A equação de Schrödinger não-linear: o caso crítico

David Diica

22 de janeiro de 2005

Resumo

O objetivo destas notas é fazer uma apresentação resumida de dois preprints (um por Tao e outro por Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka, Tao) sobre a boa colocação *global* da equação de Schrödinger não-linear no *caso crítico*.

1 Introdução

A equação de Schrödinger-não-linear é

$$i\,\partial_t u + \Delta u = \mu |u|^{\alpha-1} u, \tag{1}$$

onde $u : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ está definida em um certo intervalo de tempo e $n \geq 3$.

Nosso objetivo é estudar a questão da boa-colocação (local e global) para o problema de Cauchy associado (especialmente quando o dado inicial tem *pouca regularidade*). Mais precisamente, nos restringiremos a soluções cujas energias

$$E(u) := \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 + \frac{\mu}{\alpha+1}\int |u|^{\alpha+1}$$

são finitas. Como o título destas notas indica, estaremos particularmente interessados no caso em que o expoente α é crítico. Ou seja, considerando o *scaling* natural

$$u_\lambda(t,x) = \frac{1}{\lambda^{\frac{2}{(\alpha-1)}}} u\left(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda}\right) \tag{2}$$

que transforma soluções de (1) em outras soluções, diremos que o caso $\alpha = \frac{n+2}{n-2}$ é crítico pois deixa a energia invariante.

No que se segue, por razões que se tornarão claras mais tarde, distinguiremos dois casos:

- Caso "*defocusing*": $\mu > 0$;
- Caso "*focusing*": $\mu < 0$.

Os teoremas principais que pretendemos estudar são:

Teorema 1.1 (Tao [T]). *No caso* ***defocusing crítico*** *(i.e., $\mu > 0$, $\alpha = \frac{n+2}{n-2}$), para um dado inicial $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$* ***radialmente simétrico****, existe uma única solução $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ de (1) definida para todo tempo $t \in \mathbb{R}$ com $u(0) = u_0$.*

Teorema 1.2 (Colliander, Keel, Stafillani, Takaoka e Tao [CKSTT]). *Em dimensão $n = 3$, no caso* ***defocusing crítico*** *(i.e., $\mu > 0$, $\alpha = 5$), para* ***qualquer*** *dado inicial $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, existe uma única solução $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ de (1) definida para todo tempo $t \in \mathbb{R}$ com $u(0) = u_0$.*

Por motivo de completeza, revisaremos os resultados de boa-colocação da equação de schrödinger não-linear (1) para dados iniciais em $H^1(\mathbb{R}^n)$, evidenciando assim a dificuldade do caso crítico (justificando, em particular, a importância dos teoremas 1.1, 1.2 acima para a teoria da equação (1)).

Para finalizar esta introdução, adotaremos a notação

Observação 1.3. Durante estas notas, sempre que $p \geq 1$ é um expoente, p' denotará o expoente conjugado, i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

2 A equação de Schrödinger: o que se sabe?

A idéia para obter uma solução para a equação (1) será encontrar um ponto fixo para a aplicação:

$$\Phi(u)(t) := e^{it\Delta}u_0 + i\mu \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}|u|^{\alpha-1}u ds. \tag{3}$$

Com este intuito, vamos introduzir a noção de *expoente admissível*:

$$(4) \qquad 2 \leq q, p \leq \infty \quad \text{e} \quad \frac{2}{q} + \frac{n}{p} = \frac{n}{2}$$

A relevância deste conceito está no resultado seguinte, o qual é conhecido como **estimativas de Strichartz**:

$$(5) \qquad \|e^{i(t-t_0)\Delta} u(t_0)\|_{S^k(I\times\mathbb{R}^n)} \leq C\|u(t_0)\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}.$$

e

$$(6) \qquad \|\int_{t_0}^{t} e^{i(t-s)\Delta} F(s)\|_{S^k(I\times\mathbb{R}^n)} \leq C\|F\|_{N^k(I\times\mathbb{R})}$$

Na prova das estimativas de Strichartz acima, um fato importante é a seguinte *estimativa de decaimento*:

$$(7) \qquad \|e^{it\Delta} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C|t|^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p})}\|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)},$$

para $p \in [2, \infty]$.

Após estes preliminares, podemos passar para a próxima seção que trata da revisão dos teoremas (locais e globais) clássicos para a NLS.

2.1 Teoria local $H^1(\mathbb{R}^n)$ para a NLS

Para o primeiro resultado, faremos a seguinte hipótese sobre a não-linearidade:

- $1 < \alpha < \frac{n+2}{n-2}$, se $n \geq 3$;
- $1 < \alpha < \infty$, se $n = 1, 2$.

Teorema 2.1. *Se α satisfaz a hipótese acima, então, dado $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, existe uma única solução u da equação (1) no intervalo $[-T, T]$ com $u \in C_t^0 H_x^1 \cap L_t^r W_x^{1,\rho}$, onde $(r, \rho) = (\frac{n(\alpha+1)}{n+\alpha-1}, \frac{4(\alpha+1)}{(n-2)(\alpha-1)})$ e $T = T(\|u_0\|_{H^1}, \alpha, n, \mu) > 0$. Mais ainda, a aplicação $u_0 \to u(t)$ é localmente Lipschitz.*

No segundo resultado, o caso crítico $\alpha = (n+2)/(n-2)$ é considerado.

Teorema 2.2. *Se $\alpha = (n+2)/(n-2)$ $(n \geq 3)$, então dado $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, existe uma única solução u de (1) com $u \in C_t^0 \cap L_t^r W_x^{1,\rho}$, onde $(r,\rho) = (\frac{2n}{(n-2)}, \frac{2n^2}{(n^2-2n+4)})$ e $T = T(u_0, n, \mu, \alpha) > 0$. Mais ainda, a aplicação $u_0 \to u(t)$ é localmente Lipschitz.*

Para o leitor apreciar a utilidade das estimativas de Strichartz, daremos as demonstrações dos teoremas acima.

Prova do teorema 2.1. Defina

$$B_R(T) = \{v \in C([-T,T], H^1) \cap L^r([-T,T], W^{1,\rho}) : |||v|||_T \leq R\},$$

onde $|||v|||_T := \sup\limits_{t\in[-T,T]} \|v(t)\|_{H^1} + \left(\int_{-T}^{T} (\|v(t)\|_{L^\rho}^r + \|\nabla_x v(t)\|_{L^\rho}^r) dt\right)^{1/r}$.

Claramente o teorema segue da seguinte afirmação:

Afirmação 1. Existem $T = T(\|u_0\|_{H^1}, \alpha, n, \mu) > 0$ e $R > 0$ tais que $\Phi : B_R(T) \to B_R(T)$ é uma contração.

Para provar esta afirmação, lembre-se que por Hölder temos

$$\||u|^{\alpha-1}\nabla u\|_{L^{\rho'}} \leq C\||u|^{\alpha-1}\|_{L^l}\|\nabla u\|_{L^\rho},$$

onde $\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{l} + \frac{1}{\rho}$. Por outro lado, aplicando Sobolev ao termo $\||u|^{\alpha-1}\|_{L^l} = \|u\|_{L^{(\alpha-1)l}}^{\alpha-1}$, concluímos

$$\||u|^{\alpha-1}\nabla u\|_{L^{\rho'}} \leq C\|\nabla u\|_{L^\rho}^{\alpha}, \tag{8}$$

se $\frac{1}{(\alpha-1)l} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{n}$, ou seja, $\frac{1}{l} = \frac{(\alpha-1)}{\rho} - \frac{(\alpha-1)}{n}$.

Colocando juntas as restrições $\frac{1}{l} = \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} = 1 - \frac{2}{\rho}$ e $\frac{1}{l} = \frac{(\alpha-1)}{\rho} - \frac{(\alpha-1)}{n}$, obtemos

$$\frac{\alpha+1}{\rho} = \frac{n+\alpha-1}{n}.$$

Agora, utilizando as estimativas de Strichartz (5) e a desigualdade (8), ganhamos a estimativa

$$\begin{aligned} |||\Phi(u)|||_T &\leq C\|u_0\|_{H^1} + C\left(\int_0^T \|u|u|^{\alpha-1}\|_{W^{1,\rho'}} dt\right)^{1/r'} \\ &\leq C\|u_0\|_{H^1} + C\left(\int_0^T \|u\|_{W^{1,\rho}}^{\alpha r'} dt\right)^{1/r'} \\ &\leq C\|u_0\|_{H^1} + CT^\delta\left(\int_0^T \|u\|_{W^{1,\rho}}^{r} dt\right)^{\alpha/r}, \end{aligned} \tag{9}$$

onde $\delta = 1 - \frac{\alpha+1}{r} = 1 - \frac{(n-2)(\alpha-1)}{4}$. Logo, se escolhermos $R = 2C\|u_0\|_{H^1}$,

$$|||\Phi(u)|||_T \le C\|u_0\|_{H^1} + CT^\delta |||u|||_T^\alpha \le \frac{R}{2} + CT^\delta \frac{R^\alpha}{(2C)^\alpha} \le R,$$

se T é pequeno tal que $\frac{CT^\delta}{(2C)^\alpha} R^{\alpha-1} \le \frac{1}{2}$, i.e.,

$$T \lesssim R^{(1-\alpha)/\delta}.$$

Isto prova que $\Phi : B_R(T) \to B_R(T)$. Repetindo a estimativa (9), pode-se mostrar que Φ é uma contração. Os detalhes ficam a cargo do leitor. $\square$

Note que na demonstração anterior T pode ser escolhido dependendo somente de $\|u_0\|_{H^1}$, em parte devido a $\delta = 1 - \frac{(n-2)(\alpha-1)}{4} > 0$, ou seja, $\alpha < \frac{n+2}{n-2}$ é subcrítico. No caso crítico, tal argumento não funciona; esta dificuldade nos obrigará a escolher T dependendo de u_0, uma sutileza que será determinante na obtenção de resultados globais.

Prova do teorema 2.2. Usando Hölder, segue que

$$(10)\quad \begin{aligned} \left(\int_0^T \|\nabla(|u|^{\alpha-1}u)\|_{\rho'}^{r'}\right)^{1/r'} &\le C\left(\int_0^T \|\nabla u\|_\rho^r\right)^{1/r}\left(\int_0^T \||u|^{\alpha-1}\|_\nu^l\right)^{1/l} \\ &\le C\left(\int_0^T \|\nabla u\|_\rho^r\right)^{1/r}\left(\int_0^T \|u\|_{\nu(\alpha-1)}^{l(\alpha-1)}\right)^{1/l}, \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\nu}$ e $\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{l}$.

Como $\alpha = (n+2)/(n-2)$ e $(r,\rho) = (\frac{2n}{n-2}, \frac{2n^2}{n^2-2n+4})$, temos $l(\alpha-1) = r$ e $\nu(\alpha-1) = \frac{2n^2}{(n-2)^2}$. Portanto, da desigualdade de Gagliardo e Nirenberg,

$$(11)\qquad \|u\|_{\nu(\alpha-1)} \le c\|u\|_{W^{1,\rho}}.$$

Neste ponto da demonstração, faremos uso de um pequeno lema:

Lema 2.3. *Seja (p,q) um par de expoentes satisfazendo a condição de admissibilidade. Dados $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e $T > 0$ tais que se $\|v_0 - u_0\|_{L^2} < \delta$ então*

$$\left(\int_0^T \|e^{it\Delta}v_0\|_{L^p}^q\right)^{1/q} < \varepsilon.$$

Prova do lema 2.3. Primeiramente, lembremos da estimativa de Strichartz:

$$\left(\int_0^T \|e^{it\Delta}f\|_{L^p}^q\right)^{1/q} \leq C\|f\|_2.$$

Tomando $\delta < \varepsilon/2C$, vemos que basta provar

$$\left(\int_0^T \|e^{it\Delta}u_0\|_{L^p}^q\right)^{1/q} < \varepsilon/2.$$

Fixemos w_0 uma função na classe de Schwarz tal que $\|u_0 - w_0\|_{L^2} < \varepsilon/4C$. Usando novamente a estimativa de Strichartz acima, Sobolev e o fato de que $e^{it\Delta}$ é grupo unitário em H^s, temos

$$\begin{aligned}\left(\int_0^T \|e^{it\Delta}u_0\|_{L^p}^q\right)^{1/q} &\leq \left(\int_0^T \|e^{it\Delta}(u_0 - w_0)\|_{L^p}^q\right)^{1/q} + \left(\int_0^T \|e^{it\Delta}w_0\|_{L^p}^q\right)^{1/q} \\ &\leq C\|u_0 - w_0\|_{L^2} + CT^{1/q}\|w_0\|_{H^s}.\end{aligned}$$

Logo, se T é escolhido tal que $CT^{1/q}\|w_0\|_{H^s} < \varepsilon/4$, concluímos a prova do lema. $\square$

Voltando para a prova do teorema 2.2, se colocarmos juntas as estimativas (10), (11), lema 2.3 e as estimativas de Strichartz (5), vê-se que, fixado $\varepsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que

$$\left(\int_0^T \|\Phi(u)(t)\|_{W^{1,\rho}}^r dt\right)^{1/r}$$

pode ser estimado por

$$\begin{aligned}C\left(\int_0^T \|\Phi(u)(t)\|_{L^\rho}^r dt\right)^{1/r} + \left(\int_0^T \|\nabla\Phi(u)(t)\|_{L^\rho}^r dt\right)^{1/r} &\leq \\ C\varepsilon + C|\mu|\left(\left(\int_0^T \|u\|_{L^\rho}^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\int_0^T \|\nabla u\|_{L^\rho}^r\right)^{\frac{1}{r}}\right)\cdot\left(\int_0^T \|u\|_{W^{1,\rho}}^r\right)^{\frac{(\alpha-1)}{r}} &\leq \\ C\varepsilon + C|\mu|\left(\int_0^T \|u\|_{W^{1,\rho}}^r\right)^{\frac{\alpha}{r}}.&\end{aligned}$$

Ou seja, vale

$$(12)\qquad \left(\int_0^T \|\Phi(u)(t)\|_{W^{1,\rho}}^r dt\right)^{1/r} \leq C\varepsilon + C|\mu| \left(\int_0^T \|u\|_{W^{1,\rho}}^r\right)^{\frac{\alpha}{r}}.$$

Por outro lado, note que

$$(13)\qquad \sup_{[0,T]} \|\Phi(u)(t) - e^{it\Delta}u_0\|_{H^1} \leq C|\mu| \left(\int_0^T \|u\|_{W^{1,\rho}}^r\right)^{\frac{\alpha}{r}}.$$

Em particular, se definirmos, para todo $u \in C([0,T], H^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^r W^{1,\rho}$ a norma

$$|||u|||_T := \sup_{[0,T]} \|\Phi(u)(t) - e^{it\Delta}u_0\|_{H^1} + \left(\int_0^T \|u\|_{W^{1,\rho}}^r\right)^{\frac{1}{r}},$$

tem-se que (12) e (13) nos fornecem

$$(14)\qquad |||\Phi(u)(t)|||_T \leq C\varepsilon + C|\mu|R^\alpha,$$

se u satisfaz $|||u|||_T \leq R$.

Finalmente, uma vez provada a estimativa (14), basta seguir os argumentos usados na prova do teorema 2.1 para obter o resultado desejado. □

Corolário 2.4. *Existe $\varepsilon_0 > 0$ (dependendo só de n e μ) tal que se $u_0 \in H^1$ com $\|u_0\|_{H^1} \leq \varepsilon_0$, então a conclusão do teorema 2.2 se estende para todo intervalo $[0,T]$. Em outras palavras, se a norma H^1 do dado inicial é* pequena*, a equação de Schrödinger não-linear com expoente crítico é* globalmente bem posto.

Demonstração. Isto segue do fato de que, no caso da norma H^1 de u_0 ser pequena, a estimativa (14) com $\varepsilon = \|u_0\|_{H^1}$ e $R = 2\|u_0\|_{H^1}$ diz que Φ é uma contração da bola $\{|||u|||_T \leq R\}$. □

2.2 Teoria global $H^1(\mathbb{R}^n)$ para a NLS

Primeiramente, note que a equação de Schrödinger não-linear tem duas leis de conservação. Mais precisamente, tem-se:

$$(15)\qquad \|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2},$$

e

$$E(u(t)) = E(u_0), \tag{16}$$

onde

$$E(u) := \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 + \frac{\mu}{\alpha+1}\int |u|^{\alpha+1}. \tag{17}$$

Para justificar estas leis de conservação, procedemos assim: aproximando por funções em H^2 e usando a dependência contínua, podemos supor $u_0 \in H^2$. Neste caso, multiplicando a equação de Schrödinger (1) por $\bar{u}$, integrando o resultado e tomando a parte imaginária, obtemos (15); e multiplicando (1) por $-\partial_t \bar{u}$, integrando por partes e tomando a parte real, obtemos (16).

A partir destas leis de conservação, podemos concluir resultados globais de boa-colocação no **caso subcrítico**.

Teorema 2.5 (Boa colocação global no caso defocusing). *A equação de Schrödinger não-linear (1) subcrítica (i.e., $\alpha < (n+2)/(n-2)$) com dado inicial $u_0 \in H^1$ é globalmente bem posto no caso defocusing $\mu > 0$.*

Teorema 2.6 (Boa colocação global no caso focusing). *A equação de Schrödinger não-linear (1) subcrítica (i.e., $\alpha < (n+2)/(n-2)$) com dado inicial $u_0 \in H^1$ é globalmente bem posto no caso focusing $\mu < 0$ sob uma das seguintes hipóteses:*

- $\alpha < 1 + \frac{4}{n}$;
- $\alpha = 1 + \frac{4}{n}$ *e* $\|u_0\|_{L^2} \leq c_0$ *para uma certa constante* c_0;
- $1 + \frac{4}{n} < \alpha$ *e* $\|u_0\|_{H^1} \leq \rho$ *para algum* $\rho > 0$ *pequeno.*

Observe que os teoremas globais acima são bastante distintos dependendo se estamos no caso defocusing (resp., focusing). Isto se deve a presença do termo $\frac{\mu}{\alpha+1}\int |u|^{\alpha+1}$, o qual pode ajudar (resp., atrapalhar) a estimativa da norma H^1 pela energia. Para ilustrar este princípio, vamos demonstrar o teorema 2.5 e fazer alguns comentários sobre o teorema 2.6:

Prova do teorema 2.5. Como $\mu > 0$, vale $\int |\nabla u(t)|^2 \leq E(u(t)) = E(u_0)$. Como $\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$, tem-se que

$$\|u(t)\|_{H^1}^2 \leq E(u_0) + \|u_0\|_{L^2}^2. \tag{18}$$

Porém, o teorema 2.1 de boa-colocação local nos diz que, no caso subcrítico, o tempo de existência da solução T depende somente de $\|u\|_{H^1}$, i.e., $T = T(\|u\|_{H^1})$. Em particular, isto implica que, utilizando a estimativa (18) acima, podemos estender a solução para qualquer intervalo de tempo. $\square$

"Prova" do teorema 2.6. No caso focusing, o argumento acima não vale e um refinamento do raciocínio (baseado em Gagliardo-Nirenberg) é necessário. Por isso, adiaremos a prova deste resultado para o apêndice. $\square$

Observação 2.7. Os resultados globais acima são ótimos: de fato, pode-se provar que no caso das hipóteses do teorema 2.6 não se verificarem, existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e $T^* < \infty$ tais que $\lim\limits_{t \to T^*} \|\nabla u(t)\|_{L^2} = \infty$. Veja [LP].

Os teoremas desta subseção fornecem o cenário completo de boa colocação global para a equação de Schrödinger não-linear no caso subcrítico. Isto motiva a seguinte questão:

Questão 1. Vale a boa colocação global para a equação (1) no caso crítico?

Note que o corolário 2.4 dá uma resposta num caso particular: sim, se a norma H^1 do dado inicial é pequena. Mas, como no caso crítico o tempo T de existência da solução local depende do dado inicial (e não somente de sua norma H^1), teremos de buscar por novas estimativas, o que será o tema da próxima seção.

Porém, antes de passarmos ao tópico seguinte, notemos que:

Observação 2.8. No caso *focusing*, existem dados iniciais $u_0 \in H^1$ para os quais a solução da NLS crítica "explode" em tempo finito (veja a observação 2.7). Portanto, as questões de boa colocação global só são pertinentes no caso *defocusing*.

Ou seja, **por esta razão, daqui em diante iremos apenas considerar a NLS crítica defocusing**:

$$i\,\partial_t u + \Delta u = |u|^{\frac{4}{n-2}} u. \tag{19}$$

3 Algumas idéias para o caso crítico

Antes de começar a discutir os argumento envolvidos no tratamento da NLS crítica, vamos fazer certas estimativas preliminares:

Afirmação 2. O problema de boa colocação global para a NLS (1) crítica (i.e., $\alpha = \frac{n+2}{n-2}$) se reduz a provar a seguinte estimativa *a priori* da norma $L^{2(n+2)/(n-2)}_{t,x}$

$$\|u\|_{L^{\frac{2(n+2)}{(n-2)}}_{t,x}} \leq C(E(u)).$$

Prova da afirmação 2. Seja u uma solução da NLS (1) crítica definida num certo intervalo de tempo $I = [0, T]$, ou seja,

$$u(t) = e^{it\Delta}u_0 + i\mu \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}|u|^{\alpha-1}uds. \tag{20}$$

Da definição segue que

$$\|u(t)\|_{H^1} \leq \|u_0\|_{H^1} + \|\int_0^t e^{-is\Delta}D_x(u|u|^{\alpha-1})ds\|_{L^2}. \tag{21}$$

Por outro lado, por dualidade, para toda $f \in L^2$, existe $g \in L^2$, $\|g\|_{L^2} \leq 1$ tal que $\|f\|_{L^2} = \int fg$. Em particular, podemos escrever

$$\|\int_0^t e^{-is\Delta}D_x(u|u|^{\alpha-1})ds\|_{L^2} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{is\Delta}\psi \cdot D_x(u|u|^{\alpha-1})\ dx\ ds,$$

onde $\|\psi\|_{L^2} \leq 1$. Daí segue que

$$\|\int_0^t e^{-is\Delta}D_x(u|u|^{\alpha-1})ds\|_{L^2} \leq \|e^{is\Delta}\psi\|_{L^p_{x,t}}\|D_x(u|u|^{\alpha-1})\|_{L^{p'}_{x,t}}.$$

O termo $\|e^{is\Delta}\psi\|_{L^p_{x,t}}$ acima pode ser controlado usando a estimativa de Strichartz (5) com expoente $(p, q) = (p, p)$, i.e., $p = \frac{2(n+2)}{n}$, donde

$$\|\int_0^t e^{-is\Delta}D_x(u|u|^{\alpha-1})ds\|_{L^2} \leq C\|D_x(u|u|^{\alpha-1})\|_{L^{2(n+2)/(n+4)}_{x,t}}.$$

Aplicando Hölder na estimativa acima concluímos

$$\|\int_0^t e^{-is\Delta}D_x(u|u|^{\alpha-1})ds\|_{L^2} \leq C\|D_xu\|_{L^{2(n+2)/n}_{x,t}}\|u\|^{\alpha-1}_{L^{2(n+2)/(n-2)}_{x,t}}. \tag{22}$$

Agora, como u satisfaz (20), da estimativa de decaimento (7)

$$\|D_xu(t)\|_{L^{\frac{2(n+2)}{n}}} \leq \|e^{it\Delta}(D_xu_0)\|_{L^{\frac{2(n+2)}{n}}} + C\int_0^t |t-s|^{-\frac{n}{(n+2)}}\|D_x(u|u|^{\alpha-1})(s)\|_{L^{\frac{2(n+2)}{(n+4)}}}ds.$$

O termo $e^{it\Delta}(D_x u_0)$ pode ser controlado pela estimativa de Strichartz (5) (com expoente (p_0, p_0), $p_0 = 2(n+2)/n$)

$$\|e^{it\Delta}(D_x u_0)\|_{L^{2(n+2)/n}} \leq C\|u_0\|_{H^1},$$

o que implica

$$\|D_x u(t)\|_{L^{\frac{2(n+2)}{n}}} \leq C\|u_0\|_{H^1} + C\int_0^t |t-s|^{-\frac{n}{(n+2)}} \|D_x(u|u|^{\alpha-1})(s)\|_{L^{\frac{2(n+2)}{(n+4)}}} ds.$$

Entretanto, por Hölder

$$\|D_x(u|u|^{\alpha-1})(s)\|_{L^{2(n+2)/(n+4)}} \leq C\|D_x u(s)\|_{L^{2(n+2)/n}} \|u(s)\|^{\alpha-1}_{L^{2(n+2)/(n-2)}},$$

donde, pela desigualdade de Young

$$\left\| \int_0^t |t-s|^{-\frac{n}{(n+2)}} \|D_x u(s)\|_{L^{2(n+2)/n}} \|u(s)\|^{\alpha-1}_{L^{2(n+2)/(n-2)}} ds \right\|_{L_{t\in I}^{\frac{2(n+2)}{n}}} \leq$$

$$C \left\| \|D_x u\|_{L_x^{\frac{2(n+2)}{n}}} \|u\|^{\alpha-1}_{L_x^{2(n+2)/(n-2)}} \right\|_{L_{t\in I}^{\frac{2(n+2)}{n}}} \leq C\|D_x u\|_{L_{x,t}^{\frac{2(n+2)}{n}}} \|u\|^{\alpha-1}_{L_{x,t}^{2(n+2)/(n-2)}}.$$

Logo,

$$\|D_x u\|_{L_{x,t}^{\frac{2(n+2)}{n}}} \leq C\|u_0\|_{H^1} + C\|u\|^{\alpha-1}_{L_{x,t}^{2(n+2)/(n-2)}} \|D_x u\|_{L_{x,t}^{\frac{2(n+2)}{n}}}. \tag{23}$$

Neste ponto, deixamos para o leitor verificar que as estimativas (21), (22), (23) e a hipótese

$$\|u\|_{L_{t,x}^{\frac{2(n+2)}{(n-2)}}} \leq C(E(u)),$$

são suficientes para finalizar a prova. □

O objetivo a partir de agora será obter um bom controle da solução de modo a concluir

$$\|u\|_{L_{t,x}^{\frac{2(n+2)}{(n-2)}}} \leq C(E(u)).$$

No caso *defocusing*, uma maneira de obter um controle razoável é considerar $\int_{\mathbb{R}^n} Im(\bar{u}\frac{x}{|x|} \cdot \nabla u)dx$, diferenciar no tempo e integrar por partes, obtendo assim a *desigualdade de Morawetz*:

$$\int_I \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(t,x)|^{2n/(n-2)}}{|x|}\, dx\; dt \leq C \cdot (\sup_{t \in I} \|u(t)\|_{H^{1/2}})^2$$

Entretanto, no caso crítico, esta desigualdade não é útil porque o lado direito envolve a norma $H^{1/2}$ ao invés da norma H^1; mais precisamente, se utilizarmos o *scaling* (2), vemos que o lado direito cresce com λ.

Para contornar esta dificuldade, introduzimos a seguinte *variante da desigualdade de Morawetz*:

$$\int_I \int_{|x| \leq A|I|^{1/2}} \frac{|u(t,x)|^{2n/(n-2)}}{|x|}\, dx\; dt \leq C \cdot A \cdot |I|^{1/2} \cdot E(u) \tag{24}$$

(Veja o apêndice para uma prova desta desigualdade.)

Para apreciar a eficiência desta desigualdade, vamos estudar um pouco das idéias (essencialmente devidas a Bourgain) usadas no caso de dado inicial *radialmente simétrico*: escolhemos um paramêtro pequeno $\eta > 0$ e dividimos o intervalo I de existência da solução em um número finito de subintervalos $I_1, \ldots, I_J$ tais que a norma $L_{t,x}^{\frac{2(n+2)}{(n-2)}}$ em cada deles é comparável a η. O ponto é limitar o número J de intervalos por $C(E(u))$.

Por um argumento combinatório de Bourgain diz que para cada intervalo I_j temos uma "bolha" de concentração, i.e., uma região no espaço-tempo da forma $\{(t,x) : |t - t_j| \leq c(\eta) N_j^{-2},\ |x - x_j| \leq c(\eta) N_j^{-1}\}$ dentro de $I_j \times \mathbb{R}^n$ na qual a solução tem energia $\geq c(\eta)$. No caso de simetria radial, podemos assumir $x_j = 0$. Além disso, o fato da bolha estar contida em $I_j \times \mathbb{R}^n$ implica na cota inferior $N_j \geq c(\eta)|I_j|^{1/2}$. Entretanto, precisamos de uma cota superior de modo que a bolha seja comparável com $I_j \times \mathbb{R}^n$.

Seguindo a simplificação de Tao, obtemos cota superior para N_j diretamente (ao invés de usar a indução na energia de Bourgain) comparando a solução u com as soluções lineares $u_\pm(t) := e^{i(t-t_\pm)\Delta} u(t_\pm)$, se $I = [t_-, t_+]$. Primeiro elimina-se os intervalos I_j na qual a norma $L_{t,x}^{\frac{2(n+2)}{(n-2)}}$ das soluções lineares $u_\pm$ é grande (a quantidade destes intervalos é controlada pelas estimativas de Strichartz). Se I_j é um dos intervalos restantes e a bolha ocorre na metade inferior de I_j, comparamos u com u_+ para mostrar que o erro $u - u_-$ é pequeno, donde a bolha não pode ser muito pequena.

Finalmente, como as bolhas não são muito pequenas, se J fosse grande, poderíamos usar a Morawetz (24) para concluir que os intervalos I_j se concentram muito rápido em algum ponto t_*, o que é um absurdo com as leis de conservação da massa local (veja a estimativa (25) abaixo).

Por outro lado o fato da Morawetz (24) ser localizada na origem (devido ao termo $1/|x|$) impõe sérias dificuldades ao caso geral. Em particular, as idéias envolvidas no caso crítico só serão discutidas na seção 5.

Para encerrar esta seção, enunciaremos a lei de quase-conservação da massa local, adiando sua prova para o apêndice.

Definição 3.1.

$$\mathrm{Massa}(u(t), B(x_0, R)) := \left(\int \chi^2 (\frac{x - x_0}{R}) |u(t,x)|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

onde χ é uma função bump suportada na bola B(0,1) tal que $\chi \equiv 1$ na bola $B(0, 1/2)$ e χ é monótona não-crescente na direção radial.

A massa local satisfaz a seguinte lei de quase-conservação (cuja demonstração se encontra no apêndice):

$$|\partial_t \mathrm{Massa}(u(t), B(x_0, R))| \leq \frac{CE^{1/2}}{R}. \tag{25}$$

Por Sobolev e Hölder, a lei de quase-conservação da massa implica

$$|\mathrm{Massa}(u(t), B(x_0, R))| \leq CE^{1/2} R \tag{26}$$

4 A NLS crítica I: o caso de simetria radial

Pelo corolário 2.4, se a energia da solução é pequena vale a boa colocação global. Por isso, podemos supor que

- Fixamos $E > c > 0$, $I = [t_-, t_+]$, u solução de (19) em I com energia $c \leq E(u) \leq E$.

  Em particular, segue que

  $$\|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|u(t)\|_{L^{\frac{2n}{(n-2)}}(\mathbb{R}^n)} \leq CE^C, \tag{27}$$

  para todo $t \in [t_-, t_+]$.

  $1 \ll C_0 \ll C_1 \ll C_2$ são constantes que só dependem de n.

  Definimos $\eta := C_2^{-1} E^{-C_2}$.

  Podemos assumir $\int_{t_-}^{t_+} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^{\frac{2(n+2)}{(n-2)}} \, dx \, dt > 4\eta$.

- Seja $u_\pm(t) := e^{i(t-t_\pm)\Delta}u(t_\pm)$ a solução da equação de Schrödinger linear (com dado inicial $u(t_\pm)$).

  Definição 4.1. Um intervalo $I \subset [t_-, t_+]$ é dito *excepcional* se

  $$\int_I \int_{\mathbb{R}^n} |u_\pm|^{\frac{2(n+2)}{n-2}} > \eta^{C_1},$$

  para alguma escolha de sinal + ou -.

  Observação 4.2. Por (27) e as desigualdades de Strichartz temos:

  $$\int_{t_-}^{t_+} \int_{\mathbb{R}^n} |u_\pm|^{\frac{2(n+2)}{n-2}} \leq CE^C.$$

  Logo, pela definição acima, vemos que

  Existem, no máximo, $O(\frac{E^C}{\eta^{C_1}})$ *intervalos excepcionais.*

  Proposição 4.3. *Seja* I_j *um intervalo não-excepcional. Então existe* $x_j \in \mathbb{R}^n$ *tal que*

  $$Massa\big(u(t), B(x_j, C\eta^{-C}|I_j|^{1/2})\big) \geq c\eta^{CC_0}|I_j|^{1/2}, \ \forall\ t \in I_j.$$

4.1 Esquema da prova do teorema 1.1

- Fixe $I_1, \ldots, I_J$ uma partição de $[t_-, t_+]$ em $J \geq 2$ subintervalos tais que

  $$\eta \leq \int_{I_j} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{2(n+2)}{n-2}} \leq 2\eta, \tag{28}$$

  para todo $1 \leq j \leq J$.

- Note que o teorema 1.1 se reduz a provar que

  Afirmação 3. $J \leq C\exp(CE^C)$.

- A prova da afirmação 3 será baseada no seguinte argumento combinatório devido a Bourgain [B]:

  Proposição 4.4. *Existem* $t_* \in [t_-, t_+]$ *e intervalos não-excepcionais distintos* $I_{j_1}, \ldots, I_{j_K}$ *(com* $K > c\ \eta^{C(C_0,C_1)}\log J$*) tais que*

  $$|I_{j_1}| \geq 2|I_{j_2}| \geq \cdots \geq 2^{K-1}|I_{j_K}| \tag{29}$$

  e

  $$d(t_*, I_{j_k}) \leq C\eta^{-C(C_0,C_1)}|I_{j_k}|, \forall\ 1 \leq k \leq K.$$

Demonstração. Veja a subseção 4.2 abaixo. $\square$

- Sejam t_* e $I_{j_1}, \dots, I_{j_K}$ como acima. Da proposição 4.3 vemos que

$$\text{Massa}\left(u(t), B(x_{j_k}, C\eta^{-C}|I_{j_k}|^{1/2})\right) \geq c\eta^{CC_0}|I_{j_k}|^{1/2}, \ \forall \ t \in I_{j_k}.$$

Utilizando (25), obtemos que

$$\text{Massa}(u(t_*), B_k) \geq c\eta^{C(C_0,C_1)}|I_{j_k}|^{1/2},$$

onde $B_k := B(x_{j_k}, C\eta^{-C}|I_{j_k}|^{1/2})$.

Por outro lado, (26) diz que

$$\text{Massa}(u(t_*), B_k) \leq C\eta^{-C(C_0,C_1)}|I_{j_k}|^{1/2}.$$

Seja $N := C_2 \log(\frac{1}{\eta})$. Tomando C_2 grande, as duas cotas para a massa acima e (29) implicam

$$\sum_{k+N \leq k' \leq K} \int_{B_{k'}} |u(t_*, x)|^2 \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{B_k} |u(t_*, x)|^2 \, dx \ \Rightarrow$$

$$\int_{B_k \setminus \bigcup\limits_{k+N \leq k' \leq K} B_{k'}} |u(t_*, x)|^2 \geq c\eta^{C(C_0,C_1)}|I_{j_k}|.$$

Pela desiguadade de Hölder concluímos

$$\int_{B_k \setminus \bigcup\limits_{k+N \leq k' \leq K} B_{k'}} |u(t_*, x)|^{2n/(n-2)} \geq c\eta^{C(C_0,C_1)}.$$

- Somando em k e levando em conta os cancelamentos telescópicos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t_*, x)|^{\frac{2n}{(n-2)}} \geq c\eta^{C(C_0,C_1)}\frac{K}{N}.$$

Por (27), temos

$$K \leq C \cdot \eta^{-C(C_0,C_1)} \cdot N \cdot E^C \leq C(C_0, C_1)\eta^{-C(C_0,C_1)}$$

- Como $K > c\eta^{C(C_0,C_1)} \log J$ (cf. prop. 4.4), temos

$$J \leq \exp(C\eta^{-C(C_0,C_1)}K) \leq \exp(C(C_0, C_1, C_2)E^{C(C_0,C_1,C_2)}),$$

o que finaliza a prova.

4.2 O argumento combinatório de Bourgain

O nosso objetivo agora é provar a proposição 4.4. A idéia será utilizar um argumento combinatório devido a Bourgain, o qual depende *apenas* do seguinte controle da distribuição dos intervalos I_j:

Lema 4.5. *Seja* $I = \bigcup_{j_1 \le j \le j_2} I_j$ *uma união consecutiva de intervalos. Então,* $\exists\, j_1 \le j \le j_2$ *tal que*

$$|I_j| \ge c\eta^{C(C_0,C_1)}|I|.$$

Demonstração. Apesar de não ser difícil, como a prova deste lema será o *único* lugar onde a hipótese de simetria radial entrará, iremos adiá-la para a subseção 4.3 abaixo. □

A partir deste lema, podemos terminar a:

Prova da proposição 4.4. Pela observação 4.2, temos que existem no máximo $O(\eta^{-C_1})$ intervalos excepcionais. Em particular, removendo-os de $[t_-, t_+]$, restam $O(\eta^{-C_1})$ componentes conexas. Uma das componentes conexas $I^{(1)}$ acima deverá ser a união de $J_1 \ge c\eta^{C_1} J$ intervalos não-excepcionais consecutivos. Do corolário 4.5, existe um intervalo $I_{j_1} \subset I^{(1)}$ tal que $|I_{j_1}| \ge c\eta^{CC_0}|I^{(1)}|$; em particular, $d(t, I_{j_1}) \le C\eta^{-CC_0}|I^{(1)}|$, para todo $t \in I^{(1)}$.

Agora removemos de $I^{(1)}$ os intervalos I_j com $|I_j| > \frac{|I_{j_1}|}{2}$. Observe que agora removemos no máximo $C\eta^{-CC_0}$ intervalos (pois $|I_{j_1}|$ é "grande"). Se $J_1 \le C\eta^{-CC_0}$, tomamos $K = 1$. Caso contrário, restam $O(\eta^{-CC_0})$ componentes conexas de $I^{(1)}$, as quais contém pelo menos $c\eta^{CC_0} J$ intervalos. Logo, existe uma componente conexa $I^{(2)}$ que é a união de $J_2 \ge c\eta^{CC_0} J_1$ intervalos (cujos comprimentos são $\le |I_{j_1}|/2$, por construção). Novamente, do corolário 4.5 conclui-se que existe intervalo $I_{j_2} \subset I^{(2)}$ tal que $|I_{j_2}| \ge c\eta^{CC_0}|I^{(2)}|$.

Iterando o algoritmo acima, removemos de $I^{(2)}$ os intervalos I_j com $|I_j| > \frac{|I_{j_2}|}{2}$. Se $J_2 = O(\eta^{-CC_0})$, tomamos $K = 2$. Caso contrário, repetimos o algoritmo acima K vezes até os intervalos acabarem. A proposição segue de escolher qualquer $t_* \in I^{(K)}$ e notar que o algoritmo é repetido $K > c\eta^{C(C_0,C_1)} \log J$ vezes. □

Observação 4.6. Note que na prova acima, usamos a existência de intervalos não-excepcionais. De fato, podemos supor isso já que, caso contrário, pela observação 4.2, teríamos automaticamente que a afirmação 3 (e, *a fortiori*, o teorema 1.1) é verdadeira.

4.3 Prova do lema 4.5

Antes de tudo, vamos usar (pela *primeira e última* vez) a simetria radial para obter a seguinte consequência da proposição 4.3:

Corolário 4.7. *I_j não-excepcional $\Rightarrow$*

$$\textit{Massa}\left(u(t), B(0, C\eta^{-C}|I_j|^{1/2})\right) \geq c\eta^{CC_0}|I_j|^{1/2}, \ \forall \ t \in I_j.$$

Lembre-se que a proposição 4.3 diz que a massa da solução u (durante o intervalo de tempo I_j) deve se concentrar em torno de algum ponto x_j. Moralmente, o corolário acima diz que podemos assumir que o local de concentração é a origem.

Prova do corolário 4.7. Utilizando (2), podemos supor $I_j = [0,1]$. Considere x_j como na proposição 4.3 e fixe $t \in [0,1]$. Temos duas possibilidades:

- 1. $|x_j| = O(\eta^{-C'C_0})$, $C' = C'(n)$: O resultado é imediato.
- 2. $|x_j| \geq \eta^{-C'C_0}$: Se C' é grande, podemos achar $\eta^{-cC'}$ rotações da bola $B(x_j, C\eta^{-CC_0})$ com imagens disjuntas. Pela **simetria radial** de u, a massa de $u(t)$ em cada uma dessas bolas é, pelo menos, $c\eta^{CC_0}$. Por Hölder, vemos que isto implica que a $L^{2n/(n-2)}$ norma de $u(t)$, em cada uma das bolas, é pelo menos $c\eta^{CC_0}$. Somando as estimativas acima sobre todas as $\eta^{-cC'C_0}$ bolas, chegamos a uma contradição com (27), se $C'C_0$ é grande.

Portanto, já que a segunda possibilidade não ocorre, obtemos o corolário. ☐

A vantagem de colocar o ponto de concentração na origem consiste em que esta informação pode ser combinada com a variante da desigualdade de Morawetz (24) para nos dar:

Corolário 4.8. $\forall \ I \subset [t_-, t_+]$,

$$\sum_{I_j \subset I} |I_j|^{1/2} \leq C\eta^{-C(C_0, C_1)}|I|^{1/2}.$$

Demonstração. Do corolário 4.7 e Hölder, segue

$$\int_{|x| \leq R} \frac{|u(t,x)|^{2n/(n-2)}}{|x|} \geq c\eta^{CC_0}|I_j|^{-1/2},$$

$\forall\ t \in I_j,\ R \geq C\eta^{-C\ C_0}|I_j|^{1/2}$. Em particular,

$$\int_{I_j}\int_{|x|\leq R}\frac{|u(t,x)|^{2n/(n-2)}}{|x|}\geq c\eta^{CC_0}|I_j|^{1/2}.$$

O resultado segue de combinar esta desigualdade combinada com a variante de Morawetz (24) e a finitude da energia. $\square$

Finalmente, o corolário 4.8 nos deixa aptos para concluir a

Prova do lema 4.5. Pelo corolário 4.8,

$$C\eta^{-C(C_0,C_1)}|I|^{1/2}\geq\sum_{j=j_1}^{j_2}|I_j|^{1/2}\geq(\sup_j|I_j|)^{-1/2}\sum_{j=j_1}^{j_2}|I_j|.$$

Como $|I|=\sum\limits_{j=j_1}^{j_2}|I_j|$, acabamos. $\square$

4.4 Dois comentários sobre a prova do teorema 1.1

- Na demonstração acima, a hipótese de simetria radial só foi utilizada para concluir o corolário 4.8; em outras palavras, uma vez que saibamos *a priori* que o corolário 4.8 é verdadeiro, então temos o resultado do teorema 1.1 para *qualquer* dado inicial (não importando se este é radialmente simétrico).

- O corolário 4.8 para dados iniciais com simetria radial seguiu da combinação de dois fatos: simetria radial $\Rightarrow$ concentração na origem, o que gera um absurdo pois a natureza localizada na origem da Morawetz impede tal fenômeno; em outras palavras, a simetria radial só é necessária porque a Morawetz é localizada na origem (e não fornece informação útil em outros pontos).

5 A NLS crítica II: o caso geral (em 3D)

O leitor atento ao tratamento dado ao caso radial percebeu que o ponto fraco da variante da Morawetz (24) é fornecer informação apenas na origem. Com efeito, se quissémos proibir a existência de soluções pseudo-sólitons u que se movem com velocidade fixa v, ou seja, $|u(t,x)| \sim 1$ para $|x - vt| \lesssim 1$, então o lado esquerdo cresce como $\log |I|$ enquanto o lado direito cresece como $|I|^{1/2}$, o que não gera nenhuma contradição.

Uma tentativa de contornar este problema seria através da *estimativa de iteração de Morawetz*:

$$\int_I \int_{\mathbb{R}^3} |u(t,x)|^4 dxdt \lesssim \|u_0\|_{L^2}^2 (\sup_{t \in I} \|u(t)\|_{H^{1/2}})^2. \tag{30}$$

A desigualdade acima foi obtida por Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka, Tao no contexto da equação de Schrödinger não-linear cúbica, mas a presença da norma $H^{1/2}$ torna (novamente) a estimativa não muito útil para o caso crítico.

Para piorar a situação, mesmo que procurássemos localizar a desigualdade acima para achar uma estimativa invariante pelo scaling (2) e controlada pela energia (17) como, por exemplo,

$$\int_I \int_{|x| \lesssim |I|^{1/2}} |u(t,x)|^4 dxdt \lesssim E(u)^2 |I|^{3/2}$$

a qual, apesar de verdadeira (por Sobolev e Hölder), não daria muita informação nova. De fato, suponha que desejamos evitar comportamento do tipo sóliton, i.e., $|u(t,x)| \sim 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $|x| \lesssim 1$. Neste caso, vemos que, na estimativa acima, o lado esquerdo cresce como $|I|$ e o lado direito cresce como $|I|^{3/2}$, o que não fornece um absurdo.

A idéia geral para provar o teorema 1.2 consiste em três passos:

Primeiro, supondo que o teorema seja falso, existe uma *energia crítica* E_{crit} tal que a norma $L^{10}_{t,x}$ explode para alguma solução u, a qual chamaremos *solução com energia mínima de blowup*. Então, prova-se (sem usar Morawetz) que tais soluções com energia mínima de blowup são localizadas no espaço e na frequência em qualquer tempo.

Segundo, mostra-se que a solução (com energia mínima de blowup) satisfaz a *desigualdade de Morawetz localizada na frequência* da proposição 5.12 abaixo. De modo resumido, esta desigualdade é a versão localizada *na frequência* (ao invés do espaço) da estimativa de iteração de Morawetz (30), a qual afirma que, após removermos uma porção de baixa frequência e energia pequena, o restante obedece boas estimativas $L^4_{t,x}$. Um ponto curioso (e que torna a prova da Morawetz frequência-localizada bastante técnica) é o fato dela não ser uma estimativa *a priori*, mas apenas uma estimativa para as soluções com energia mínima de blowup.

Terceiro, usando Sobolev, tenta-se obter $L^{10}_{t,x}$-controle a partir do $L^4_{t,x}$-controle, contradizendo a existência de soluções cm energia mínima de blowup. Porém, ainda há um inimigo: caso a solução transfira energia de baixas para altas frequências, a norma $L^{10}_{t,x}$ poderia crescer enquanto a norma $L^4_{t,x}$ fica limitada. Evita-se este fenômeno através de uma estimativa da L^2-massa localizada na frequência (o que nos dá informação em intervalos de tempo grandes, ao contrário das leis de conservação localizadas no espaço); combinando esta estimativa com o $L^4_{t,x}$-controle e as estimativas de Strichartz, podemos controlar o movimento de massa de frequências baixas para altas.

5.1 Esquema da prova do teorema 1.2

Esta seção é completamente baseada na seção 4 do artigo [CKSTT] (em particular, a interseção será grande).

Definição 5.1. Definimos

- para $k = 0$, $\|u\|_{S^0(I\times\mathbb{R}^n)} := \sup\limits_{(q,r)\ \text{admissível}} \|u\|_{L^q_t L^p_x(I\times\mathbb{R}^n)}$;
- para k arbitrário, $\|u\|_{S^k(I\times\mathbb{R}^n)} := \||\nabla|^k u\|_{S^0(I\times\mathbb{R}^n)}$;
- $N^0(I\times\mathbb{R}^n)$ é o dual de $S^0(I\times\mathbb{R}^n)$;
- $\|u\|_{N^k(I\times\mathbb{R}^n)} := \||\nabla|^k F\|_{N^0(I\times\mathbb{R}^n)}$.

Definição 5.2. Para cada número diádico $N \in 2^{\mathbb{Z}}$ da forma $N = 2^j$ com $j \in \mathbb{Z}$, denotaremos por $P_{\leq N} f$ a função cuja transformada de Fourier é $\widehat{P_{\leq N} f}(\xi) := \phi(\frac{xi}{N})\hat{f}(\xi)$, onde ϕ é uma função bump suave suportada em $\{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| \leq 2\}$ que é constante igual a 1 em $\{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| \leq 1\}$. As funções $P_{\geq N}$ e $P_{M<.\leq N}$ são definidas de modo análogo.

Seguindo [CKSTT], dividiremos a prova em vários passos:

1. **Passo 0: Indução na energia**

   - Para todo $E \geq 0$, defina

     $$M(E) := \sup\{\|u\|_{L^{10}_{t,x}(I_*\times\mathbb{R}^3)}\},$$

     onde I_* é intervalo compacto e u varia sobre as soluções Schwartz em $I_* \times \mathbb{R}^3$ com $E(u) \leq E$.

- Isto reduz a prova do teorema 1.2 a mostrar que $M(E) < \infty$ para todo E.
- Note que $\{E : M(E) < \infty\}$ é um aberto conexo que contém 0. Portanto, se o teorema 1.2 fosse falso, existiria $E_{crit} < \infty$ tal que $M(E_{crit}) = \infty$ mas $M(E) < \infty$ para todo $E < E_{crit}$.
- Da definição de E_{crit} segue:

  Lema 5.3 (hip. de indução na energia). *Seja $t_0 \in \mathbb{R}$ e $v(t_0)$ Schwartz com $E(v_0) \leq E_{crit} - \eta$ para $\eta > 0$. Então, existe v solução global Schwartz com dado inicial $v(t_0)$ em $t = t_0$ e $\|v\|_{L^{10}_{t,x}} \leq M(E_{crit} - \eta) = C(\eta)$. Mais ainda, $\|v\|_{S^1} \leq C(\eta)$.*

- Fixamos 7 parâmetros $1 \gg \eta_1 \gg \eta_2 \gg \cdots \gg \eta_6 > 0$. Como $M(E_{crit}) = \infty$, existe I_* intervalo compacto e $u : I_* \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ solução $L^{10}_{t,x}$ enorme, i.e.

  $$\|u\|_{L^{10}_{t,x}} > 1/\eta_6, \tag{31}$$

  e

  $$\frac{E_{crit}}{2} \leq E(u) \leq E_{crit}. \tag{32}$$

  Isto motiva a seguinte definição:

  Definição 5.4. Uma *solução com energia mínima de blowup* é u solução satisfazendo (31) e (32).

- Para gerar uma contradição, note que é suficiente provar que

  $$\|u\|_{L^{10}_{t,x}} \leq C(\eta_0, \ldots, \eta_5),$$

  o que é obviamente incompatível com (31).

- Por Sobolev, já que u tem energia mínima de blowup, temos as seguintes estimativas na

  $$\textit{Energia Cinética:} \quad \|u\|_{L^\infty_t H^1_x} \sim 1 \tag{33}$$

  $$\textit{Energia Potencial:} \quad \|u\|_{L^\infty_t L^6_x} \lesssim 1 \tag{34}$$

  Observe que ainda não conhecemos cotas inferiores para a energia potencial.

- Considere agora a massa $\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx$ (lembrete: esta quantidade é conservada). Apesar de u ser Schwartz (logo a massa é finita), não há controle uniforme da massa a partir da hipótese de energia finita pois as baixas frequências de u podem ter energia muito pequena e massa muito grande. Além disso, é perigoso insistir na conservação da massa no caso crítico porque a massa não é invariante (de fato, ela é super-crítica) pelo scaling natural (2). Entretanto, (33) diz que as frequências altas tem massa pequena:

$$\|P_{>M} u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \lesssim \frac{1}{M}, \quad \forall\, M \in \mathbb{Z}. \tag{35}$$

  Logo faz sentido falar de massa para altas frequências nas estimativas abaixo.

2. **Passo 1: Controle localizado de u**

- Desejamos provar que soluções $u(t)$ com energia mínima de blowup não existem. Intuitivamente, é natural que elas sejam irredutíveis, ou seja, não podem se decompor em duas componentes $u(t) = v(t) + w(t)$ de energia menor $E(v), E(w) \leq E_{crit} - O(\eta^C)$ ($\eta_5 \leq \eta \leq \eta_0$) que não "iterajam" (i.e., cada componente satisfaz a NLS a menos de pequenos erros), pois isto implicaria que a norma $L^{10}_{t,x}$ de v, w seria $C(\eta)$, donde, aplicando a teoria perturbativa da NLS, a norma $L^{10}_{t,x}$ de u é $C(\eta)$, contradizendo a definição de energia mínima de blowup. Em particular, esperamos que, para cada tempo, a solução seja localizada em frequência e espaço até onde o princípio da incerteza permitir (i.e., se a frequência está localizada em $N(t)$, então $u(t)$ está localizada no espaço em escala $1/N(t)$).
- Para formalizar esta idéia, precisaremos saber que não localização em frequência implica em estimativas no espaço-tempo:

  Proposição 5.5. *Seja $\eta > 0$ e suponha que existe $N_{l_0} > 0$ frequência diádica e $t_0 \in I_*$ tais que*

$$\|P_{\leq N_{l_0}} u(t_0)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \geq \eta \tag{36}$$

  e

$$\|P_{\leq K(\eta) N_{l_0}} u(t_0)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \geq \eta \tag{37}$$

  Se $K(\eta) \geq C(\eta)$ então $\|u\|_{L^{10}_{t,x}(I_* \times \mathbb{R}^3)} \leq C(\eta)$.

- Como a conclusão da proposição acima contraria a hipótese (31), somos conduzidos ao

  Corolário 5.6 (Localização da energia em frequência). *Uma solução com energia mínima de blowup satisfaz que para cada $t \in I_*$, existe $N(t) \in 2^{\mathbb{Z}}$ freq. diádica tal que, para todo $\eta_5 \leq \eta \leq \eta_0$ temos:*

  (a) energia pequena nas frequência $\ll N(t)$:

$$\|P_{\leq c(\eta)N(t)}u(t)\|_{H^1} \leq \eta, \tag{38}$$

  (b) energia pequena nas frequências $\gg N(t)$:

$$\|P_{\geq C(\eta)N(t)}u(t)\|_{H^1} \leq \eta, \tag{39}$$

  (c) energia alta nas frequências $\sim N(t)$:

$$\|P_{c(\eta)N(t)<.<C(\eta)N(t)}u(t)\|_{H^1} \sim \eta. \tag{40}$$

  Demonstração. Veja a seção 5.2. □

- Agora vamos mostrar que soluções com energia mínima de blowup são localizadas no espaço: dividimos $I_* = I_- \cup I_0 \cup I_+$ t.q. $\int_I \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{10} = \frac{1}{3}\int_{I_*}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{10}$ para $I = I_-, I_0, I_+$.
- Em particular, (31) implica

$$\|u\|_{L^{10}_I} \gtrsim \frac{1}{\eta_6}, \quad \text{para} \quad I = I_-, I_0, I_+. \tag{41}$$

- Logo, basta achar $L^{10}_{t,x}$-cotas boas em algum dos I_-, I_0, I_+ para contradizer (31). Será no intervalo o meio I_0 que encontraremos localização no espaço, através dos seguintes estágios:.
- *Estágio 1. A energia potencial $\int_{\mathbb{R}^3} |u|^6$ é limitada por baixo:*

  Proposição 5.7. *Para qualquer u solução com energia mínima de blowup e $t \in I_0$,*

$$\|u(t)\|_{L^6_x} \geq \eta_1. \tag{42}$$

- *Estágio 2.* Usando (42), prova-se concentração no espaço (para cada tempo):

Proposição 5.8. *Toda u solução com energia mínima de blowup satisfaz que, para cada* $t \in I_0$*, existe* $x(t) \in \mathbb{R}^3$ *com*

$$\int_{|x-x(t)|\leq C(\eta_1)/N(t)} |\nabla u(t,x)|^2 dx \gtrsim c(\eta_1) \tag{43}$$

e

$$\int_{|x-x(t)|\leq C(\eta_1)/N(t)} |u(t,x)|^p dx \gtrsim c(\eta_1) N(t)^{\frac{p}{2}-3}, \tag{44}$$

para todo $1 < p < \infty$ *(a constante implícita depende de p). Em particular,*

$$\int_{|x-x(t)|\leq C(\eta_1)/N(t)} |\nabla u(t,x)|^6 dx \gtrsim c(\eta_1). \tag{45}$$

Grosseiramente, esta proposição diz que $u(t,x)$ tem tamanho médio $N(t)^{1/2}$ quando $|x - x(t)| \lesssim \frac{1}{N(t)}$. Note que isso é consistente com (33), corolário 5.6 e o princípio da incerteza.

- *Estágio 3. A energia é pequena em* $|x - x(t)| \gg \frac{1}{N(t)}$:

  Proposição 5.9. *Se u é solução com energia mínima de blowup, então para todo* $t \in I_0$*,*

$$\int_{|x-x(t)|>1/\eta_2 N(t)} |\nabla u|^2 dx \lesssim \eta_1. \tag{46}$$

- *Estágio 4.* Os passos anteriores dizem que para cada t existe $x(t)$ tal que a energia cinética (e de fato, a potencial também) é pequena longe de $x(t)$ e as energias cinética e pontencial são grandes perto de $x(t)$. Combinando isso com análise de Fourier, prova-se que:

  Proposição 5.10 (Desigualdade de Sobolev reversa).

(47)

$$\int_{B_R(x_0)} |\nabla u(t_0,x)|^2 dx \lesssim \eta_1 + C(\eta_1,\eta_2) \int_{B_{C(\eta_1,\eta_2)R}(x_0)} |u(t,x)|^6 dx,$$

onde u é solução com energia mínima de blowup, $t_0 \in I_0$*,* $x_0 \in \mathbb{R}^3$ *e* $R \geq 0$*.*

Ou seja, a menos de um erro η_1, a energia cinética é controlada pela potencial.

- *Observação 5.11.* A desigualdade de Sobolev reversa só vale quando a solução tem energia mínima de blowup. Em geral, ela é falsa, inclusive para a solução da equação de Schrödinger linear; Também a proposição 5.7 é falsa (em geral): para soluções da equação de Schrödinger linear, a norma L_x^6 tende a zero quando $t \to \infty$.

3. **Passo 2: Estimativa de Morawetz localizada.**

- Mesmo tendo em vista as estimativas acima, ainda estamos longe de concluir a prova do teorema 1.2, já que não podemos evitar blowup em tempo finito (i.e., $N(t) \to \infty$ quando $t \to T_*$) nem soluções tipo-sóliton (i.e., $N(t)$ é quase constante para todo t).
- Nesta direção, uma versão localizada em frequência da Morawetz de iteração (30) é necessária. Para obtê-la, trabalharemos com a frequência mínima de u:
- Comparando (40) com

$$\|P_{c(\eta_0)N(t)<\cdot<C(\eta_0)N(t)}u(t)\|_{H^1} \leq C(\eta_0)N(t)\|u\|_{L_t^\infty L_x^2},$$

concluímos que

$$N(t) \geq c(\eta_0)\|u\|_{L_t^\infty L_x^2}, \forall \quad t \in I_0.$$

Em particular, a quantidade

$$N_{min} := \inf_{t \in I_0} N(t)$$

é estritamente positiva. N_{min} é a frequência mínima de u (em I_0).

- De (38) segue que as frequências $|\xi| \leq c(\eta_0)N_{min}$ tem energia pequena. Logo, é razoável que Strichartz implique em controle no espaço-tempo. O próximo passo é obter mais controle nas frequências altas $|\xi| \geq c(\eta_0)N_{min}$ (além das estimativas de energia (33) e (34)):

Proposição 5.12. *u solução com energia mínima de blowup* $\Rightarrow$ $\forall N_* < c(\eta_3) N_{min}$,

$$\int_{I_0}\int |P_{\geq N_*} u|^4 \lesssim \eta_1 N_*^{-3}. \tag{48}$$

- *Observação 5.13.* Em (48), N_*^{-3} é um fator natural para o scaling (2); η_1 reflete a hipótese de N_* ser pequeno: para N_* pequeno, se consideramos o scaling para $N_* = 1$, estamos empurrando a energia para as altas frequências e, portanto, não é absurdo pensar que a norma L^4 (super-crítica) é pequena.

  Quanto ao tamanho de N_*, se escrevermos $\tilde{c}(\eta_3)$ para todas as constantes do corolário 5.6 com $\eta = \eta_3$, então a constante $c(\eta_3)$ da proposição 5.12 é $c(\eta_3) \lesssim \tilde{c}(\eta_3)\eta_3$, donde para frequências abaixo de N_*/η_3 a energia é pequena e para frequências acima de N_* a massa L^2 é pequena (a menos de fatores de N_* que podem ser normalizados pelo scaling para 1).

- A combinação das proposições 5.12 e 5.8 implica

  Corolário 5.14. $\forall$ *u solução com energia mínima de blowup,*

$$\int_{I_0} N(t)^{-1} dt \lesssim C(\eta_1, \eta_3) N_{min}^{-3}. \tag{49}$$

  Demonstração. Veja a seção 5.3. $\square$

- *Observação 5.15.* (49) é invariante pelo scaling (2) (N é proporcional a $(comprimento)^{-1}$ e t é proporcional a $(comprimento)^2$).

- *Observação 5.16.* No caso radial (onde o ponto de concentração é, como já vimos, $x(t) = 0$) Bourgain [B] (veja também a seção 4) provou que

$$\int_I N(t)\ dt \lesssim |I|^{1/2}. \tag{50}$$

  Tanto esta estimativa quanto (49) são eficientes para controlar o tempo que $N(t)$ permanece próximo a N_{min}, mas o corolário 5.14 é muito mais fraco que (50) para controlar o tempo que $N(t) \gg N_{min}$. Caso (50) fosse verdadeira no caso não-radial, a prova do teorema 1.2 seria muito mais curta. Além disso, comparando (48) com os resultados da seção 4, vemos um controle mais fraco sobre a concentração da solução. Informalmente, (48) permite um trilho contínuo no tempo de bolhas na frequência $N \gg 1$ com tamanho $\sim N^{1/2}$, extensão espacial N^{-1} e duração $\sim N^{-2}$; já (24) restringe tais bolhas a um conjunto com dimensão de Hausdorff $< 1/2$ no tempo.

Estas dificuldades serão contornadas no próximo passo com a estimativa (localizada em frequência) de quase-conservação da massa L^2 do lema 5.18 abaixo.

- Deste corolário temos a seguinte estimativa $L^{10}_{t,x}$ quando $N(t)$ é limitado por cima:

  Proposição 5.17. *Dado $I \subset I_0$, se existe $N_{max} > 0$ tal que $N(t) \leq N_{max}$ $\forall$ $t \in I$, então toda solução com energia mínima de blowup localizada satisfaz*

  $$\|u\|_{L^{10}_{t,x}(I\times\mathbb{R}^3)} + \|u\|_{S^1(I\times\mathbb{R}^3)} \leq C(\eta_1, \eta_3, \frac{N_{max}}{N_{min}}).$$

  Demonstração. Veja a seção 5.4. □

- Deste corolário obtemos uma contradição com (41) se N_{max}/N_{min} é limitado, ou seja, $N(t)$ varia em intervalo limitado.

4. **Passo 3: Não-concentração da energia.** Assim como em todo argumento de boa-colocação, temos que excluir a possibilidade $N(t) \to \infty$ quando $t \to T_* < \infty$ (já que o corolário 5.17 diz que essa é a única situação para uma solução com energia mínima de blowup).

   - O corolário 5.6 diz que, neste caso, quase toda energia sai das frequências próximas à N_{min} para as frequências muito maiores que N_{min}. Enquanto isso é compatível com a conservação de energia, tal cenário seria absurdo se a massa for bem distribuída no tempo.

   - Mais precisamente, sabemos que existe $t_{min} \in I_0$ com $N(t_{min}) = N_{min} > 0$. Pelo corolário 5.6, no tempo t_{min}, a solução tem a maior parte da energia perto de N_{min}, donde as frequências médias tem massa limitada por baixo:

   $$\|P_{c(\eta_0)N_{min}\leq\cdot\leq C(\eta_0)N_{min}} u(t_{min})\|_{L^2} \gtrsim c(\eta_0)N_{min}^{-1}. \quad (51)$$

- A idéia é provar a lei de quase-conservação em altas frequências abaixo:

  Lema 5.18. *Se u é solução com energia mínima de blowup (em particular, $N(t)$ é ilimitado em I_0), então $\forall\ t \in I_0$,*

  $$\|P_{\geq \eta_4^{100}} u(t)\|_{L^2} \gtrsim \eta_1. \tag{52}$$

  Moralmente este lema diz que alguma massa fica nas frequências altas, apesar de que boa parte dela pode ir para frequências muito baixas.

- *Observação 5.19.* É necessári trabalhar com frequências altas para explorar a quase-conservação porque freuqências muito baixas tem massa ilimitada. Essa idéia de cortar a solução em frequências para explorar leis de conservação é baseada no *I-método* para equações sub-críticas.

- Com o lema 5.18 mostra-se que o cenário de rápida perda de energia (onde a solução concentra energia em altas frequências) não ocorre; ao contrário, a soluç ão sempre deixa uma quantidade não-trivial de massa e energia nas frequências médias. Isto servirá para provar:

  Proposição 5.20.

  $$N(t) \lesssim C(\eta_5) N_{min}, \tag{53}$$

  para todo $t \in I_0$.

- Combinando a proposição 5.20 com o corolário 5.17 temos contradição com (41), o que prova o teorema 1.2.

Para encerrar esta seção, diremos quais são os papéis de algumas das constantes η:

- $\eta_1 =$ quantidade de energia potencial (em todo tempo) para as soluções de energia mínima de blowup (proposição 5.7) e tamanho da concentração (em escala $1/N(t)$) que ocorre no espaço (para todo tempo) em soluções com energia mínima de blowup (proposição 5.8)

- $\eta_2 =$ quantidade tal que $1/\eta_2$ é o tamanho (em escala $1/N(t)$) do lugar onde a energia fica localizada (proposição 5.9)

- η_3 = medida (em escala N_{min}) para "alta frequência" na desigualdade de iteração de Morawetz localizada em altas frequências (proposição 5.12)

- η_4 = frequência (em escala N_{min}) abaixo da qual a evolução não pode mover uma quantidade definida ($= \eta_1$) de massa L^2

- η_0 = constante universal pequena (aparece no corolário 5.6, entre outros lugares)

5.2 Prova do Corolário 5.6

Para $t \in I_*$, definimos $N(t) := \sup\{N \in 2^{\mathbb{Z}} : \|P_{\leq N} u(t)\|_{H^1} \leq \eta_0\}$. Sendo $u(t)$ Schwarz, $N(t) > 0$ e, pela cota inferior, em (33), $N(t)$ é finito. Por definição,

$$\|P_{\leq 2N(t)} u(t)\|_{H^1} > \eta_0.$$

Seja $\eta_5 \leq \eta \leq \eta_0$. Escolhendo $C(\eta)$ grande vale (39) já que, caso contrário, a proposição 5.5 implicaria $\|u\|_{L^{10}_{t,x}(I_* \times \mathbb{R}^3)} \leq C(\eta)$, contradizendo (31) para η_6 pequeno. Em particular, vale (39) para $\eta = \eta_0$. Como 38 também vale para $\eta = \eta_0$ (por construção), concluímos, por (33), que a cota (40) vale para $\eta = \eta_0$, o que implica (novamente por (33)) a mesma cota para $\eta_5 \leq \eta \leq \eta_0$. Finalmente, (38) vale para todo $\eta_5 \leq \eta \leq \eta_0$ se $c(\eta)$ é pequeno porque, caso contrário, usando (40) e a proposição 5.5 teríamos $\|u\|_{L^{10}_{t,x}(I_* \times \mathbb{R}^3)} \leq C(\eta)$, uma contradição.

5.3 Prova do Corolário 5.14

Se $N_* = c(\eta_3) N_{min}$, a proposição 5.12 diz

$$\int_{I_0} \int_{\mathbb{R}^3} |P_{\geq N_*} u|^4 \lesssim \eta_1 N_*^{-3} \lesssim C(\eta_1, \eta_3) N_{min}^{-3}.$$

Por outro lado, (33) implica

$$\int_{|x - x(t)| \leq C(\eta_1)/N(t)} |P_{<N_*} u|^4 \lesssim N(t)^{-3} \|P_{<N_*} u\|_{L^\infty_x}^4 \lesssim N(t)^{-3} N_*^2,$$

para cada $t \in I_0$. Logo, (44) e a desigualdade triangular (combinado com $N_* \leq c(\eta_3) N(t)$) temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |P_{\geq N_*} u|^4 \gtrsim c(\eta_1) N(t)^{-1}.$$

O resultado segue da comparação das estimativas acima.

5.4 Prova do Corolário 5.17

Pelo scaling (2), podemos supor $N_{min} = 1$. Do corolário 5.14,

$$|I| \lesssim C(\eta_1, \eta_3, N_{max}).$$

Seja $\delta = \delta(\eta_0, N_{max}) > 0$ pequeno (a ser escolhido). Partimos I em $O(\frac{|I|}{\delta})$ intervalos $I_1, \ldots, I_J$ de comprimento $\leq \delta$. Tome $t_j \in I_j$ qualquer. Do corolário 5.6 e $N(t_j) \leq N_{max}$ segue que

$$\|P_{C(\eta_0)N_{max}} u(t_j)\|_{H^1} \leq \eta_0.$$

Defina $\widetilde{u}(t) := e^{i(t-t_j)\Delta} P_{\ll C(\eta_0)N_{max}} u(t_j)$. A estimativa acima significa que

$$\|u(t_j) - \widetilde{u}(t_j)\|_{H^1} \leq \eta_0.$$

Entretanto, por (33) temos

$$\|\widetilde{u}(t)\|_{L^{10}_x} \lesssim C(\eta_0, N_{max})\|\widetilde{u}(t_j)\|_{H^1} \lesssim C(\eta_0, N_{max}),$$

para todo $t \in I_j$, donde

$$(*)\ \|\widetilde{u}\|_{L^{10}_{t,x}(I_j \times \mathbb{R}^3)} \lesssim C(\eta_0, N_{max})\delta^{1/10}.$$

Analogamente, temos

$$\|\nabla(|\widetilde{u}(t)|^4\widetilde{u}(t))\|_{L_x^{\frac{6}{5}}} \lesssim \|\nabla\widetilde{u}(t)\|_{L^6_x} \cdot \|\widetilde{u}(t)\|^4_{L^6_x} \lesssim C(\eta_0, N_{max})\|\widetilde{u}(t_j)\|^5_{H^1} \lesssim C(\eta_0, N_{max}),$$

e portanto,

$$(**)\ \|\nabla(|\widetilde{u}|^4\widetilde{u})\|_{L^2_t L^{6/5}_x(I_j \times \mathbb{R}^3)} \lesssim C(\eta_0, N_{max})\delta^{1/2}.$$

Das estimativas $(*), (**)$, a cota na energia (33) e da teoria de perturbação da Schroödinger (com erro $e = -|\widetilde{u}|^4\widetilde{u}$), temos que para δ pequeno

$$\|u\|_{L^{10}_{t,x}(I_j \times \mathbb{R}^3)} \lesssim 1.$$

Somando essa estimativa sobre os $O(\frac{|I|}{\delta})$ intervalos I_j, tems a $L^{10}_{t,x}$-estimativa desejada. Por fim, a estimativa da S^1 norma segue da teoria de Strichartz.

6 Apêndice

6.1 Prova do teorema 2.6

Nesta seção seguiremos a prova de Linares e Ponce [LP].

Usando Gagliardo-Nirenberg e a conservação da norma L^2, temos

$$\|u(t)\|_{L_x^{\alpha+1}} \leq C\|\nabla u(t)\|_{L_x^2}^{\theta}\|u(t)\|_{L_x^2}^{1-\theta} = C\|\nabla u(t)\|_{L_x^2}^{\theta}\|u_0\|_{L_x^2}^{1-\theta}, \tag{54}$$

com $\frac{1}{\alpha+1} = \theta(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) + \frac{1-\theta}{2}$, ou seja,

$$\theta = \frac{n(\alpha-1)}{2(\alpha+1)}.$$

Da definição da energia $E(u)$ segue que

$$\|\nabla_x u(t)\|_2^2 \leq |E(u_0)| + C_\alpha|\mu|\|u_0\|^{\frac{(\alpha+1)-n(\alpha-1)}{2}}\|\nabla_x u(t)\|_2^{\frac{n(\alpha-1)}{2}}. \tag{55}$$

Primeiro considere o caso em que $\alpha \in (1, 1+\frac{4}{n})$, i.e., $\frac{n(\alpha-1)}{2} < 2$. Pondo $y = y(t) = \|\nabla_x u(t)\|_2$, temos que (55) implica

$$y^2 \leq E(u_0) + C\|u_0\|^{\frac{(\alpha+1)-n(\alpha-1)}{2}} \cdot y^{2-\gamma}, \tag{56}$$

onde $\gamma = 2 - \frac{n(\alpha-1)}{2} \in (0,2)$. Portanto, existe $M = M(\|u_0\|_{H^1}, n, \alpha, \mu) > 0$ independente de T tal que

$$\sup_{[0,T]} \|\nabla_x u(t)\|_2 \leq M.$$

Desta H^1-estimativa a priori segue a boa-colocação global.

Segundo considere o caso $\alpha = 1 + \frac{4}{n}$. (56) diz que

$$y^2 \leq E(u_0) + C\|u_0\|^{4/n}y^2. \tag{57}$$

Portanto, existe $c_0 > 0$ tal que se $\|u_0\|_2 \leq c_0$ então vale a boa-colocação global.

Finalmente, no caso $\alpha \in (1+\frac{4}{n}, \frac{n+2}{n-2})$, denotando $\delta = \|u_0\|_2$, temos que (56) é

$$y^2(t) \leq E(u_0) + C\delta^{\frac{(\alpha+1)-n(\alpha-1)}{2}}y^{2+\nu}(t),$$

com $\nu = \frac{n(\alpha-1)}{2} - 2 > 0$. Se $\|u_0\|_{H^1} \leq \rho$ (ρ suficientemente pequeno), obtemos novamente $M > 0$ tal que $y(t) = \|\nabla_x u(t)\|_2 \leq M$, donde segue a boa-colocação global.

6.2 Prova da variante da desigualdade de Morawetz (24)

Nesta seção seguiremos a prova de Tao [T, seção 2.3].

Usando o scaling (2), podemos assumir $A|I|^{1/2} = 1$. Como u satisfaz (1) pode-se verificar que vale a *identidade de conservação do momento local*

$$\partial_t \Im(\bar{u}\partial_k u) = -2\partial_j \Re(\partial_k u \overline{\partial_j u}) + \frac{1}{2}\partial_k \Delta(|u|^2) - \frac{2}{n-2}\partial_k |u|^{2n/(n-2)}.$$

Multiplicando esta identidade por $\partial_k a$, onde a é uma função suave de suporte compacto, integrando no espaço e fazendo algumas integrações por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \partial_k a \Im(\bar{u}\partial_k u) &= 2\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j\partial_k a \Re(\partial_k u \overline{\partial_j u}) \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta\Delta a)|u|^2 \qquad (58) \\ &+ \frac{2}{n-2}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2n/(n-2)}\Delta a. \qquad (59) \end{aligned}$$

Aplicaremos isso a função $a(x) := (\varepsilon^2 + |x|^2)^{1/2}\chi(x)$, onde χ é uma função bump suportada em $B(0,2)$ que vale 1 em $B(0,1)$ e $0 < \varepsilon < 1$ é um parâmetro. Não é difícil ver que a é convexa na região $|x| \leq 1$. Em particular, $(\partial_j\partial_k a)\Re(\partial_k u \overline{\partial_j u})$ é não-negativo. Mais ainda, como

$$\Delta a = \frac{n-1}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{1/2}} + \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{3/2}}$$

e

$$-\Delta\Delta a = \frac{(n-1)(n-3)}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{3/2}} + \frac{6(n-3)\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{5/2}} + \frac{15\varepsilon^4}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{7/2}}$$

na região $|x| \leq 1$, temos que $-\Delta\Delta a, \Delta a$ são positivos nesta região pois $n \geq 3$. Na região $1 \leq |x| \leq 2$, a e todas as suas derivadas são limitadas uniformemente em ε, e portanto as integrais acima são limitadas por $O(E(u))$ (usando 26 para controlar os termos de ordem baixa). Essas estimativas combinadas implicam

$$\partial_t \int_{|x|\leq 2} \Im(\bar{u}\partial_k u)\partial_k a \geq c\int_{|x|\leq 1} \frac{|u(t,x)|^2}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{1/2}}dx - CE(u).$$

Integrando em t, lembrando que a é Lipschitz, temos

$$\sup_{t\in I}\int_{|x|\leq 2}|\nabla u(t,x)|\cdot|u(t,x)|dx \geq c\int_I\int_{|x|\leq 1}\frac{|u(t,x)|^2}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{1/2}}dx - CE(u)|I|.$$

Por (26) e Cauchy-Schwartz, o lado esquerdo da desigualdade acima é $O(E(u))$. Como $|I| = A^{-1/2} \leq 1$, obtemos

$$\int_I\int_{|x|\leq 1}\frac{|u(t,x)|^2}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{1/2}}dx \leq CE(u).$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ e usando convergência monótona concluímos (24).

6.3 Prova da lei de quase-conservação da massa local

Nesta seção seguiremos a prova de Tao [T, seção 2.2].

Note que se u é solução de (1), então $\partial_t|u(t,x)|^2 = -2\nabla_x\cdot\Im(\bar{u}\nabla_x u(t,x))$. Integrando por partes,

$$\partial_t\text{Massa}(u(t),B_R(x_0))^2 = \frac{4}{R}\int\chi(\frac{x-x_0}{R})\nabla\chi(\frac{x-x_0}{R})\Im(\bar{u}\nabla_x u(t,x)))dx,$$

o que implica por Cauchy-Schwarz que

$$|\partial_t\text{Massa}(u(t),B_R(x_0))^2| \leq \frac{C}{R}\text{Massa}(u(t),B_R(x_0))\left(\int_{\frac{R}{2}\leq|x-x_0|\leq R}|\nabla_x u(t,x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

Logo, se u tem energia $E(u)\leq E$, concluímos (25).

Referências

[B] J. Bourgain, Global well-posedness of defocusing 3D critical NLS in the radial case, *Journal of the A.M.S.*, 145–171, 12, 1999.

[CKSTT] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao, Global well-posedness and scattering for the energy-critical nonlinear Schrödinger equation in $\mathbb{R}^3$. *Preprint 2004*, http://front.math.ucdavis.edu/math.AP/0402129.

[LP] F. Linares, G. Ponce, Introduction to Nonlinear Dispersive Equations, *Publicações Matemáticas do IMPA*, 2004.

[T] T. Tao, Global well-posedness and scattering for the higher-dimensional energy-critical non-linear Schrödinger equation for radial data, *Preprint 2004*, http://front.math.ucdavis.edu/math.AP/0402130.