância do produto interno de L_q^2 pelo fluxo de Teichmüller, $\|c_t\| = |m_t^+|_0$. Usando (19) temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|m_t^+|_0^2 &= 2\Re(m_t^+, \frac{d}{dt}m_t^+)_q = -\Re(m_t^+, \overline{\pi_t^-(m_t^+)})_q \qquad (20) \\ &= -2\Re(m_t^+, \overline{m_t^+})_q = -2\Re\int_M (m_t^+)^2\omega_q. \qquad (21) \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração. $\square$

Referências

[F] G. Forni, Deviations of ergodic averages for area-preserving flows on surfaces of higher genus, *Annals of Math.*, 154, 1–103, 2001.

[K] M. Kontsevich, Lyapuonov exponents and Hodge theory, *Adv. Ser. Math. Phys.*, 24, 318–332, 1997.

[V] W. Veech, The Teichmüller geodesic flow, *Annals of Math.*, 124, 441–530, 1986.