

# Expansividade, Especificação e Sensibilidade em Fluxos com Singularidades

Laura Senos Lacerda

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Alexander Eduardo Arbieto Mendoza

Rio de Janeiro

Agosto de 2010

# EXPANSIVIDADE, ESPECIFICAÇÃO E SENSIBILIDADE EM FLUXOS COM SINGULARIDADES

Laura Senos Lacerda

Orientador: Alexander Eduardo Arbieto Mendoza

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

---

Presidente, Prof. Alexander Eduardo Arbieto Mendoza - IM/UFRJ

---

Prof. Vitor Domingos Martins de Araujo - IM/UFRJ

---

Prof. Carlos Arnoldo Morales Rojas - IM/UFRJ

---

Profa. Maria José Pacífico - IM/UFRJ

---

Profa. Isabel Lugão Rios - UFF

---

Prof. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas - UFBA

Rio de Janeiro

Agosto de 2010

# Agradecimentos

Agradeço muitíssimo ao meu orientador, Professor Alexander Eduardo Arbieto Mendoza, por todo seu apoio, paciência e, principalmente, por ser fonte inesgotável de estímulo e incentivo ao longo da realização deste trabalho. Pelas mesmas razões agradeço, também, ao professor Carlos Arnoldo Morales Rojas que, embora não tenha sido meu orientador, me deu força e fez importantes contribuições para a conclusão desta Tese.

Aos meus pais, Jorge Alberto Contreira Lacerda e Regina Célia Senos Lacerda, ao meu marido Hugo Danilo Fernández Sare, e aos meus irmãos, agradeço todo o amor, carinho, compreensão e respeito.

Aos amigos e colegas da UFRJ que me acompanharam todos os dias, dos quais, uma grande parte passou (e ainda passa) pelo mesmo que eu: ficar longe da família em busca de um ideal comum. Neste quesito tenho muito a agradecer e a muitas pessoas. Como a lista é grande e para não cometer injustiças não citarei nomes, mas tenho uma enorme gratidão e amizade com todos.

Finalmente agradeço Capes e ao CNPq pelo apoio financeiro que foi essencial para a realização deste trabalho.

# Expansividade, Especificação e Sensibilidade em Fluxos com Singularidades

Laura Senos Lacerda

Orientador: Alexander Eduardo Arbieto Mendoza

Esta tese tem como objetivo estudar as propriedades de expansividade, especificação e sensibilidade às condições iniciais para fluxos de classe  $C^1$  que, possivelmente, tem singularidades.

Bowen, [11] introduziu uma definição de expansividade para fluxos que, em variedades compactas e conexas sem bordo, não admite singularidades. Nesta tese nós mostramos que, segundo essa definição, existe um residual sobre o conjunto dos campos vetoriais de classe  $C^1$  onde todo campo vetorial expansivo é Axioma A sem ciclos. Em [47], Komuro estendeu essa definição para outra que tem o atrator geométrico de Lorenz como exemplo, e então, admite singularidades. Nós mostramos, também, que todo fluxo que satisfaz a definição de expansividade dada por Komuro de maneira robusta é tal que as órbitas críticas de qualquer fluxo suficientemente próximo são hiperbólicas. Como consequência temos garantida, em dimensão 3, a existência de um residual no conjunto dos sistemas robustamente expansivos por Komuro no qual qualquer fluxo é seccional-Axioma A. Sobre especificação, nós mostramos que um campo vetorial que satisfaz a propriedade de especificação de maneira robusta é um campo Anosov. Mostramos, também que um conjunto isolado com essa propriedade é transitivo e seccional hiperbólico. Sobre a sensibilidade nós mostramos que em dimensão três, se o campo  $X$  é seccional-Anosov, então a propriedade de sensibilidade às condições iniciais se mantém para todo campo vetorial  $Y$   $C^1$  próximo a  $X$  com tal propriedade, mesmo que o maximal invariante de  $Y$  não coincida com o conjunto não-errante, mesmo que o fecho dos periódicos de  $Y$  não seja denso sobre o maximal invariante ou que  $Y$  não seja transitivo.

# Expansivity, Specification and Sensibility in Flows with Singularities

Laura Senos Lacerda

Advisor: Alexander Eduardo Arbieto Mendoza

The main objective of this thesis is study the properties of expansivity, specification and sensitivity to initial conditions in class  $C^1$  flows possibly with singularities.

Bowen, [11] introduced a definition of expansivity for flows that don't have singularities in closed manifolds. In this thesis we show that, according to this definition, there is a residual over the set of all class  $C^1$  vector fields where every expansive vector field is Axiom A without cycles. In [47], Komuro extended this definition to another one that exhibits the Lorenz geometric attractor as an example, and therefore, allows singularities. E show that every flow that satisfies the expansivity definition given by Komuro in a robust way is such that every critical orbit of every sufficiently close flow is hyperbolic. As a consequence, in dimension 3, we obtain a residual over all expansive systems in which every flow is sectional-Axiom A flow. About specification, we show that every vector field that satisfies specification property in a robust way is an Anosov vector field. Also, we show that an isolated set with this property is a transitive sectional hyperbolic set. Over sensitivity, we show that in dimension 3, if the vector field  $X$  is sectional-Anosov such that the non-wandering set coincides with the invariant maximal set, then the property of sensitivity to initial conditions holds for every vector field  $Y$   $C^1$  close to  $X$  with this property, even if the invariant maximal of  $Y$  don't coincide with the non-wandering set, even if the closure of the periodic points is not dense over the maximal invariant, and even if  $Y$  isn't transitive.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>0 Um pouco de História</b>	<b>7</b>
0.1 Expansividade . . . . .	7
0.2 Especificação . . . . .	18
0.3 Sensibilidade . . . . .	19
<b>1 Notações Definições e Ferramentas</b>	<b>23</b>
1.1 Notações e Definições . . . . .	23
1.2 Ferramentas . . . . .	32
<b>2 Expansividade</b>	<b>40</b>
2.1 Introdução . . . . .	40
2.2 Komuro-expansividade Robusta . . . . .	44
2.3 Bowen-expansividade e Órbitas Periódicas . . . . .	52
<b>3 Especificação</b>	<b>63</b>
3.1 Introdução . . . . .	63

3.2	Propriedades . . . . .	65
3.2.1	Mistura Topológica . . . . .	65
3.2.2	Conexões Heteroclínicas . . . . .	66
3.2.3	Índice . . . . .	67
3.2.4	Hiperbolicidade de Órbitas Críticas . . . . .	69
3.3	Hiperbolicidade Seccional . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Sensibilidade</b>	<b>85</b>
4.1	Introdução . . . . .	85
4.2	Sensibilidade às Condições Iniciais . . . . .	88
	<b>Referências</b>	<b>104</b>

# Introdução

Um dos temas mais importantes para investigação em sistemas dinâmicos na atualidade é a noção de caos. No caso da dinâmica ser discreta, esse conceito evoluiu para diferentes noções para um sistema caótico. Podemos citar, por sua relação com o trabalho que desenvolvemos, a definição de Devaney [18], que exige que para uma aplicação  $f$  definida num espaço métrico  $X$  seja caótica em um conjunto invariante  $Y \subset M$ , ela deve ser transitiva em  $Y$ , deve ser sensível às condições iniciais em  $Y$ , e ainda,  $f$  deve ter pontos periódicos densos em  $Y$ . As seguintes definições esclarecem esse conceito.

**Definição 0.1** *Dizemos que uma aplicação  $f$  definida em um espaço métrico  $X$  é sensível às condições iniciais em  $Y$  se existe  $r > 0$  tal que para cada ponto  $x \in Y$  e cada  $\varepsilon > 0$  existem  $y \in Y$  e  $k \geq 0$  tais que  $d(x, y) < \varepsilon$  e  $d(f^k(x), f^k(y)) \geq r$ .*

O conceito de sensibilidade às condições iniciais está intimamente relacionado com o conceito de expansividade: uma aplicação é dita expansiva se quaisquer duas órbitas distintas se separam de uma distância fixa. Mais precisamente:

**Definição 0.2** *Uma aplicação  $f : X \rightarrow X$  definida em um espaço métrico  $X$  é dita positivamente expansiva se existe  $r > 0$  tal que para quaisquer pontos distintos  $x, y \in X$  existe  $k \geq 0$  tal que  $d(f^k(x), f^k(y)) \geq r$ . Se  $f$  é um homeomorfismo, então dizemos que  $f$  é expansiva se para quaisquer pontos distintos  $x, y \in X$  existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $d(f^k(x), f^k(y)) \geq r$ .*

Os homeomorfismos expansivos foram introduzidos por Utz [96] na metade do século vinte, e desde então uma extensa literatura sobre essas aplicações vêm sendo desenvolvida. Como exemplos importantes dessa classe de homeomorfismos temos a aplicação shift na dinâmica simbólica, os conjuntos hiperbólicos e aplicações pseudo-Anosov, entre outros.

A propriedade de expansividade tem freqüentes aplicações em teoria da estabilidade, dinâmica simbólica e teoria ergódica.

Uma questão natural que segue é a de estender tal conceito para fluxos. Nessa direção, em [11], Bowen introduz a seguinte definição para expansividade, que chamaremos Bowen-expansividade, em homenagem ao autor. Segundo essa definição, todo ponto fixo deve ser isolado na variedade, e portanto, em variedades conexas, um fluxo Bowen-expansivo não admite pontos fixos.

Um próximo passo, é o problema, comum em sistemas dinâmicos, de entender as consequências de uma propriedade dinâmica caso ela se apresente de modo robusto. No caso em que a propriedade de Bowen-expansividade é robusta, temos o resultado de [67] que garante que, na topologia  $C^1$ , dizer que um fluxo é robustamente Bowen-expansivo, ou seja, é Bowen-expansivo e existe uma vizinhança formada por fluxos Bowen-expansivos, é equivalente a dizer que ele é quase-Anosov.

Nessa direção, um dos resultados desta tese que garante a existência de um subconjunto residual sobre o conjunto dos campos vetoriais de classe  $C^1$  munido da topologia  $C^1$  onde todo campo vetorial Bowen-expansivo é Axioma A sem ciclos.

A pergunta natural que segue todo esse esforço é a de estender a noção de expansividade dada por Bowen para outra definição que admita pontos fixos. Komuro, em [47] e no estudo das propriedades caóticas do atrator de Lorenz, observou uma propriedade que continha a essência do conceito de Bowen-expansividade. Nesse trabalho ele intro-

duz uma nova definição para expansividade que agora admite singularidades, e que tem como exemplo o atrator geométrico de Lorenz, (veja [28]). Nesse trabalho, Komuro define essa propriedade pelo nome de expansividade fraca. Nesta tese nós chamaremos essa propriedade de Komuro-expansividade. Como as propriedades geométricas do atrator de Lorenz são robustas fica então demonstrada a existência de um aberto constituído por fluxos Komuro-expansivos.

Outro resultado desta tese garante que todo fluxo robustamente Komuro-expansivo é tal que as órbitas críticas de qualquer fluxo suficientemente próximo são hiperbólicas. Como consequência temos garantida, em dimensão 3, a existência de um residual no conjunto dos sistemas robustamente Komuro-expansivos no qual qualquer fluxo é seccional-Axioma A, ou seja, seu conjunto não-errante pode ser decomposto como uma união disjunta de atratores e repulsores seccional-hiperbólicos e conjuntos básicos hiperbólicos.

Voltando aos sistemas discretos, na definição de sistemas caóticos dada por Robinson, havia a exigência de densidade de órbitas periódicas. A propriedade de especificação em sistemas dinâmicos está relacionada com essa exigência. Essa propriedade foi estudada do ponto de vista da teoria geométrica dos sistemas dinâmicos por Sakai, Sumi e Yamamoto em [89], onde eles caracterizam os difeomorfismos que satisfazem a propriedade de especificação robustamente pelos difeomorfismos Anosov. Nesta tese, nós extendemos os resultados em [89] para sistemas a tempo contínuo. Esse resultado segue de um resultado semi-local que garante que se um conjunto compacto invariante e isolado satisfaz a propriedade de especificação robustamente, então esse conjunto é seccional hiperbólico (veja o capítulo 3). O caso global é verdadeiro pois, usando um teorema de Vivier [98], garantimos a não-existência de singularidades.

A última condição para que um sistema discreto seja caótico na definição de Robinson é a de ser sensível às condições iniciais, ou seja, pequenas diferenças nas condições iniciais são rapidamente aumentadas ao passar o tempo, fazendo com que duas órbitas distintas e no entanto arbitrariamente próximas tenham comportamento futuro completamente distinto. Para uma definição mais precisa, veja o Capítulo 4.

Um exemplo de fluxo que satisfaz essa propriedade são os fluxos de Anosov. Esse fluxos motivam a pergunta de quais fluxos mantêm a propriedade de sensibilidade às condições iniciais para sistemas dinâmicos mais gerais que os hiperbólicos, como por exemplo, os parcialmente hiperbólicos. No entanto, em variedades compactas com fronteira, um fluxo parcialmente hiperbólico pode não ser sensível às condições iniciais. Temos como exemplo o produto do campo nulo no toro por uma contração forte. Esse exemplo nos faz perguntar quais condições são suficientes para que um campo vetorial parcialmente hiperbólico seja sensível às condições iniciais. A condição que consideraremos nesta tese é a de hiperbolicidade seccional, ou seja, campos que expandem área no subfibrado central. De fato, estudaremos os fluxos seccional-Anosov [59], e mais precisamente, fluxos seccional-Anosov em variedades de dimensão três compactas para as quais o maximal invariante coincide com o conjunto não-errante. Nós provamos que a propriedade de sensibilidade às condições iniciais se mantém para todo campo vetorial  $Y \in C^1$  próximo a  $X$  com tal propriedade, mesmo que o maximal invariante de  $Y$  não coincida com o conjunto não-errante, mesmo que o fecho dos periódicos de  $Y$  não seja denso sobre o maximal invariante ou que  $Y$  não seja transitivo.

Terminaremos essa introdução com algumas questões em aberto. Em [70], Oka mostrou que todo fluxo Bowen-expansivo é Komuro-expansivo e que todo fluxo Komuro-expansivo sem singularidades é Bowen-expansivo. Nosso resultado no Capítulo 2 Seção 1 garante

que em uma variedade de dimensão três compacta e conexa, se a propriedade de Komuro-expansividade se mantém robustamente, então o fluxo é seccional Axioma A. A pergunta natural que segue é se a propriedade de Komuro-expansividade se mantém robustamente, ou ao menos genericamente, agora em uma variedade de dimensão qualquer implica que o fluxo é seccional Axioma A.

**Pergunta 0.3** *A propriedade de Komuro-expansividade robusta em dimensão qualquer implica que o fluxo é seccional Axioma A?*

Uma pergunta semelhante seria a seguinte.

**Pergunta 0.4** *Genericamente em uma variedade compacta, conexa e sem bordo de dimensão qualquer, a propriedade de Komuro-expansividade implica que o fluxo é Axioma A?*

Em relação à propriedade de especificação, apesar de nosso resultado permitir a presença de singularidades no caso semi-local, nós não sabemos se elas realmente existem. Para lidar com esse problema podemos começar estudando a propriedade de especificação no exemplo paradigmático dos conjuntos seccional hiperbólicos, o atrator geométrico de Lorenz.

**Pergunta 0.5** *O atrator geométrico de Lorenz misturador topológico satisfaz a propriedade de especificação fraca?*

Por outro lado, talvez seja possível enfraquecer a definição de especificação para obter uma especificação não-uniforme tal que os conjuntos seccionais hiperbólicos satisfaçam essa definição. Para medidas expansoras de difeomorfismos locais, Oliveira [71] conseguiu esse resultado.

Em relação à propriedade de sensibilidade às condições iniciais, a pergunta que segue seria a seguinte.

**Pergunta 0.6** *É possível estender nosso resultado para variedades com dimensão maior que três?*

# Capítulo 0

## Um pouco de História

Neste capítulo iremos descrever alguns resultados prévios sobre os conceitos estudados nesta tese, bem como resultados não relacionados com os problemas abordados nesta tese, porém importantes na teoria que envolve os conceitos do título da tese. O intuito disto é informar o leitor da vasta coleção de problemas e resultados envolvendo expansividade, especificação e sensibilidade às condições iniciais. De maneira geral, tentaremos colocar os tópicos em ordem cronológica, porém algumas vezes iremos quebrar esta regra em prol da sequência dada por generalizações naturais dos resultados.

### 0.1 Expansividade

O conceito de expansividade foi introduzido por Utz [96], na metade do século vinte, para homeomorfismos de variedades compactas. Desde então uma extensa literatura sobre esta propriedade vêm sendo desenvolvida.

Dentro da classe de homeomorfismos a propriedade de expansividade foi encontrada em diversos exemplos. Temos a aplicação *shift* na dinâmica simbólica, os conjuntos uniformemente hiperbólicos, os mapas pseudo-Anosovs, entre outros. Recomendamos ao leitor o livro de Katok e Hasselblat, [43] para consulta de tais exemplos e o artigo de Thurston

[94] para uma descrição dos mapas pseudo-Anosovs. Em vista de tais exemplos, vemos que a propriedade de expansividade tem freqüentes aplicações na teoria da estabilidade, na teoria de codificação (ou dinâmica simbólica) e na teoria ergódica.

Além disso, como veremos em seguida, a noção de expansividade também aparece no estudo de fluxos, onde uma discussão severa sobre a real extensão da definição foi travada em meados dos anos 70. De tal discussão, o papel das reparametrizações ganhou um grande destaque e atualmente os conceitos usuais de expansividade usados são os de Bowen, na ausência de singularidades, e de Komuro, na presença das mesmas. Mais ainda, a expansividade foi estendida para o contexto de ações de grupos. Em seguida iremos apresentar alguns dos principais problemas relacionados a expansividade, que aparecem nos contextos previamente citados.

### **Existência e Classificação de Sistemas Expansivos:**

No problema da existência, um dos primeiros trabalhos nesta linha é o trabalho de Norton e O'Brien [69] onde a primeira noção de expansividade é dada, e verificada que leva a conclusões não muito empolgantes, ou seja, não existem fluxos expansivos (nessa definição) em espaços métricos infinitos. A partir daí decorreu o debate sobre a noção correta de expansividade para fluxos, citado previamente. Mais tarde Mañé, em [54], mostra a não existência de homeomorfismos expansivos em espaços métricos de dimensão topológica infinita. Mais ainda, Mañé mostra que se, adicionalmente, a dinâmica for minimal então o espaço tem que ter dimensão topológica zero (por exemplo, um conjunto de Cantor). Fathi, em [20], estende este resultado obtendo uma cota superior finita para a dimensão de Hausdorff do espaço ambiente:

$$HD(X) \leq 2 \frac{h(f)}{-\log \rho},$$

onde  $0 < \rho < 1$  é a constante de expansão (ou contração) na métrica adaptada (também construída por Fathi).

Ainda no contexto de fluxos, introduzindo o conceito de seções transversais globais, Keynes e Sears em [44] e em [45] estenderam de maneira natural os resultados de Mañé citados acima. Até onde o autor conhece, não existe na literatura uma cota análoga à de Fathi para fluxos, porém trabalhos em andamento sugerem que tal cota existe. O caso de ações de grupos está completamente em aberto.

Sobre o problema da classificação de sistemas expansivos, é bem conhecido que no círculo não existem homeomorfismos expansivos, existem diversas demonstrações de tais fatos, uma maneira simples de ver isto é que um homeomorfismo expansivo sempre tem entropia topológica positiva, enquanto os homeomorfismo do círculo tem entropia topológica zero. O problema da existência em dimensões mais altas é bem mais complicado. Neste sentido, um dos primeiros trabalhos é o de Mañé em [55], onde prova-se que um difeomorfismo pertence ao interior do conjunto dos difeomorfismos expansivos se, e somente se, ele é quase-Anosov. A topologia adotada aqui, bem como em diversas partes desta tese, é a topologia  $C^1$ .

Se nos restringirmos a dinâmicas expansivas em superfícies resultados mais poderosos podem ser obtidos. De fato, as aplicações pseudo-Anosov e os homeomorfismos lineares de Anosov (ou seja, homeomorfismos conjugados a um difeomorfismo linear de Anosov) descrevem completamente as dinâmicas globais expansivas em superfícies como foi provado por Hiraide, em [36], e Lewowicz, em [49], de maneira independente. Nestes trabalhos, como consequência dos métodos, mostra-se que a esfera  $S^2$  não admite homeomorfismos expansivos. Daí segue, que toda superfície compacta não homeomorfa a esfera admite um homeomorfismo expansivo. Num contexto semi-local, em [32], inspirados pelas dinâmicas pseudo-Anosov, é mostrado que atratores expansivos em superfícies são hiperbólicos e

tem estrutura de produto local exceto, possivelmente, em um número finito de pontos periódicos.

Ao partir para dimensões mais altas, primeiramente em dimensão 3, podemos citar o trabalho de Vieitez [97] onde é mostrado que um homeomorfismo expansivo, cujo conjunto de pontos periódicos topologicamente hiperbólicos são densos sobre a variedade, é conjugado a um difeomorfismo de Anosov, e ainda, a variedade que o suporta é o toro  $\mathbb{T}^3$ . Inspirados neste artigo, Potrie, Artigue e Brum [7] estenderam o resultado para dimensões mais altas em variedades compactas e sem bordo que possuem pontos periódicos hiperbólicos topologicamente densos e que possuem pelo menos um desses pontos com codimensão 1. No caso de variedades abertas, poucos resultados são conhecidos, porém recentemente temos os preprints de Groismann [26] onde mostra-se que um homeomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  com pelo menos um ponto fixo é "conjugado" a um automorfismo linear no toro se, e somente se ele admite uma função métrica de Lyapunov  $U$  que satisfaz a condição HP e não tem pontos singulares. A condição HP estabelece que: dado qualquer subconjunto compacto  $C$  de  $\mathbb{R}^2$ , vale a seguinte igualdade

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|V(x, y) - V(x, z)|}{W(x, y)} = 0$$

uniformemente, para  $z, y \in C$ , e onde  $V = \Delta U$  e  $W = \Delta V$ . No trabalho subsequente, [27], o autor descreve o conjunto dos homeomorfismos sem pontos fixos do plano que admitem uma função métrica de Lyapunov com a condição HP. Referimos o leitor aos dois trabalhos citados para maiores e mais precisas informações.

Uma questão natural que segue é a de estender o conceito de expansividade para fluxos. Nessa direção, em [11], Bowen introduz a seguinte definição para expansividade, que chamaremos Bowen-expansividade, em homenagem ao autor. Segundo essa definição, todo ponto fixo deve ser isolado na variedade, e portanto, em variedades conexas, um fluxo Bowen-expansivo não admite pontos fixos.

Novamente, temos a questão sobre quais espaços suportam sistemas Bowen-expansivos. Como exemplo, temos [45] onde é mostrado que tais sistemas em espaços métricos compactos só são possíveis se o espaço tiver dimensão finita, e em [31] temos a não existência de fluxos expansivos em variedades compactas bidimensionais.

Com o objetivo de classificar fluxos expansivos, inspirado nos trabalhos de Hiraide e Lewowicz, Paternain em [79] mostra que fluxos Bowen-expansivos não possuem pontos estáveis e se a variedade tem dimensão três então o fluxo possui estrutura de produto local. Mais ainda, Paternain obtêm que o grupo fundamental da variedade tem crescimento exponencial, inspirado no trabalho de Plante e Thurston [82] para fluxos Anosov.

Inspirados no trabalho de Hiraide, Inaba e Matsumoto [39] estudaram fluxos Bowen-expansivos em variedades tridimensionais. Eles mostram que a aplicação de primeiro retorno com respeito a uma família de seções transversais locais também é expansiva. Segue do método de Hiraide a existência de uma folheação nas seções transversais com singularidades *prong*, para maiores detalhes ver o trabalho citado. Mesmo assim, adiantamos que os autores usam a existência desta folheação para garantir que certas 3-variedades fechadas e orientadas não admitem fluxos expansivos. Num trabalho subsequente, [40], Inaba e Tsuchiya definem *folheações expansivas* e mostram que o grupo fundamental de toda 3-variedade que admite tal folheação tem crescimento exponencial. De fato, isto é uma extensão dos trabalhos de Plante e Thurston para folheações. Um resultado semelhante para ações Anosov foi obtido por Arbieto e Morales em [5].

### **Existência de Estados de Equilíbrio:**

De maneira surpreendente, mesmo que a expansividade seja uma propriedade *a priori* topológica, ela tem implicações profundas na teoria ergódica. De fato, em [12], Bowen mostra que a propriedade de expansividade produz semicontinuidade do mapa entropia

métrica, isto implica automaticamente a existência de estados de equilíbrio para qualquer potencial contínuo, ver [99]. O leitor pode se perguntar, naturalmente, o que ocorre com a unicidade. Porém isto está relacionado com a propriedade de especificação que iremos abordar mais adiante. Para fluxos, em 97, Oka em [73] estende este resultado para fluxos, ao fazer uma nova definição para fluxos expansivos. Em princípio, poderíamos esperar semelhante resultado no contexto de ações de  $\mathbb{R}^k$ , porém o próprio Oka em [72], mostra que os únicos difeomorfismos que comutam com um fluxo expansivo, são os pertencentes ao próprio fluxo, e portanto como  $\mathbb{R}^k$  é abeliano, podemos esperar que não existam ações expansivas de  $\mathbb{R}^k$  localmente livres (i.e. tem que ser conjugados à fluxos). Mesmo assim, trabalhos em andamento de Arbieto e Maquera, sugerem que para ações Anosov de  $\mathbb{R}^k$  é ainda possível mostrar a existência de estados de equilíbrio, usando um conceito adequado de entropia local.

### **Relações com Shadowing e Hiperbolicidade:**

O exemplo paradigmático de hiperbolicidade é a *ferradura* de Smale, e usando dinâmica simbólica é fácil ver que este sistema é expansivo. Isto não é surpresa, uma vez que a ferradura pertence a classe de sistemas dinâmicos hiperbólicos. Neste caso, a expansividade é rapidamente obtida a partir da existência e das propriedades das variedades estáveis e instáveis. Quando o conjunto é isolado, a dinâmica possui a propriedade de sombreamento, e como consequência da expansividade temos a unicidade da sombra. Há outras maneiras de mostrar que um difeomorfismo hiperbólico é expansivo, que são úteis em outros contextos. Para uma prova usando funções de Lyapunov, veja [50].

Em meados dos anos 80, uma série de matemáticos começou a estudar o problema dual, isto é, quais propriedades que unidas à expansividade impliquem em hiperbolicidade (ou uma espécie de hiperbolicidade). Nessa linha, temos alguns resultados que envolvem a

propriedade de sombreamento. Por exemplo, em [84], Reddy mostra que todo homeomorfismo com coordenadas canônicas tem coordenadas hiperbólicas (ou seja, estudando a estrutura de produto local). Em [74], Ombach considera o problema inverso.

Em vista disso, podemos imaginar que expansividade e sombreamento formam um casamento feliz. Diversos matemáticos estudaram as consequências deste casamento, como exemplo citaremos os trabalhos de Hiraide e Ombach. Hiraide mostra em [35] que em superfícies compactas, um homeomorfismo com estas duas propriedades é conjugado a um automorfismo hiperbólico no toro. Em [34], ele estende esse resultado para dimensões mais altas. Já em [33], ele mostra a existência de uma partição de Markov. Já Ombach mostra, em [74], que esse casamento implica na estabilidade topológica do sistema, e, mais ainda, em [75], ele garante hiperbolicidade topológica para um tempo futuro.

Para fluxos, em [46], Komuro mostra que Bowen-expansividade e a propriedade de sombreamento implicam em uma espécie de decomposição espectral do conjunto não-errante. Já nos anos 90, Moriyasu [66], estende o trabalho de Hiraide, e mostra a existência de uma partição de Markov para fluxos Bowen-expansivos com sombreamento. Já Brunella, [14], mostra que para fluxos transitivos e Bowen-expansivos em variedades de dimensão três, existe uma partição de Markov, isto melhora o resultado de Paternain citado acima.

## **O Estudo de Outras Noções Relacionadas à Expansividade**

A filosofia de que órbitas diferentes se separam pode ser expressa de várias maneiras e não só como na definição de expansividade, isto foi explorado por diversos autores.

Como primeiro exemplo, temos a  $h$ -expansividade: dizemos que um difeomorfismo  $f$

é  $h$ -expansivo se existe  $\varepsilon > 0$  tal que o conjunto

$$\xi_\varepsilon(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

tem entropia topológica zero para todo  $x \in M$ . A  $h$ -expansividade foi introduzida por Bowen em [12], e neste mesmo trabalho ele mostra que, neste caso, a entropia topológica satisfaz  $h(f) = h(f, \varepsilon)$ , isto é, a entropia topológica pode ser calculada sem precisar mandar a escala de aproximação de órbitas para zero. Mais ainda, se  $M$  tem dimensão finita, e  $\mu$  é uma medida de Borel invariante, então vale  $h_\mu(f) = h_\mu(f, A)$ , para qualquer partição finita  $A$  em conjuntos de Borel de diâmetro no máximo  $\varepsilon$ . Exemplos de aplicações  $h$ -expansivas também são dados neste trabalho. De fato, após o trabalho de Buzzi [15], sabemos que todo mapa  $C^\infty$  é  $h$ -expansivo. Porém, esta regularidade é necessária devido ao resultado de Misiurewicz, em [56], onde é contruído um difeomorfismo de classe  $C^r$  que não é  $h$ -expansivo.

No caso não-inversível, é natural pedir que as órbitas se separem apenas para o futuro. Isto também é relacionado com a noção de sensibilidade as condições iniciais. Este conceito é chamado de expansividade positiva. Resulta que Coven e Reddy em [17] mostram que as únicas variedades que suportam *homeomorfismos* positivamente expansivos são as de dimensão zero. Este fato, foi observado previamente por Schwartzman em [92], e mais tarde uma prova elementar foi dada por Richeson e Wiseman [85]. O caso de variedades com bordo foi tratado por Hiraide em [37]. É de se esperar que a única variedade compacta sem bordo que admite um fluxo positivamente expansivo sem singularidades seja o círculo, como sugere trabalhos em andamento de Cordeiro. Por outro lado, mapas positivamente expansivos foram estudados por diversos autores. Sakai em [87] estudou propriedades de sombreamento de mapas positivamente expansivos. Arbieto em [4] mostrou que mapas persistentemente positivamente expansivos são de fato expansores. Logo após Arbieto em [3] estendeu este fato e mostrou que genericamente na topologia  $C^1$ , mapas positivamente

expansivos são de fato expansores.

Outras noções de expansividade que vêm sendo estudadas são os mapas *continuumwise* expansivos  $f : X \rightarrow X$ , onde pede-se que exista um número positivo  $c > 0$  tal que se  $A$  é um subcontinuum não degenerado de  $X$ , então exista um número inteiro  $n = n(A) \in \mathbb{Z}$  tal que  $\text{diam } f^n(A) > c$ . Eles foram introduzidos e estudados por Kato em [41] e [42]. Esses mapas também foram estudados por Sakai em [88], onde ele mostra que o interior  $C^1$  do conjunto dos difeomorfismos continuumwise expansivos em uma variedade compacta coincide com o interior  $C^1$  do conjunto dos difeomorfismos expansivos.

Também temos a expansividade em medida, devido à Morales em [61], onde pede-se que para que homeomorfismo  $f : X \rightarrow X$  seja expansivo em medida exista uma medida de probabilidade  $\mu$  nos borelianos de  $X$  e exista  $\varepsilon > 0$  tais que  $\mu(\Gamma_\varepsilon(x)) = 0$  para todo  $x \in X$ , onde

$$\Gamma_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}\}.$$

Nesse trabalho o autor mostra, entre outras coisas, que não existem homeomorfismos expansivos em medida em intervalos compactos e em  $S^1$ , e que todo homeomorfismo que expande volume em uma variedade compacta e sem bordo é expansor na medida de Lebesgue. Também, Arbieto e Morales em [6], mostram que toda medida ergódica com entropia positiva é necessariamente positivamente expansiva, segundo a definição de Morales citada previamente.

## Consequências de Robustez

Um problema comum em sistemas dinâmicos é o de entender as consequências de uma propriedade dinâmica caso ela se apresente de modo robusto. Como exemplo da importância do estudo da robustez em fluxos, podemos citar o trabalho de Doering [19] em que ele mostra que se um fluxo apresenta transitividade de modo robusto numa variedade com-

pacta sem bordo de dimensão 3 então o fluxo é Anosov. Em verdade, este resultado é uma extensão de um trabalho prévio de Mañé [53], onde ele mostra que todo difeomorfismo  $C^1$ -robustamente transitivo é Anosov.

No caso da expansividade para sistemas discretos, temos como um primeiro resultado o já citado trabalho de Mañé [55]. Mais recentemente, temos os trabalhos de Sambarino e Vieitez nos quais eles estudam a propriedade de expansividade em uma classe homoclínica associada a um ponto hiperbólico de maneira robusta. Em [90] eles mostram a existência de decomposição dominada para a classe homoclínica, e em [91] eles melhoram o resultado, obtendo de fato hiperbolicidade. Já em [78], e em conjunto com Pacífico e Pujals, eles conseguem mostrar que para classes homoclinicas de codimensão um, a decomposição dominada e a decomposição hiperbólica tem codimensão um.

No caso em que a propriedade de Bowen-expansividade é robusta, temos o resultado de [67] que garante que, na topologia  $C^1$ , dizer que um fluxo é robustamente Bowen-expansivo, ou seja, é Bowen-expansivo e existe uma vizinhança formada por fluxos Bowen-expansivos, é equivalente a dizer que ele é quase-Anosov. Como corolário deste resultado, segue que, um fluxo é robustamente Bowen-expansivo e possui propriedade de sombreamento se, e somente se, ele é estruturalmente estável e, portanto, ele é Anosov (i.e. a variedade toda é um conjunto hiperbólico). Logo sua dinâmica é bem descrita pela teoria hiperbólica.

A pergunta natural que segue todo esse esforço é a de estender a noção de expansividade dada por Bowen para outra definição que admita pontos fixos. Komuro, em [47] e no estudo das propriedades caóticas do atrator de Lorenz, observou uma propriedade que continha a essência do conceito de Bowen-expansividade. Nesse trabalho ele introduz uma nova definição para expansividade que agora admite singularidades, e que tem como exemplo o atrator geométrico de Lorenz, (veja [28]). De fato, Komuro uti-

liza o termo *expansividade fraca*, porém nesta tese nós chamaremos essa propriedade de *Komuro-expansividade*, em homenagem ao autor. Como as propriedades geométricas do atrator de Lorenz são robustas fica, então, demonstrada a existência de um aberto constituído por fluxos Komuro-expansivos. Observe que a variedade que suporta o Lorenz geométrico é um bitoro sólido e, portanto, uma variedade com bordo. Mais que isso, em [2] Araújo, Pacífico, Pujals e Viana mostram que, em dimensão três, existe uma classe grande de fluxos Komuro-expansivos que é a dos atratores seccionais hiperbólicos. A Komuro-expansividade é, de fato, uma extensão da definição dada por Bowen e Walters, como confirma Oka em seu trabalho [70], onde demonstra que fluxos Komuro-expansivos sem pontos fixos são Bowen-expansivos.

O primeiro resultado desta tese garante que todo fluxo robustamente Komuro-expansivo é tal que as órbitas críticas de qualquer fluxo suficientemente próximo são hiperbólicas. Como consequência temos garantida, em dimensão 3, a existência de um residual no conjunto dos sistemas robustamente Komuro-expansivos no qual qualquer fluxo é seccional-Axioma A, ou seja, seu conjunto não-errante pode ser decomposto como uma união disjunta de atratores e repulsores seccional-hiperbólicos e conjuntos básicos hiperbólicos.

## Consequências Genéricas

Em geral, em sistemas dinâmicos é comum buscar propriedades dinâmicas que valham para quase todos os sistemas dinâmicos. Obviamente, o que está em jogo é a noção de *quase todo*. Topologicamente, é comum pedir que a propriedade valha para um conjunto residual do espaço de difeomorfismos. Pois, pelo teorema de Baire, este conjunto necessariamente tem que ser denso.

No presente texto, estamos interessados em encontrar propriedades genéricas para os sistemas expansivos. Antes de citar um resultado neste contexto vamos lembrar alguns

resultados prévios. Primeiro, temos o trabalho de Pacífico, Pujals e Vieitez, [77], onde é mostrado que classes homoclínicas robustamente expansivas em 3-variedades possuem decomposição dominada e hiperbolicidade num aberto e denso do aberto dado pela robustez. Em seguida temos [78], que estendem este resultado para dimensão qualquer, porém para classes homoclínicas com codimensão 1. Finalmente em [91] mostra-se que classe homoclínicas robustamente expansivas são hiperbólicas sob condições de genericidade.

Inspirados neste último trabalho, Gan e Yang, em [25], mostram que  $C^1$ -genericamente toda classe homoclínica é hiperbólica. Aplicando métodos similares Arbieto, em [3], mostra o resultado global, isto é genericamente todo difeomorfismo expansivo é Axioma A sem ciclos. Estes resultados são versões genéricas do resultado de Mañé, citado acima, se  $f$  pertence ao interior  $C^1$  do conjunto dos difeomorfismos expansivos então ele é Axioma A.

Seguindo essa linha de pesquisa temos o segundo resultado desta tese que garante a existência de um subconjunto residual sobre o conjunto dos campos vetoriais de classe  $C^1$  munido da topologia  $C^1$  onde todo campo vetorial Bowen-expansivo é Axioma A sem ciclos.

## 0.2 Especificação

No estudo da distribuição de pontos periódicos para difeomorfismos Axioma A [10], Bowen introduziu a propriedade de especificação. Essa propriedade se tornou importante no estudo sob o ponto de vista da teoria ergódica de sistemas dinâmicos em espaços métricos compactos e em mecânica estatística. Mais especificamente, em [13], Bowen mostrou que se um homeomorfismo expansivo satisfaz a propriedade de especificação em um espaço métrico compacto, então cada potencial Hölder tem somente um estado

de equilíbrio. Veja Franco [21] para uma discussão desse resultado para fluxos. Haydn e Ruelle [30] estudaram as consequências de expansividade e da propriedade de especificação em mecânica estatística.

Moralmente, um difeomorfismo  $f$  ou um fluxo  $X_t$  em uma variedade compacta  $M$  satisfazem a propriedade de especificação se é possível sombrear  $n$  pedaços distintos de órbitas que são suficientemente separadas na variável tempo, por uma única órbita. Dizemos que a especificação é fraca se  $n = 2$ . A definição precisa de especificação será dada no terceiro capítulo desta tese. Ela é, na verdade, bastante técnica e parece ser uma condição muito forte, mas é satisfeita por muitos exemplos. De fato, todo conjunto maximal hiperbólico localmente compacto e topologicamente misturador para um fluxo suave satisfaz essa propriedade.

Essa propriedade foi estudada do ponto de vista da teoria geométrica dos sistemas dinâmicos por Sakai, Sumi e Yamamoto em [89], onde eles caracterizam os difeomorfismos que satisfazem a propriedade de especificação robustamente pelos difeomorfismos Anosov. Nesta tese, nós extendemos os resultados em [89] para sistemas a tempo contínuo. Esse resultado segue de um resultado semi-local que garante que se um conjunto compacto invariante e isolado satisfaz a propriedade de especificação robustamente, então esse conjunto é seccional hiperbólico (veja o capítulo 3). O caso global é verdadeiro pois, usando um teorema de Vivier [98], garantimos a não-existência de singularidades.

### 0.3 Sensibilidade

Um dos grandes atrativos dos sistemas dinâmicos (com certa hiperbolicidade) é que eles apresentam um comportamento caótico, termo, ou idéia, que popularizou-se nos dias de hoje. Outro exemplo popular, é o chamado *efeito borboleta*.

A noção de caos foi introduzida, matematicamente, por Li e Yorke em [51], como uma

maneira de descrever um comportamento não-trivial das órbitas do sistema dinâmico. Eles provam que se uma aplicação de um intervalo na reta admite um ponto de período três, então ela admite pontos periódicos de todos os períodos. Eles também provaram que se uma aplicação de um intervalo na reta tem um ponto periódico de período três, então ele admite um conjunto invariante  $S$  tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0, \quad \text{e} \quad (1)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| = 0 \quad (2)$$

para quaisquer  $p, q \in S$  com  $p \neq q$ . Eles definiram uma aplicação caótica por uma aplicação que satisfaz essa última propriedade.

Esta noção evoluiu e tomou outras formas por diversos autores. Talvez a mais conhecida seja a noção de caos devido a Devaney [18]. Devaney diz que caos é fruto da presença de órbitas periódicas densas, transitividade e sensibilidade às condições iniciais. Este último item é o mais próximo do *efeito borboleta*, moralmente ele diz que para qualquer ponto do sistema existe um outro ponto suficientemente próximo tal que em algum tempo futuro a órbita destes dois pontos estão afastados.

Observamos que a definição de sensibilidade às condições iniciais está intimamente ligada com a propriedade de existência de um invariante  $S$  tal que valem as condições (1) e (2) dadas por Li e Yorke.

Resulta que na definição de caos de Devaney, somente os dois primeiros itens são necessários, a sensibilidade decorre dos outros dois, veja [8]. Mais ainda, não é difícil ver que sistemas misturadores são sensíveis às condições iniciais.

Note que expansividade não implica na sensibilidade às condições iniciais, uma vez que na última pede-se separação de órbitas *para o futuro*. Como vimos antes, pedir expansividade positiva para reparar este fato não iria ajudar muito, uma vez que precisaríamos perder invertibilidade.

Uma das primeiras situações em que a sensibilidade às condições iniciais foi observada foi no estudo do atrator geométrico de Lorenz [52]. Enquanto integrava numericamente as equações do atrator, Lorenz gravou as coordenadas de uma trajetória com precisão de três casas decimais. Depois de observar o comportamento dessa trajetória ele tentou refazê-la usando as coordenadas gravadas, causando uma mudança nas órbitas.

O primeiro problema envolvendo sensibilidade às condições iniciais é o de saber quais espaços suportam e quais não suportam fluxos que têm essa propriedade. Pelo teorema de estabilidade estrutural de Peixoto em superfícies compactas, [80, 81], um ponto  $x$  em um fluxo estruturalmente estável deve sempre convergir a um dos finitos atratores. Portanto, não existem fluxos com a propriedade de sensibilidade às condições iniciais em superfícies compactas. Segue das generalizações desse teorema que também não existem tais fluxos no plano projetivo ou na garrafa de Klein, entre outros. De fato, a existência de um poço periódico impede a sensibilidade.

Em sistemas diferenciáveis um problema importante é decidir quais dinâmicas apresentam sensibilidade às condições iniciais. Observamos que na topologia  $C^0$  talvez seja plausível que mapas genéricos sejam sensíveis, uma vez que [48], mostrou que genericamente existe uma semiconjugação com o shift, após tomar algum iterado e que isto leva a entropia topológica infinita, porém ainda não temos indícios disto.

Já no caso de fluxos com singularidades, temos que no caso *transitivo*, sensibilidade às condições iniciais ocorre em dimensão três, para sistemas seccionalmente hiperbólicos, devido ao trabalho de Araújo, Pacífico, Pujals e Viana [2]. Note que Tucker em [95], mostra que o atrator de Lorenz original (isto é, com os parâmetros usados por Lorenz) são seccionalmente hiperbólicos e portanto também são sensíveis, como indicado pelo próprio Lorenz.

O último resultado da tese garante que, se  $X$  é um campo vetorial sensível às condições

iniciais, então a propriedade de sensibilidade às condições iniciais se mantém para todo campo vetorial  $Y$   $C^1$  próximo a  $X$ , mesmo que o maximal invariante de  $Y$  não coincida com o conjunto não-errante, mesmo que o fecho dos periódicos de  $Y$  não seja denso sobre o maximal invariante ou que  $Y$  não seja transitivo.

# Capítulo 1

## Notações Definições e Ferramentas

Ao longo desta tese nós iremos considerar  $M$  uma variedade Riemanniana compacta, conexa e de dimensão finita. O bordo de  $M$  será denotado por  $\partial M$ , e pode ser não-vazio. Iremos estudar a dinâmica do fluxo associado a um campo vetorial de classe  $C^1$  do ponto de vista topológico. Se o bordo de  $M$  não é vazio, assumiremos que  $X$  é transversal a  $\partial M$  apontando para o interior de  $M$ . Nós fixamos em  $M$  uma distância  $d$ .

Na primeira seção deste capítulo estabeleceremos notações e definições preliminares para fluxos, e na segunda seção estabeleceremos as principais ferramentas utilizadas ao longo deste trabalho.

### 1.1 Notações e Definições

#### Equações Diferenciais Ordinárias

Denotaremos por  $\mathfrak{X}^1(M)$  o conjunto dos campos vetoriais de classe  $C^1$  em  $M$  munido da topologia  $C^1$ . Lembramos que um campo vetorial é uma aplicação de classe  $C^1$ ,  $X : M \rightarrow TM$ , onde  $TM$  é o fibrado tangente associado à variedade  $M$ . Para cada  $X \in \mathfrak{X}^1(M)$  denotaremos por  $X_t$  o fluxo induzido por  $X$ , que definimos da seguinte forma:

Lembramos que um fluxo de classe  $C^1$  é uma família  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$  de difeomorfismos de classe  $C^1$  satisfazendo as seguintes propriedades:

1.  $X_0 = Id : M \rightarrow M$  é a aplicação identidade em  $M$ .
2.  $X_{t+s} = X_t \circ X_s$  para quaisquer  $t, s \in \mathbb{R}$ .

Dado um campo vetorial de classe  $C^1$ ,  $X$ , existe um único fluxo associado ao campo  $X$  que satisfaz

$$\frac{d}{dt}X_t(q) \Big|_{t=t_0} = X(X_{t_0}(q)) \text{ para quaisquer } q \in M \text{ e } t_0 \in \mathbb{R}.$$

Se a fronteira de  $M$  é vazia, como  $M$  é compacta, todo campo vetorial de classe  $C^1$ ,  $X$ , é limitado e, portanto, o fluxo  $X_t$  está definido em toda a reta real. Caso  $\partial M \neq \emptyset$ , então  $X_t$  está definido em  $\partial M$  somente para  $t \geq 0$ .

Note que, reciprocamente, um fluxo  $X_t$  determina unicamente um campo vetorial  $X$  cujo fluxo associado é precisamente  $X_t$ .

Dado  $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ , uma *singularidade* de  $X$  ou um *ponto fixo* para o fluxo  $X_t$  é um ponto  $p \in M$  tal que  $X_t(p) = p$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Nesse caso temos  $X(p) = 0$ . Ao longo desta tese denotaremos por  $Sing(X)$  o conjunto de todas as singularidades do campo  $X$ . Todo ponto  $p \in M \setminus Sing(X)$  é chamado ponto *regular* para  $X$ .

Diremos que um fluxo é *não-singular* se ele não admite pontos fixos. Analogamente, diremos que um campo vetorial é *não-singular* se ele não admite singularidades.

Dado  $p \in M$ , a órbita de  $X$  é o conjunto  $O(p) = O_X(p) = \{X_t(p) : t \in \mathbb{R}\}$ . Sendo assim,  $\sigma$  é uma singularidade se, e somente se,  $O_X(\sigma) = \{\sigma\}$ . Uma *órbita periódica* de  $X$  é uma órbita  $O = O_X(p)$  tal que  $X_T(p) = p$  para um  $T > 0$  e  $X_t(p) \neq (p)$  para todo  $t \in (0, T)$ . Nesse caso, chamamos  $T$  o *período* de  $p$  ou da órbita de  $p$ . Ao longo desta tese denotaremos por  $T_X(p)$  o período do ponto periódico  $p$  pelo campo  $X$ , e muitas vezes

usaremos simplesmente  $T(p)$  para denotar  $T_X(p)$ . Sendo assim, uma órbita é compacta se, e somente se, ela é uma singularidade ou uma órbita periódica. Denotaremos por  $Per(X)$  o conjunto das órbitas periódicas de  $X$ . Um *elemento crítico* de um campo  $X$  é um ponto  $p \in M$  que é uma singularidade ou pertence a uma órbita periódica. Definimos o conjunto  $Crit(X) = Sing(X) \cup Per(X)$  pelo conjunto dos elementos críticos de  $X$ . Por uma *órbita fechada* nós queremos dizer uma órbita que é uma singularidade ou uma órbita periódica.

O conjunto *maximal invariante* de  $X$  é dado por

$$M(X) = \bigcap_{t \geq 0} X_t(M).$$

O maximal invariante é o conjunto dos pontos cuja órbita negativa não escapa de  $M$ , ou seja, o conjunto dos pontos  $x \in M$  tais que  $X_t(x)$  está definido para todo  $t \in \mathbb{R}$ . No caso em que  $\partial M = \emptyset$ , temos que  $M(X) = M$ .

Observe que se  $\partial M \neq \emptyset$ , então para qualquer  $p \in Per(X)$ , temos que  $p \in M(X)$ .

Dizemos que um ponto  $p \in M$  é *não errante* se para toda vizinhança  $U$  de  $p$  e todo  $T > 0$  existe  $t > T$  tal que  $X_t(U) \cap U \neq \emptyset$ . O *conjunto não-errante*  $\Omega(X)$  é o conjunto de todos os pontos não errantes de  $X$ . Evidentemente  $\Omega(X) \subset M(X)$ , mas o conjunto maximal invariante não está necessariamente contido no conjunto não-errante.

Se  $q \in M$ , definimos o conjunto  $\omega$ -limite do ponto  $p$ ,  $\omega_X(p)$ , pelo conjunto dos pontos de acumulação do seguinte conjunto:  $\{X_t(p); t \geq 0\}$ . Analogamente, definimos o  $\alpha$ -limite do ponto  $p$  por  $\alpha_X(p) = \omega_{-X}(p)$ , onde  $-X$  é o campo inverso de  $X$ . Segue que o  $\alpha$ -limite e o  $\omega$ -limite de qualquer ponto da variedade  $M$  estão contidos no conjunto não-errante.

Um subconjunto  $\Lambda$  de  $M$  é dito *invariante* por  $X$  se  $X_t(\Lambda) = \Lambda$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Um subconjunto invariante  $\Lambda$  é dito *transitivo* se existe  $p \in \Lambda$  tal que  $\omega_X(p) = \Lambda$ , e ele é dito *isolado* se,

$$\Lambda = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(U)$$

para alguma vizinhança  $U$  de  $\Lambda$ . Tal vizinhança é chamada um *bloco isolador*.

Dizemos que um conjunto isolado  $\Lambda$  é um *misturador topológico* se, para quaisquer conjuntos abertos  $U$  e  $V$  em  $\Lambda$ , existe  $N > 0$  tal que

$$U \cap X_t(V) \neq \emptyset, \forall t \geq N.$$

Fixado um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}^1(M)$  e  $t \in \mathbb{R}$ , denotaremos por  $DX_t$  a derivada do difeomorfismo  $X_t : M \rightarrow M$  em relação a variedade  $M$  e escreveremos  $DX_t(p) : T_pM \rightarrow T_{X_t(p)}M$  a derivada aplicada no ponto  $p \in M$ . Da mesma forma, denotaremos por  $DX$  a derivada do campo vetorial  $X : M \rightarrow TM$  com respeito a variedade  $M$  e escreveremos  $DX(p)$  ou  $D_pX : T_pM \rightarrow T_pM$  para denotar a derivada aplicada no ponto  $p \in M$ .

## Hiperbolicidade

Denotamos por  $m(T) = \inf_{\|v\|=1} T(v)$  a conorma do operador linear  $T$ .

**Definição 1.1** *Um conjunto compacto e invariante  $\Lambda$  por  $X$  é hiperbólico se existe uma decomposição contínua e invariante do fibrado tangente  $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^u$  e existem constantes  $\lambda, K > 0$  tais que*

- $E_\Lambda^s$  é  $(K, \lambda)$ -contrator, ou seja,

$$\|DX_t(x) | E_x^s\| \leq K^{-1}e^{-\lambda t}, \quad \text{para todo } x \in \Lambda, \text{ e para todo } t \geq 0.$$

- $E_\Lambda^u$  é  $(K, \lambda)$ -expansor, ou seja,

$$m(DX_t | E_x^u) \geq Ke^{\lambda t}, \quad \text{para todo } x \in \Lambda, \text{ e para todo } t \geq 0.$$

- $E_\Lambda^X$  é o subespaço em  $TM$  gerado por  $X(x)$  para todo  $x \in \Lambda$ .

Se a variedade inteira  $M$  é um conjunto hiperbólico para o campo vetorial  $M$ , dizemos que o campo  $X$  e o fluxo gerado por ele são *Anosov*.

Assim, definimos que um ponto crítico de  $X$  é hiperbólico se sua órbita é um conjunto hiperbólico para  $X$ , e denotaremos por  $Per_h(X)$  o conjunto dos pontos periódicos hiperbólicos para  $X$ .

Um conjunto hiperbólico  $\Lambda$  para  $X$  é chamado *básico* se ele é transitivo e isolado.

Seja  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico compacto e invariante por  $X$ . Então existe uma vizinhança  $U \subset M$  de  $\Lambda$  e uma vizinhança de classe  $C^1$ ,  $\mathcal{U}$  de  $X$  tal que se  $Y \in \mathcal{U}$ , então  $Y$  admite um conjunto compacto, invariante e hiperbólico  $\Lambda_Y$  em  $U$  chamado a *continuação* de  $\Lambda$ . Nesse caso a dimensão dos subfibrados  $E_{\Lambda_Y}^*$  é igual a dimensão de  $E_\Lambda^*$ , para  $* = s, u$ .

Pela *Teoria das Variedades Invariantes* [38], se  $\Lambda \subset M$  é um conjunto hiperbólico, então para todo  $p \in \Lambda$ , os conjuntos

$$W_X^{ss}(p) = \{q \in M : d(X_t(p), X_t(q)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty\}, \text{ e}$$

$$W_X^{uu}(p) = \{q \in M : d(X_t(p), X_t(q)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}$$

são variedades de classe  $C^1$  tangentes a  $E_\Lambda^s$  e  $E_\Lambda^u$ , respectivamente.

Sendo  $O = O_X(p)$  a órbita de  $p$ , então

$$W_X^s(O) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W_X^{ss}(X_t(p)) \quad \text{e} \quad W_X^u(O) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W_X^{uu}(X_t(p))$$

são variedades de classe  $C^1$  tangentes a  $E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^X$  e  $E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^u$ , respectivamente. Para simplificar a notação, denotaremos  $W_X^s(p) = W^s(O_X(p))$  e  $W_X^u(p) = W^u(O_X(p))$ . Definimos, desta forma, as variedades *estável forte* e *estável* de um ponto  $p \in \Lambda$ , respectivamente, por  $W_X^{ss}(p)$  e  $W_X^s(O(p))$ .

Observe que se  $p \in Per(X)$  é hiperbólico, então  $W^u(p) \subset M(X)$ , como se  $M(X)$  fosse um sumidouro.

Ainda para  $p$  ponto periódico hiperbólico, se  $\varepsilon > 0$  a *variedade estável forte local* de  $p$  é definida por

$$W_\varepsilon^{ss}(p) = W_{\varepsilon, X}^{ss}(p) = \{y \in M; d(X_t(y), X_t(p)) < \varepsilon \text{ se } t \geq 0\}.$$

Pelo Teorema da Variedade Estável, existe  $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$  tal que

$$W_X^{ss}(p) = \bigcup_{t \leq 0} X_t(W_{\varepsilon, X}^{ss}(p)).$$

Analogamente, se  $\sigma$  é uma singularidade hiperbólica para  $X$ , a *variedade estável forte local* de  $\sigma$  é definida por

$$W_\varepsilon^s(\sigma) = W_{\varepsilon, X}^s(\sigma) = \{y \in M; d(X_t(y), \sigma) < \varepsilon \text{ se } t \geq 0\}.$$

Novamente pelo Teorema da Variedade Estável, existe  $\varepsilon = \varepsilon(\sigma) > 0$  tal que

$$W_X^s(\sigma) = \bigcup_{t \leq 0} X_t(W_{\varepsilon, X}^s(\sigma)).$$

Analogamente, definimos variedades *instável forte*, *instável* e *instável local*.

Seja  $p \in M$  ponto crítico hiperbólico para  $X$ . A dimensão da variedade estável  $W^s(O(p))$  é chamado o *índice* de  $O(p)$ , e denotaremos por  $index(O(p))$ .

Seja  $\sigma$  uma órbita hiperbólica crítica (singularidade ou órbita periódica) de um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ . Pelo anterior, existe uma vizinhança  $U \subset M$  de  $\sigma$  e uma vizinhança  $C^1$ ,  $\mathcal{U}$ , de  $X$  tal que se  $Y \in \mathcal{U}$ , então  $Y$  admite uma órbita crítica hiperbólica  $\sigma_Y$  em  $U$  e  $index(\sigma) = index(\sigma_Y)$ . Tal  $\sigma_Y$  é chamada a *continuação* de  $\sigma$ .

Um campo vetorial  $X$  é dito *Kupka-Smale* se toda órbita crítica é hiperbólica e se  $W^s(\sigma_1)$  é transversal à  $W^u(\sigma_2)$ , para quaisquer  $\sigma_i$  singularidades ou órbitas periódicas por  $X$ . O conjunto de todos os campos vetoriais Kupka-Smale é residual em  $\mathfrak{X}^1(M)$ . (Ver a definição de residual na subseção *Topologia Geral*).

## Hiperbolicidade Parcial e Seccional

Denotaremos por  $Det(A)$  o Jacobiano do operador linear  $A$ .

**Definição 1.2** *Um conjunto compacto e invariante  $\Lambda$  por  $X$  é parcialmente hiperbólico se existem uma decomposição contínua e invariante para o fibrado tangente  $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$  e constantes  $\lambda, K > 0$  tais que*

- $E^s$  é  $(K, \lambda)$ -contrator.
- $E_\Lambda^s$   $(K, \lambda)$ -domina  $E_\Lambda^c$ , i.e.

$$\frac{\|DX_t(x)|_{E_x^s}\|}{m(DX_t(x)|_{E_x^c})} \leq K^{-1}e^{-\lambda t},$$

para todo  $x \in \Lambda$ , e todo  $t \geq 0$ .

Se, além disso,  $|Det(DX_t(x)/L_x)| \geq K^{-1}e^{\lambda t}$ , para todos  $x \in \Lambda$ ,  $t \geq 0$  e todo subespaço de dimensão dois  $L_x$  de  $E_x^c$ , então dizemos que o subfibrado central  $E_\Lambda^c$  é *seccional expansor*.

Chamamos um conjunto compacto e invariante  $\Lambda$  um *pré-atrator* se  $\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} X_t(U)$  para alguma vizinhança  $U$  de  $\Lambda$  que satisfaz  $X_t(U) \subset U$ , para todo  $t \geq 0$ . Um *atrator* para  $X$  é um conjunto que satisfaz a condição anterior e, além disso, ele é um conjunto transitivo por  $X$ . Um *repulsor* é um conjunto que é um atrator para o campo inverso  $-X$ . Um *poço* de  $X$  é um atrator trivial para  $X$ , ou seja, ele é um atrator que é uma órbita de  $X$ . Uma *fonte* de  $X$  é um repulsor trivial para  $X$ .

Agora daremos a definição de conjuntos seccionais hiperbólicos, veja [62] para maiores detalhes.

**Definição 1.3** *Um conjunto parcialmente hiperbólico é chamado seccional hiperbólico se todas as suas singularidades são hiperbólicas e ele admite uma direção central seccional*

expansora. Um conjunto é chamado atrator seccional hiperbólico se ele é um conjunto seccional hiperbólico que também é um atrator. Um conjunto é chamado repulsor seccional hiperbólico para  $X$  se ele é um atrator seccional hiperbólico para o campo inverso  $-X$ . Além disso, se toda a variedade  $M$  é um conjunto seccional hiperbólico para um campo  $X$ , então dizemos que  $X$  é seccional-Anosov.

Existe um Teorema da Variedade Estável para um conjunto seccional hiperbólico  $\Lambda$ . De fato, denotamos por  $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$  a decomposição do fibrado tangente sobre  $\Lambda$ . Segue de [38] que por cada  $p \in \Lambda$  passa uma subvariedade  $W^{ss}(p) = W_X^{ss}(p)$  mergulhada em  $M$  tão suave quanto o campo vetorial  $X$  que é tangente a  $E_p^s$  em  $p$ , que consiste dos pontos  $x$  tais que  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(X_t(x), X_t(p)) = 0$ . Nesse caso definimos a variedade estável de  $\Lambda$  por  $W^s(\Lambda) = \cup_{p \in \Lambda} (W^{ss}(p))$ . Da mesma forma, existe uma subvariedade  $W^{uu}(p) = W_X^{uu}(p)$  mergulhada em  $M$  tão suave quanto o campo  $X$  que é tangente a  $E_p^c$ . Nesse caso não temos, necessariamente, que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(X_t(x), X_t(p)) = 0$ , para todo  $x \in W^{uu}(p)$ . Analogamente, definimos a variedade instável de  $\Lambda$  por  $W^u(\Lambda) = \cup_{p \in \Lambda} (W^{uu}(p))$ .

Os conjuntos seccionais hiperbólicos em variedades de dimensão três são precisamente os conjuntos singular-hiperbólicos definidos em [64]. Conjuntos parcialmente hiperbólicos foram definidos em [93] com o nome de *conjunto pseudohiperbólico*. A seguinte definição foi introduzida em [57].

**Definição 1.4** *Um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}^1(M)$  é chamado seccional-Axioma A se existe uma decomposição finita e disjunta para o conjunto não-errante*

$$\Omega(X) = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_n,$$

onde cada  $\Lambda_i$  ou é um conjunto básico e hiperbólico, ou é um atrator seccional hiperbólico, ou é um repulsor seccional hiperbólico, para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Um *ciclo* de um campo vetorial seccional-Axioma A,  $X$ , é uma subsequência

$$\{\Lambda_{i_0}, \dots, \Lambda_{i_k}\} \quad \text{de} \quad \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$$

tal que  $i_0 = i_k$  e  $W_X^u(\Lambda_{i_j}) \cap W_X^s(\Lambda_{i_{j+1}}) \neq \emptyset$ , para todo  $0 = j = k - 1$ . Aqui,

$$W_X^u(\Lambda_{i_j}) = \bigcup_{p \in \Lambda_{i_j}} W^{uu}(p) \quad \text{e} \quad W_X^s(\Lambda_{i_j}) = \bigcup_{p \in \Lambda_{i_j}} W^{ss}(p)$$

## Topologia Geral

Seja  $(N; d)$  um espaço métrico. Uma família  $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  de abertos de  $N$  diz-se uma *base* para a topologia de  $N$  se, para todo  $p \in N$  e toda vizinhança aberta  $V \subset N$  de  $p$ , existir  $\alpha \in \mathcal{A}$  tal que  $p \in U_\alpha \subset V$ . Diz-se que uma tal base é *enumerável* se o conjunto de índices  $\mathcal{A}$  o for.

Dado um subconjunto aberto  $A$  de  $N$ , um subconjunto  $R \subset A$  é dito *residual* se ele contém uma interseção enumerável de subconjuntos abertos e densos sobre  $A$ . Dizemos que uma propriedade é *genérica* em  $A$  se existir  $B \subset A$  residual sobre  $A$  em que vale tal propriedade. Analogamente, dizemos que  $B \subset A$  é *genérico* em  $A$  se existir um residual sobre  $A$  contido em  $B$ .

Um espaço métrico é um *espaço de Baire*, se todo subconjunto residual é denso. O Teorema de Baire garante que se  $(N, d)$  é um espaço completo com a topologia induzida pela métrica, então  $(N, d)$  é um espaço de Baire.

**Definição 1.5** *Uma folheação de classe  $C^r$  ( $r > 0$ ) de uma variedade  $M$  é uma partição  $\mathcal{F}$  de  $M$  por subvariedades imersas e conexas de classe  $C^r$ , chamadas folhas, tal que o módulo  $\mathfrak{X}^1(\mathcal{F})$ , dos campos de vetores de classe  $C^r$  definidos em  $M$  e tangentes às folhas de  $\mathcal{F}$  é transitivo, isto é, dados  $p \in M$  e  $v \in T_p L$ , onde  $L$  é a folha de  $\mathcal{F}$  passando por  $p$ , existe um campo de vetores  $X \in \mathfrak{X}^1(M)$  tal que  $X(p) = v$ .*

## 1.2 Ferramentas

Nesta seção nós apresentaremos as principais ferramentas utilizadas em nosso trabalho. Começaremos com resultados de perturbações da derivada do tipo Franks para fluxos, citaremos o resultado de dicotomia de Morales e Pacífico, citaremos um importante resultado devido a Gan e Wen, [23] sobre fluxos estrela, e terminaremos apresentando a Propriedade (P).

### Lemas do Tipo Franks

Denotaremos  $B_r(x) = \{y \in M : d(x, y) < r\}$ , onde  $d$  é a distância que fixamos em  $M$ . Daqui em diante assumiremos, por compacidade, que a aplicação exponencial  $\exp_p : T_p M(1) \rightarrow M$  está bem definida para todo  $p \in M$ , onde

$$T_p M(1) = \{v \in T_p M : \|v\| \leq 1\}.$$

**Lema 1.6** *Sejam  $X \in \mathfrak{X}^1(M)$  e  $p \in \text{Sing}(X)$ . Então, para toda vizinhança  $C^1$ ,  $U(X) \subset \mathfrak{X}^1(M)$  de  $X$ , existem  $\delta_0 > 0$  e  $\varepsilon_0 > 0$  tais que se  $O_\delta : T_p M \rightarrow T_p M$  é uma aplicação linear tal que  $\|O_\delta - D_p X\| < \delta < \delta_0$ , então existe  $Y^\delta \in U(X)$  satisfazendo a seguinte condição:*

$$(i) \quad Y^\delta(x) = \begin{cases} (D_{\exp_p^{-1}(x)} \exp_p) \circ O_\delta \circ \exp_p^{-1}(x), & \text{se } x \in B_{\varepsilon_0/4}(p) \\ X(x), & \text{se } x \notin B_{\varepsilon_0}(p). \end{cases}$$

Além disso temos,

$$(ii) \quad d_{C_0}(Y_\delta; Y_0) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \delta \longrightarrow 0.$$

Aqui  $Y_0$  é o campo vetorial dado pelo lema, quando tomamos  $O_0 = D_p X$ .

*Demonstração:* Veja [68, Lema 1.1 (pg. 3394)].

□

**Observação 1.7** *Esse lema nos permite encontrar um campo vetorial  $Y = Y^0$  arbitrariamente próximo de  $X$  de tal forma que  $Y|_{B_{\varepsilon_0/4}(p)}$  é uma linearização de  $X|_{B_{\varepsilon_0/4}(p)}$  com respeito às coordenadas exponenciais. Isso significa que se existem um intervalo  $I \in \mathbb{R}$  e uma curva integral  $\xi : I \rightarrow M$  do campo vetorial linear  $D_p X$  em  $\exp_p^{-1}(B_{\varepsilon_0/4}(p)) \subset T_p M$ , então a composição  $\exp_p \circ \xi : I \rightarrow M$  é uma curva integral para  $Y$  em  $B_{\varepsilon_0/4}(p) \subset M$ .*

Sejam  $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ , e  $p$  um ponto periódico para o fluxo  $X_t$ . Definimos

$$N_p = \langle X(p) \rangle^\perp \quad \text{e} \quad N_{p,r} = N_p \cap T_p M(r) \quad \text{para} \quad 0 < r \leq 1.$$

Também definimos

$$\Pi_{p,r} = \exp_p(N_{p,r}) \quad \text{e} \quad \Pi_p = \Pi_{p,1}.$$

Seja  $T = T(p)$  o período de  $p$ , ou seja, o menor número real e positivo tal que  $X_T(p) = p$ .

Então, existem  $r_0 > 0$  e uma função estritamente positiva e de classe  $C^1$ ,  $\tau : \Pi_{p,r_0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

definida por

$$\begin{cases} X_{\tau(q)}(q) \in \Pi_p, \quad \forall q \in \Pi_{p,r_0}, \\ \tau(p) = T. \end{cases}$$

Essa aplicação é chamada *tempo de primeiro retorno*. Assim, o fluxo  $X_t$  define unicamente uma aplicação, chamada *aplicação de Poincaré*, dada por

$$\begin{aligned} f : \Pi_{p,r_0} &\longrightarrow \Pi_p \\ q &\longmapsto X_{\tau(q)}(q). \end{aligned}$$

Essa aplicação é um mergulho de classe  $C^1$  cuja imagem é um conjunto que está contido no interior de  $\Pi_p$ , para  $r_0$  suficientemente pequeno.

Como  $X_t(p) \neq p$  para todo  $0 < t < T$ , tomando  $r_0$  suficientemente pequeno, então a aplicação  $(t, q) \mapsto X_t(q)$  mergulha de forma  $C^1$  o conjunto

$$\{(t, q) \in \mathbb{R} \times \Pi_{p,r} : 0 \leq t \leq \tau(q)\}$$

em  $M$ , para todo  $0 < r \leq r_0$ . A imagem de tal aplicação será denotada por

$$F_p(X_t, r, T) = \{X_t(q) : q \in \Pi_{p,r} \text{ e } t \in [0, \tau(q)]\}.$$

Nesse caso, sabemos que  $DX_T(p)$  tem um autovalor  $\lambda = 1$  com autovetor associado  $v = X(p)$ , e que, para todo  $q \in O(p)$ , as derivadas  $DX_T(p)$  e  $DX_T(q)$  são linearmente conjugadas, e portanto, têm os mesmos autovalores. Sejam então  $1, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  os autovalores de  $DX_T(p)$ . Definimos, então, os *multiplicadores característicos* da órbita periódica  $\gamma = O_X(p)$  pelos autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Nesse caso, os multiplicadores característicos da órbita periódica de  $p$  são os autovalores da derivada da aplicação de Poincaré  $D_p f$  em  $p$  e, portanto, a órbita  $\gamma$  é hiperbólica se, e somente se,  $|\lambda_i| \neq 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Podemos, então, enunciar um resultado análogo ao Lema anterior para órbitas periódicas.

**Lema 1.8** *Sejam  $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ ,  $p \in \text{Per}(X)$  com período  $T(p)$  e  $f : \Pi_{p,r_0} \rightarrow \Pi_p$  aplicação de Poincaré, e sejam  $U(X) \in \mathfrak{X}^1(M)$  uma vizinhança  $C^1$  de  $X$  e  $0 < r \leq r_0$  dados. Então existem  $\delta_0 > 0$  e  $0 < \varepsilon_0 < r/2$  tais que se  $O_\delta : N_{p,r_0} \rightarrow N_p$  é um isomorfismo linear com  $\|O_\delta - D_p f\| < \delta < \delta_0$ , então existe  $Y^\delta \in U(X)$  satisfazendo as seguintes condições:*

(i)  $Y^\delta(x) = X(x)$ , se  $x \notin F_p(X_t; r; T(p))$ ,

(ii)  $p \in \text{Per}(Y^\delta)$ ,

(iii) Se  $g_{Y^\delta} : \Pi_{p,r} \rightarrow \Pi_p$  é a aplicação de Poincaré para  $Y^\delta$ , então

$$g_{Y^\delta}(x) = \begin{cases} \exp_p \circ O_\delta \circ \exp_p^{-1}(x), & \text{se } x \in B_{\varepsilon_0/4}(p) \cap \Pi_{p,r} \\ f(x), & \text{se } x \notin B_{\varepsilon_0}(p) \cap \Pi_{p,r}, \end{cases}$$

Além disso, seja  $Y^0$  o campo vetorial dado pelo lema para  $O_0 = D_p f$ . Então

(iv)  $d_{C_0}(Y^\delta; Y^0) \rightarrow 0$  quando  $\delta \rightarrow 0$ .

*Demonstração:* Veja [68, Lema 1.3 (pg. 3395)].

□

Esse lema nos permite encontrar um campo vetorial  $Y$  suficientemente próximo de  $X$  cuja aplicação de Poincaré em  $p \in \text{Per}(Y)$  é uma pequena perturbação da derivada da aplicação de Poincaré em  $p \in \text{Per}(X)$ .

### A dicotomia de Morales e Pacífico

O seguinte teorema garante que  $C^1$ -genericamente, campos vetoriais em variedades compactas de dimensão 3 que admitem somente um número finito de poços e fontes são seccionais-Axioma A.

**Teorema 1.9** *Existe um subconjunto  $\mathcal{R}$  residual sobre  $\mathfrak{X}^1(M)$  tal que qualquer  $X \in \mathcal{R}$  satisfaz (somente) uma das seguintes propriedades:*

(1)  $X$  admite infinitos poços ou fontes;

(2)  $X$  é seccional-Axioma A sem ciclos.

*Demonstração:* Veja [63, Seção 3 (pg. 1579)].

□

### Fluxos Estrela

Agora vamos enunciar o resultado de Gan e Wen [23], para isso precisamos de algumas definições.

**Definição 1.10** Dizemos que um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}^1(M)$  é um campo estrela, se existe uma vizinhança  $C^1$  de  $X$ ,  $\mathcal{U}$ , tal que para todo  $Y \in \mathcal{U}$  temos que se  $p$  é um ponto crítico, então ele é hiperbólico. Analogamente, dizemos que um fluxo é estrela se ele é gerado por um campo estrela.

Definimos, então,  $\mathcal{G}^1(M)$  pelo conjunto dos campos vetoriais que são estrela.

**Teorema 1.11 (Gan-Wen)** *Todo campo estrela não-singular de classe  $C^1$  é Axioma A e não admite ciclos.*

*Demonstração:* Ver [23].

□

## A propriedade (P)

**Definição 1.12** *Um campo vetorial  $X$  que tem todas as suas órbitas fechadas hiperbólicas satisfaz a Propriedade (P) se para cada órbita periódica  $O$  existe uma singularidade  $\sigma$  tal que  $W^u(O) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$ .*

O seguinte lema relaciona a Propriedade (P) com a aproximação por pontos cujo  $\omega$ -limite é uma singularidade.

**Lema 1.13** *Todo ponto no fecho do conjunto de órbitas periódicas de um campo vetorial que satisfaz a Propriedade (P) é acumulado por pontos para os quais o  $\omega$ -limite é uma singularidade.*

A seguir nós estabeleceremos a definição de uma partição singular generalizando a definição de seção transversal global, [22].

Considere um campo vetorial  $X$  em uma variedade  $M$ . Uma *seção transversal* de  $X$  é uma subvariedade de codimensão 1,  $\Sigma$ , transversal a  $X$ . O interior e a fronteira de  $\Sigma$ , como subvariedade, serão denotados por  $Int(\Sigma)$  e  $\partial\Sigma$  respectivamente. Se  $\mathcal{R} = \{S_1, \dots, S_k\}$  é uma coleção de seções transversais, ainda denotaremos por  $\mathcal{R}$  a união de seus elementos. Denotaremos

$$\partial\mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^k \partial S_i \quad \text{and} \quad Int(\mathcal{R}) = \bigcup_{i=1}^k Int(S_i).$$

O *diâmetro* de  $\mathcal{R}$  será a soma dos diâmetros de seus elementos.

**Definição 1.14** *Uma partição singular de um conjunto invariante  $\Lambda$  de  $X$  é uma coleção finita e disjunta  $\mathcal{R}$  de seções transversais satisfazendo  $\Lambda \cap \partial\mathcal{R} = \emptyset$  e  $\Lambda \cap Sing(X) = \{y \in \Lambda : X_t(y) \notin \mathcal{R}, \forall t \in \mathbb{R}\}$ .*

No que segue apresentaremos um resultado geral de existência para partições singulares.

**Proposição 1.15** *Seja  $\Lambda$  um conjunto compacto e invariante por  $X$  tal que todas as suas singularidades são hiperbólicas. Suponha que para todo  $\delta > 0$  e todo  $z \in \Lambda \setminus Sing(X)$  existe uma seção transversal  $\Sigma_z$  de diâmetro menor ou igual a  $\delta$  tal que  $z \in Int(\Sigma_z)$  e  $\Lambda \cap \partial\Sigma_z = \emptyset$ . Então,  $\Lambda$  admite partições singulares de diâmetro arbitrariamente pequeno.*

*Demonstração:* Como toda singularidade em  $\Lambda$  é hiperbólica, podemos escolher  $\beta > 0$  tal que

$$\Lambda \cap Sing(X) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t \left( \bigcup_{\sigma \in \Lambda \cap Sing(X)} B_\beta(\sigma) \right). \quad (1.1)$$

Para tal  $\beta$  nós definimos

$$H = \Lambda \setminus \left( \bigcup_{\sigma \in \Lambda \cap Sing(X)} B_\beta(\sigma) \right).$$

Podemos assumir que  $H \neq \emptyset$  pois, do contrário (1.1) implicaria em  $\Lambda = \Lambda \cap Sing(X)$  e nesse caso terminamos a demonstração. Como  $H \subset \Lambda$  e  $H \cap Sing(X) = \emptyset$ , segue que

existe  $\Sigma_z$  como na hipótese para todo  $z \in H$ . Para cada  $z$  podemos definir

$$V_z = \bigcup_{t \in (-1,1)} X_t(\text{Int}(\Sigma_z)).$$

Nesse caso  $z \in V_z$  e, então,  $\{V_z : z \in H\}$  é uma cobertura por abertos de  $H$  que é compacto. Então, existe uma subcobertura finita  $\{z_1, \dots, z_r\} \in H$  tal que

$$H \subset \bigcup_{i=1}^r V_{z_i}.$$

Movendo a coleção de seções transversais  $\Sigma_{z_1}, \dots, \Sigma_{z_r}$  ao longo do fluxo, podemos assumir que a coleção

$$\mathcal{R} = \{\Sigma_{z_1}, \dots, \Sigma_{z_r}\}$$

é disjunta dois a dois. Além disso, como  $\Lambda \cap \partial\Sigma_z = \emptyset$ , nós temos que

$$\Lambda \cap \partial\mathcal{R} = \emptyset.$$

Se  $z \in \Lambda \setminus \text{Sing}(X)$ , então (1.1) implica que existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que

$$X_t(z) \notin \bigcup_{\sigma \in \Lambda \cap \text{Sing}(X)} B_\beta(\sigma).$$

Mas  $X_t(z) \in \Lambda$  uma vez que  $z \in \Lambda$  e, portanto,  $X_t(z) \in H$ . Portanto  $X_t(z) \in V_{z_i}$  para algum  $i$  e, então, a órbita de  $z$  intersecta  $\Sigma_{z_i}$  por definição de  $V_{z_i}$ . Isso prova que

$$\Lambda \cap \text{Sing}(X) = \{z \in \Lambda : X_t(z) \notin \mathcal{R}\}$$

o que completa a demonstração. □

Agora estabeleceremos um teorema demonstrado originalmente em [57] para fluxos seccional-Anosov com maximal invariante transitivo. Incluiremos a demonstração desse fato no Apêndice do Capítulo 4 para completar a demonstração. No que segue  $M$  será uma variedade compacta e conexa de dimensão 3.

**Teorema 1.16** *Se  $X$  é um fluxo seccional-Anosov em  $M$  satisfazendo  $\Omega(X) = M(X)$ , então todo atrator de todo campo vetorial  $C^1$  próximo a  $X$  possui uma singularidade.*

**Lema 1.17 (Seccional-Anosov Connecting Lemma)** *Seja  $X$  um campo seccional-Anosov em uma variedade compacta de dimensão três  $M$ , e sejam  $p \in M(X)$  tal que seu  $\alpha$ -limite é não singular, e  $q \in M$  tal que para todo  $\varepsilon > 0$  existe um segmento de órbita partindo de um ponto  $\varepsilon$ -próximo de  $p$  e chegando a um ponto  $\varepsilon$ -próximo de  $q$ . Então, existe um ponto  $x \in M$  tal que  $\alpha(x) = \alpha(p)$  e  $\omega(x)$  ou é uma singularidade, ou é igual a  $\omega(p)$ .*

Para a demonstração veja [9].

Com o Teorema 1.16 e o seccional-Anosov connecting lemma nós obtemos o seguinte.

**Corolário 1.18** *Se  $X$  é um fluxo seccional-Anosov com singularidades em  $M$  satisfazendo  $\Omega(X) = M(X)$ , então todo campo vetorial  $C^1$  próximo a  $X$  satisfaz a Propriedade (P).*

*Demonstração:* Pelo seccional-Anosov connecting lemma é suficiente mostrar que

$$Cl(W_Y^u(O)) \cap Sing(Y) \neq \emptyset$$

para todo campo vetorial  $Y$  próximo de  $X$ , e toda órbita periódica  $O$  de  $Y$ .

Suponha, por contradição que existe  $Y$  próximo a  $X$  com uma órbita periódica  $O$  tal que  $Cl(W_Y^u(O)) \cap Sing(Y) = \emptyset$ . Segue que  $Cl(W_Y^u(O))$  é um conjunto hiperbólico por [62]. Como  $W_Y^u(O)$  é uma subvariedade de dimensão dois podemos provar que  $Cl(W_Y^u(O))$  é um pré-atrator para  $Y$ . Esse conjunto necessariamente contém um atrator hiperbólico. No entanto, tais atratores não existem pelo Teorema 1.16.

□

# Capítulo 2

## Expansividade

### 2.1 Introdução

Primiramente vamos estabelecer as definições de expansividade comentadas anteriormente:

Seja  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  o conjunto de todas as funções contínuas  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Definimos

$$B = \left\{ h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, h(s) > h(t), \text{ se } s > t, \text{ e } h(0) = 0 \right\}.$$

**Definição 2.1** Dizemos que um fluxo  $X_t$  é Bowen-expansivo se para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para quaisquer  $x, y \in M(X)$ , se existe  $h \in B$  tal que

$$d(X_t(x), X_{h(t)}(y)) \leq \delta \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

então

$$y \in X_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(x) := \left\{ X_t(x) : -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon \right\}.$$

Além disso, dizemos que um campo vetorial é Bowen-expansivo se o fluxo gerado por esse campo for Bowen-expansivo.

Se a variedade  $M$  tem bordo vazio, a definição acima é equivalente a dizer que para

todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para quaisquer  $x, y \in M$ , se existe  $h \in B$  tal que

$$d(X_t(x), X_{h(t)}(y)) \leq \delta \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

então

$$y \in X_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(x) := \left\{ X_t(x) : -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon \right\}.$$

Como mencionado na introdução, os fluxos Bowen-expansivos em variedades sem fronteira não admitem singularidades. Nós vamos demonstrar esse fato que foi provado no paper original de Bowen. Para isso precisamos do seguinte resultado, que foi mostrado para fluxos sem singularidades por Bowen, e para fluxos com singularidades por Oka.

**Teorema 2.2** *As seguintes condições são equivalentes para um fluxo  $X_t$ :*

(i)  $X_t$  é Bowen-expansivo;

(ii) Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $x, y \in M$  são tais que  $d(X_t(x), X_{\alpha(t)}(y)) < \delta$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e alguma  $\alpha \in B$ , então  $y = X_{t_0}(x)$  para algum  $t_0 \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ .

(iii) Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $x, y \in M$  são tais que  $d(X_t(x), X_{\alpha(t)}(y)) < \delta$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e alguma  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua com  $\alpha(0) = 0$ , então  $y = X_{t_0}(x)$  para algum  $t_0 \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ .

*Demonstração:* Ver [70].

□

**Lema 2.3** *Seja  $X$  um campo vetorial Bowen-expansivo. Então  $X$  não admite singularidades.*

*Demonstração:* Suponha que  $X$  admite uma singularidade  $p \in M$ . Então  $X_t(p) = p$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Fixamos  $\varepsilon > 0$ . Sendo  $M$  uma variedade compacta e o fluxo contínuo, para todo  $\delta > 0$  existe  $q \in M$  tal que  $0 < d(p, q) < \delta$ .

Pelo teorema anterior, se encontrarmos uma função  $\alpha$  contínua e que fixa o zero tal que  $d(X_{\alpha(t)}(p), X_t(q)) < \delta$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , então existe  $\alpha' \in B$  tal que  $d(X_{\alpha'(t)}(p), X_t(q)) < \delta$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Sendo assim, pela definição de Bowen-expansividade, temos que  $q \in X^{[-\varepsilon, \varepsilon]}(p)$ .

Definindo  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\alpha(t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , nós temos que

$$d(X_t(p), X_t(q)) = d(p, q) < \delta, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Por Bowen-expansividade, temos que  $p$  e  $q$  devem pertencer à mesma órbita. Como  $p$  é uma singularidade, isso implica que  $p = q$ , o que é uma contradição uma vez que  $0 < d(p, q)$ .

□

Agora apresentaremos a definição de expansividade dada por Komuro. Definimos

$$K = \left\{ h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : h(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \text{ e } h(s) > h(t), \text{ se } s > t \right\}.$$

**Definição 2.4** Dizemos que um fluxo  $X_t$  é Komuro-expansivo se para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para quaisquer  $x, y \in M$ , se existe  $h \in K$  tal que

$$d(X_t(x), X_{h(t)}(y)) \leq \delta \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

então podemos encontrar  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$X_{h(t_0)}(y) \in X_{[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}(x) = \left\{ X_t(x) : t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon \right\}.$$

Além disso, dizemos que um campo vetorial é Komuro-expansivo se o fluxo gerado por tal campo for Komuro-expansivo.

Se a variedade  $M$  tem bordo vazio, a definição acima é equivalente a dizer que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para quaisquer  $x, y \in M$ , se existe  $h \in K$  tal que

$$d(X_t(x), X_{h(t)}(y)) \leq \delta \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

então

$$y \in X_{[-\epsilon, \epsilon]}(x) := \left\{ X_t(x) : -\epsilon \leq t \leq \epsilon \right\}.$$

Na primeira seção desse capítulo nós procuramos condições necessárias para um campo vetorial pertencer a essa classe de campos de maneira robusta. Especificamente, nós investigamos a classe dos campos vetoriais que são robustamente Komuro expansivos.

Definimos por  $E(M)$  o conjunto de todos os campos vetoriais de classe  $C^1$  que são Komuro-expansivos.

**Definição 2.5** *Dizemos que um campo vetorial é  $C^1$ -robustamente Komuro-expansivo se ele pertence ao interior  $C^1$  de  $E(M)$ . Denotaremos por  $\varepsilon(M)$  o conjunto de todos os campos vetoriais  $C^1$ -robustamente Komuro-expansivos.*

O resultado principal da Seção 2.2 é o seguinte:

**Teorema A** *Se  $X \in \varepsilon(M)$  então  $X \in \mathcal{G}^1(M)$ .*

Esse resultado foi provado em [67] para campos Bowen-expansivos. Aqui nós usamos métodos similares. A diferença está no fato de campos Bowen-expansivos não admitirem singularidades e aqui nós temos que levá-las em consideração.

Podemos enunciar, então, nosso corolário que segue do teorema acima e de um importante resultado de dicotomia devido a Morales e Pacífico, [63].

**Corolário 2.6** *Se  $\dim(M) = 3$ , então existe um residual  $\mathcal{R} \subset \varepsilon(M)$  tal que qualquer campo vetorial em  $\mathcal{R}$  é seccional-Axioma A.*

Na Seção 2.3 nós apresentaremos um resultado de classificação em campos Bowen-expansivos:

**Teorema B** *Para uma variedade  $M$  sem bordo existe um subconjunto residual  $\mathcal{R}$  de  $\mathfrak{X}^1(M)$  tal que se  $X \in \mathcal{R}$  é Bowen-expansivo, então  $X$  é um campo Axioma A sem ciclos.*

## 2.2 Komuro-expansividade Robusta

Nessa seção iremos provar o Teorema A. Nós primeiramente vamos mostrar que todas as singularidades de um campo Komuro-expansivo são isoladas, depois iremos demonstrar o teorema. A prova segue por contradição, assumindo que existe um campo vetorial  $Z$  arbitrariamente próximo de  $X$  que admite uma órbita fechada não hiperbólica. Para tal, nós dividimos a prova em duas partes, a primeira assumindo que  $Z$  admite uma singularidade não hiperbólica, e a segunda assumindo que  $Z$  admite uma órbita periódica não hiperbólica. Finalmente, iremos demonstrar o Corolário 2.6.

Como dito anteriormente, campos Komuro-expansivos admitem singularidades. No entanto é possível mostrar, usando idéias análogas às do Lema 2.3 que o conjunto de singularidades é um conjunto isolado.

**Lema 2.7** *Seja  $X$  um campo vetorial Komuro-expansivo. Então o conjunto das singularidades de  $X$ ,  $Sing(X)$ , é um conjunto isolado.*

*Demonstração:* Do contrário, para cada  $\varepsilon > 0$  existiriam  $x, y \in Sing(X)$  tais que

$$0 < d(x, y) < \varepsilon,$$

e como  $d(X_t(x), X_t(y)) = d(x, y)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , nós temos

$$0 < d(X_t(x), X_t(y)) < \varepsilon, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Então  $y$  pertence a órbita de  $x$ , o que é uma contradição uma vez que  $x, y \in Sing(X)$  e  $0 < d(x, y)$ .

□

Agora vamos à demonstração do Teorema A:

*Demonstração (Demonstração do Teorema A):* Nós vamos fazer a demonstração para

$$\partial M = \emptyset.$$

Suponha por contradição que  $X \notin \mathcal{G}^1(M)$ , ou seja, para cada vizinhança  $U$  de  $X$  em  $\mathfrak{X}^1(M)$  existe um campo vetorial  $Z$  que admite uma órbita periódica não hiperbólica. Então podemos assumir que arbitrariamente próximo de  $X$ , na topologia  $C^1$ , existe um campo vetorial  $Z$  que é robustamente Komuro-expansivo e existe  $p \in M$  em uma órbita fechada não hiperbólica para  $Z$ .

Vamos supor primeiramente que  $p$  é uma singularidade não hiperbólica. Então podemos assumir que  $D_p Z$  admite um autovalor  $\lambda$  tal que sua parte real  $Re(\lambda)$  é nula. Denotamos por  $E$  o autoespaço associado a  $\lambda$ . Seja  $U(Z) \subset \mathfrak{X}^1(M)$  uma vizinhança  $C^1$  do campo vetorial  $Z$  tal que todo campo  $Y$  em  $U(Z)$  é Komuro-expansivo. Como estamos nas hipóteses do Lema 1.6, podemos tomar  $\delta_0$  e  $\varepsilon_0$  dados por tal lema. Agora dividiremos a prova em duas partes:

*Caso 1:*  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

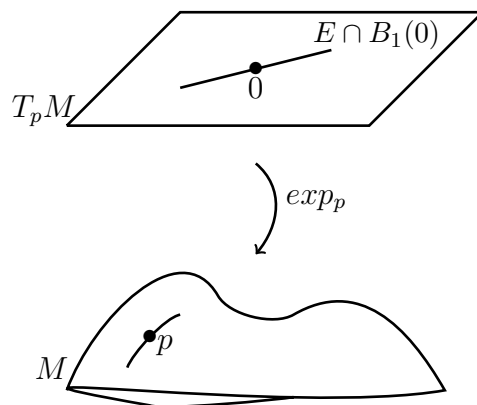
Como  $Re(\lambda) = 0$ , então  $\lambda = 0$ .

Seja  $O_\delta = D_p Z$ . Então, pelo Lema 1.6, existe um campo vetorial  $Y \in U(Z)$ , e portanto robustamente Komuro-expansivo, tal que:

$$Y(x) = \begin{cases} (D_{exp_p^{-1}(x)} exp_p) \circ D_p Z \circ exp_p^{-1}(x), & \text{se } x \in B_{\varepsilon_0/4}(p) \\ X(x), & \text{se } x \notin B_{\varepsilon_0}(p). \end{cases}$$

Para cada  $x \in exp_p(B_1(0) \cap E)$  vale que:

$$Y(x) = (D_{exp_p^{-1}(x)} exp_p) \circ D_p Z \circ exp_p^{-1}(x) = D_{exp_p^{-1}(x)} exp_p(0) = 0.$$



**Figura 1**

Como  $\exp_p(B_1(0) \cap E)$  é uma curva na variedade contendo a singularidade  $p$ , a equação acima nos diz que existe uma curva formada por singularidades. Isto é uma contradição uma vez que  $Y$  é Komuro-expansivo, e pelo Lema 2.7, sabemos que toda singularidade é isolada.

*Caso 2:*  $\lambda \notin \mathbb{R}$ .

Como  $\lambda$  é autovalor de  $D_p Z$ , então sua forma de Jordan é dada por

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B \end{pmatrix}$$

onde cada  $J_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  é um bloco de Jordan, e  $B$  é o bloco de Jordan associado ao autovalor  $\lambda$ .

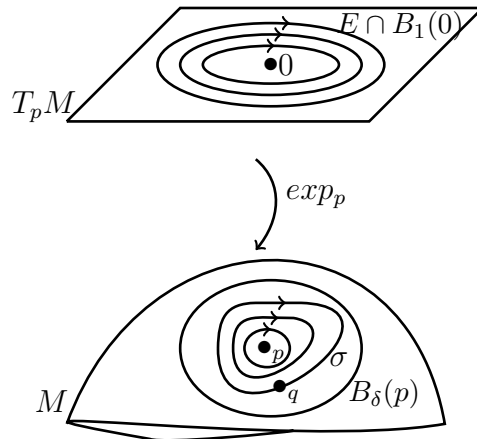
Seja  $A : T_p M \rightarrow T_p M$  tal que sua matriz na base associada  $J$  seja dada por

$$A = \begin{pmatrix} Q_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & Q_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B \end{pmatrix},$$

onde  $Q_i = J_i$  se o autovalor associado a  $J_i$  tem parte real diferente de zero, e  $Q_i = \eta J_i$  se o autovalor associado a  $J_i$  tem parte real igual a zero.

Então,  $A$  é um isomorfismo linear tal que  $\lambda$  e seu conjugado são os únicos autovalores com parte real nula. Se tomarmos  $\eta$  suficientemente próximo de 1, podemos assumir, também, que  $\|A - D_p Z\| < r_0$ . Pelo Lema 1.6, existe um campo vetorial  $Y \in U(Z)$ , e portanto  $C^1$  robustamente Komuro-expansivo, tal que:

$$Y(x) = \begin{cases} (D_{\exp_p^{-1}(x)} \exp_p) \circ A \circ \exp_p^{-1}(x), & \text{se } x \in B_{\varepsilon_0/4}(p) \\ Z(x), & \text{se } x \notin B_{\varepsilon_0}(p). \end{cases}$$



**Figura 2**

Como  $A$  é uma transformação linear tal que  $\dim E = 2$ , e  $Y$  é uma linearização de  $A$ , então para cada  $\delta > 0$  existe uma órbita periódica  $\sigma \subset B_\delta(p)$  tal que  $p \notin \sigma$ . Tomando

$q \in \sigma$ , temos que

$$d(Y_t(x), p) = d(Y_t(x), Y_t(p)) < \varepsilon_0 < \delta, \forall t \in \mathbb{R},$$

e pela condição do fluxo ser Komuro-expansivo, vale que  $x \in Y^{[-\varepsilon, \varepsilon]}p$ , o que é uma contradição.

Isso prova que se  $X$  é robustamente Komuro-expansivo, então existe uma vizinhança  $U(X)$  em  $\mathfrak{X}^1(M)$  tal que todas as singularidades de todo campo vetorial  $Z \in U(X)$  são hiperbólicas. Agora nós iremos considerar o caso de órbitas periódicas. Nós seguiremos as idéias usadas na demonstração de [68, Proposição 1], usando o Lema 1.8.

Agora vamos supor, por contradição, que  $p \in Per(Z)$  não é hiperbólico.

Sejam  $T$  o período de  $p$ , e  $f : \Pi_{p, r_0} \rightarrow \Pi_p$  a aplicação de Poincaré para  $p$ , onde  $r_0$  é um número positivo tal que  $f$  está bem definida. Seja, também,  $\tau : \Pi_{p, r_0} \rightarrow \mathbb{R}$ , o tempo de primeiro retorno. Como  $p$  é um ponto periódico não hiperbólico para  $Z$ , então  $p$  é um ponto fixo não hiperbólico para  $f$ . Isso significa que existe um autovalor  $\lambda$  para a aplicação linear  $D_p f$  tal que  $|\lambda| = 1$ .

Fixando  $r = r_0$  e o isomorfismo linear  $O_\delta = D_p f : N_p \rightarrow N_p$  nas hipóteses do Lema 1.8, temos garantida a existência de um campo vetorial  $Y \in U(Z)$  cujo fluxo  $Y_t$  é Komuro-expansivo e tal que:

(i)  $Y(x) = Z(x)$ , se  $x \notin F_p(Z_t; r_0; T)$ ,

(ii)  $p \in \Lambda \in PO(Y_t)$ ,

(iii)

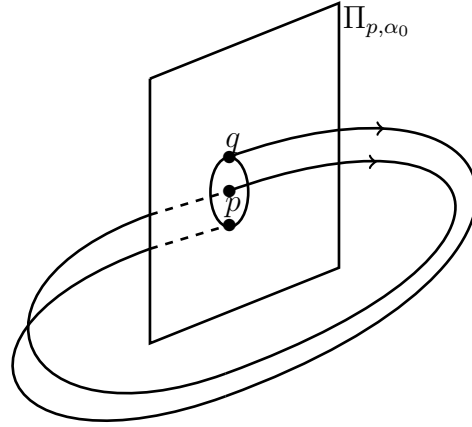
$$g_Y(x) = \begin{cases} \exp_p \circ D_p f \circ \exp_p^{-1}(x), & \text{se } x \in B_{\varepsilon_0/4}(p) \cap \Pi_{p, r_0} \\ f(x), & \text{se } x \notin B_{\varepsilon_0}(p) \cap \Pi_{p, r_0}, \end{cases}$$

onde  $g_Y : \Pi_{p, r_0} \rightarrow \Pi_p$  é a aplicação de Poincaré para o campo  $Y$  no ponto periódico  $p$ .

Agora queremos provar que para cada  $\delta > 0$  existem  $q \in \Pi_{p,r_0}$  e uma parametrização  $\alpha \in K$  tais que

$$d(Y_t(p), Y_{\alpha(t)}(q)) < \delta, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Uma vez que isto esteja provado, teremos, por expansividade, que  $x = \exp_p(u) \in Y^{[-\varepsilon, \varepsilon]}(p)$ , o que é uma contradição uma vez que  $x \neq p$ .



**Figura 3**

Para provar este fato, fixamos  $\delta > 0$ .

Por continuidade do fluxo, fixado o intervalo  $[0, T]$ , existe  $\xi_0 > 0$  tal que se  $d(x, p) < \xi_0$ , então  $d(X_t(x), X_t(p)) < \frac{\delta}{2}$  para todo  $t \in [0, T]$ . Além disso, existe  $\eta > 0$  tal que

$$d(X_t(x), x) < \frac{\delta}{2}, \quad \text{para todo } t \in [0, 2\eta].$$

Por outro lado, sendo  $\tau$  uma aplicação de classe  $C^1$ , existe  $\xi_1 > 0$  tal que se  $x \in \Pi_{p,r_0}$  e  $d(p, x) < \xi_1$ , então  $|\tau(p) - \tau(x)| < \frac{\eta}{2}$ .

Seja  $v \in T_p M \setminus \{0\}$  um autovetor associado ao autovalor  $\lambda$ . Como  $|\lambda| = 1$ , segue que

$$\|D_p g_Y \cdot v\| = \|v\|.$$

Diminuindo  $\|v\|$ , se necessário, podemos assumir que  $\|v\| < \min\{\xi_0, \xi_1\}$ . Definimos  $q = \exp_p(v)$ .

Vamos construir, então, uma  $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, \tau(q)]$  crescente que vale a desigualdade (2.1) para todo  $t \in [0, T]$ ,  $\alpha(0) = 0$  e  $\alpha(T) = \tau(q)$ . Há três hipóteses a considerar:  $\tau(q) < T$ ,  $\tau(q) = T$  e  $\tau(q) > T$ .

Se  $\tau(x) = T$ , então podemos tomar  $\alpha(t) = t$  para todo  $t \in [0, T]$  e teremos  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(T) = T = \tau(q)$ , e

$$d(X_{\alpha(t)}(q), X_t(p)) = d(X_t(q), X_t(p)) < \frac{\delta}{2} < \delta, \quad \forall t \in [0, T].$$

Se  $\tau(q) > T$ , definimos

$$\alpha(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in [0, T - \eta]; \\ \frac{\tau(q) - T + \eta}{\eta}(t - T) + \tau(q), & \text{se } t \in [T - \eta, T]. \end{cases}$$

Então  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(T) = \tau(q)$  e, se  $t \in [0, T - \eta]$  então

$$d(X_{\alpha(t)}(q), X_t(p)) = d(X_t(q), X_t(p)) < \frac{\delta}{2} < \delta,$$

e se  $t \in [T - \eta, T]$ , então  $|\alpha(t) - t| < \eta$ , o que implica em  $d(X_{\alpha(t)}(q), X_t(q)) < \frac{\delta}{2}$ , e portanto

$$d(X_{\alpha(t)}(q), X_t(p)) \leq d(X_{\alpha(t)}(q), X_t(q)) + d(X_t(q), X_t(p)) < \delta.$$

Analogamente, para o caso  $\tau(q) < T$ , definimos

$$\alpha(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in [0, \tau(q) - \eta]; \\ \frac{\eta}{T - \tau(q) + \eta}(t - T) + \tau(q), & \text{se } t \in [\tau(q) - \eta, T]. \end{cases}$$

Então  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(T) = \tau(q)$  e, se  $t \in [0, \tau(q) - \eta]$  então

$$d(X_{\alpha(t)}(q), X_t(p)) = d(X_t(q), X_t(p)) < \frac{\delta}{2} < \delta,$$

e se  $t \in [\tau(q) - \eta, T]$ , então

$$|\alpha(t) - t| < T - \tau(q) + \eta < 2\eta,$$

o que implica em  $d(X_{\alpha(t)}(q), X_t(q)) < \frac{\delta}{2}$ , e portanto

$$d(X_{\alpha(t)}(q), X_t(p)) \leq d(X_{\alpha(t)}(q), X_t(q)) + d(X_t(q), X_t(p)) < \delta.$$

Definida desta forma,  $\alpha$  é uma função contínua e crescente tal que

$$d(Y_{\alpha(t)}(x), Y_t(p)) < \delta, \forall t \in [0, T].$$

Agora podemos estender  $\alpha$  a toda a reta real fazendo

$$\alpha(t) = \alpha(t - [t/T]T),$$

onde  $[t/T]$  é o maior número inteiro menor que  $t/T$ .

Definida desta forma,  $\alpha$  é uma função em  $K$  tal que vale a desigualdade (2.1). Então, por Komuro-expansividade,  $q$  deve pertencer a órbita de  $p$ , o que é uma contradição.

**Observação 2.8** *A demonstração anterior é válida para o caso  $\partial M \neq \emptyset$ . Para isto basta considerar  $U$  um bloco isolador para o maximal invariante  $M(X)$  e tomar, em cada um dos casos,  $q$  em  $U$ . Em todos os casos a órbita de  $q$  pelo fluxo perturbado  $Y$  está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$  e está inteiramente contida em  $U$ , portanto está contida em*

$$\Lambda_Y = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} (X_t(U)).$$

□

Daqui até o final desta seção, vamos assumir que a dimensão da variedade  $M$  é 3.

*Demonstração (Corolário 2.6):* Sejam  $X \in \varepsilon(M)$  e  $\mathcal{U}$  uma vizinhança de  $X$  em  $\varepsilon(M)$ . Nós vamos usar um importante resultado de Pliss [83]. Também pode-se encontrar esse resultado em [29, pg. 128].

**Teorema 2.9** *Se  $Y$  admite infinitos poços, então para cada  $\varepsilon > 0$  existe um campo vetorial  $Z$ ,  $C^1$ -próximo de  $Y$  tal que  $Z$  admite pelo menos uma órbita periódica não hiperbólica.*

Como  $X$  pertence a  $\mathcal{G}^1(M)$ , então todo  $Y \in \mathcal{U}$  admite um número finito de órbitas periódicas que são poços e fontes. Como as singularidades de  $Y$  são isoladas,  $Y$  admite um número finito de singularidades que são poços e fontes. Segue que para todo campo vetorial em  $\mathcal{U}$  o primeiro item do resultado de dicotomia dado pelo Teorema 1.9 não pode ocorrer. Portanto, se  $\mathcal{R}$  é um conjunto residual dado pelo Teorema 1.9, então  $\mathcal{R} \cap \mathcal{U}$  também é um subconjunto residual de  $\mathcal{U}$  e é tal que qualquer  $Y \in \mathcal{R} \cap \mathcal{U}$  é um campo vetorial seccional-Axioma A.

□

## 2.3 Bowen-expansividade e Órbitas Periódicas

Nesta seção nós demonstraremos o Teorema B. A demonstração é feita seguindo a linha de [3]. Primeiramente nós vamos precisar estabelecer a seguinte noção:

**Definição 2.10** *Dado  $\delta > 0$ , definimos que um ponto periódico cuja órbita é hiperbólica  $p$  de  $X$  admite um autovalor hiperbólico  $\delta$ -fraco se existe um multiplicador característico  $\sigma$  de  $p$  tal que*

$$(1 - \delta) \leq \sigma \leq (1 + \delta).$$

Para simplificar a notação nós diremos que  $p$  tem um  $ah\delta$ -f significando que  $p$  tem um autovalor hiperbólico  $\delta$ -fraco. Diremos também que  $X$  não tem  $ah\delta$ -f, significando que não existe ponto periódico que admite  $ah\delta$ -f. Também diremos que o ponto periódico tem espectro real se todos os multiplicadores característicos da órbita periódica são reais, e diremos que o ponto periódico tem espectro simples se todos os seus autovalores têm multiplicidade um.

Nesta seção nós consideraremos  $\partial M = \emptyset$ .

**Lema 2.11** *Existe um subconjunto residual  $\mathcal{R}$  de  $\mathfrak{X}^1(M)$  tal que se  $X \in \mathcal{R}$ , então:*

1. Se, para todo  $\varepsilon > 0$  e toda vizinhança  $C^1$ ,  $\mathcal{U}$ , de  $X$  existem  $Y \in \mathcal{U}$ ,  $p_Y, q_Y \in Per_h(Y)$  e uma função contínua e crescente  $\alpha : [0, T(p_Y)] \rightarrow [0, T(q_Y)]$  tal que  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(T(p_Y)) = T(q_Y)$  e  $d(Y_{\alpha(t)}(p_Y), Y_t(q_Y)) < \varepsilon \forall t \in [0, T(p_Y)]$ , então existem  $p, q \in Per_h(X)$  e uma função crescente e contínua  $\alpha' : [0, T(p)] \rightarrow [0, T(q)]$  tal que  $\alpha'(0) = 0$ ,  $\alpha'(T(p)) = T(q)$  e  $d(Y_{\alpha'(t)}(p), Y_t(q)) < 2\varepsilon \forall t \in [0, T(p)]$ .
2. Fixamos  $\delta > 0$ . Se, para cada vizinhança  $C^1$ ,  $\mathcal{U}$ , de  $X$  existem  $Y \in \mathcal{U}$  que admite  $p_Y \in Per_h(Y)$  com um  $ah\delta$ -f, então, existe  $p \in Per_h(X)$  que admite um  $ah(2\delta)$ -f.
3. Fixamos  $\delta > 0$ . Se para cada vizinhança  $C^1$ ,  $\mathcal{U}$ , de  $X$  existe  $Y \in \mathcal{U}$  que admite  $p_Y \in Per_h(Y)$  com um  $ah\delta$ -fe espectro real e simples, então existe  $p \in Per_h(X)$  com um  $ah(2\delta)$ -f e espectro real e simples.
4. Fixamos  $\delta > 0$ . Se existe  $q \in Per_h(X)$  com  $ah\delta$ -f, e espectro real, então existe  $p \in Per_h(X)$  com um  $ah(2\delta)$ -f com espectro real e simples.

Aqui, denotaremos por  $T(p)$  e  $T(q)$  os períodos de  $p$  e  $q$ , respectivamente, por  $X$ , e denotaremos por  $T(p_Y)$  e  $T(q_Y)$  os períodos de  $p_Y$  e  $q_Y$ , respectivamente, por  $Y$ .

*Demonstração:* Começamos com o item (1). Como  $M$  é compacta, podemos tomar  $\{\mathcal{V}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma base enumerável de abertos para  $M$ , e definir o conjunto

$$\begin{aligned}
H_n(\varepsilon) = \{Z \in \mathfrak{X}^1(M) : & \text{ existem } p, q \in \mathcal{V}_n \cap Per_h(Z) \text{ e um função crescente} \\
& \text{ e contínua } \alpha : [0, T(p)] \rightarrow [0, T(q)] \text{ tal que } \alpha(0) = 0, \\
& \alpha(T(p)) = T(q) \text{ e } d(Z_{\alpha(t)}(p), Z_t(q)) < \varepsilon \forall t \in [0, T(p)]\}
\end{aligned}$$

Afirmamos que  $H_n(\varepsilon)$  é um conjunto aberto em  $\mathfrak{X}^1(M)$ . De fato, tomamos  $Z \in H_n(\varepsilon)$ . Então existem  $p, q \in Per_h(Z)$  e uma função  $\alpha$  como acima e tal que

$$d(Z_{\alpha(t)}(p), Z_t(q)) < \varepsilon' \forall t \in [0, T(p)]$$

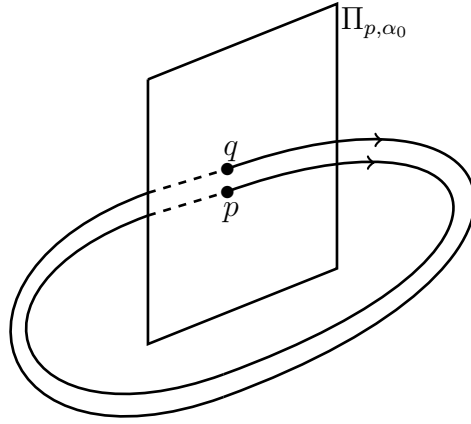
para algum  $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ . Estendendo  $\alpha$  por

$$\alpha(t) = \alpha(t - [t/T(p)]T(p)), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde  $[t/T(p)]$  é o maior número inteiro menor que  $\frac{t}{T(p)}$  nós temos que,

$$d(Z_{\alpha(t)}(p), Z_t(q)) < \varepsilon' \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, a desigualdade acima é verdadeira para todo  $t \in [0, 2T(p)]$ .



**Figura 4**

Seja  $\eta = (\varepsilon - \varepsilon')/3 > 0$ .

Como as órbitas de  $p$  e  $q$  são hiperbólicas, para cada  $Y \in \mathfrak{X}^1(M)$  suficientemente próximo de  $Z$ , existem continuações  $p_Y$  e  $q_Y$  em  $\mathcal{V}_n$ , que são pontos periódicos e hiperbólicos para o campo  $Y$  e

$$d(Y_t(p_Y), Z_t(p)) < \eta \quad \text{e} \quad d(Y_t(q_Y), Z_t(q)) < \eta, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Seja  $\zeta > 0$  tal que  $d(Y_t x, x) < \eta$  para todo  $t \in [-2\zeta, 2\zeta]$  e todo  $Y$  suficientemente próximo de  $Z$ . Podemos assumir, também, que  $|T(q_Y) - T(q)| < \zeta$ .

Agora nós iremos contruir  $\alpha' : [0, T(p_Y)] \rightarrow [0, T(q_Y)]$  tal que

$$\alpha'(0) = 0, \quad \alpha'(T(p_Y)) = T(q_Y) \quad \text{e} \quad d(Y_{\alpha'(t)}(p_Y), Y_t(q_Y)) < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T(p_Y)].$$

Pelas propriedades do campo  $Z$ , nós temos que

$$\begin{aligned} d(Y_{\alpha(t)}(p_Y), Y_t(q_Y)) &\leq d(Y_{\alpha(t)}(p_Y), Z_{\alpha(t)}(p)) + d(Z_{\alpha(t)}(p), Z_t(q)) + d(Z_t(q), Y_t(q_Y)) \\ &< \varepsilon' + 2\eta < \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, 2T(p)]$ .

Portanto, nós podemos assumir que a desigualdade acima é verdadeira para todo  $t \in [0, T(p_Y)]$ .

Agora nós temos duas possibilidades a considerar:

$$\alpha(T(p_Y)) = T(q_Y) \quad \text{e} \quad \alpha(T(p_Y)) \neq T(q_Y).$$

No primeiro caso, nós podemos definir  $\alpha' = \alpha$  e  $\alpha'$  é tal que  $\alpha'(0) = 0$ ,  $\alpha'(T(p_Y)) = T(q_Y)$  e ainda

$$d(Y_{\alpha(t)}(p_Y), Y_t(q_Y)) < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \in [0, T(p_Y)].$$

No segundo caso, pela continuidade da função  $\alpha$ , existe  $\xi > 0$  tal que

$$|t - T(p_Y)| < 2\xi \quad \Rightarrow \quad |\alpha(t) - \alpha(T(p_Y))| < \zeta.$$

Nós podemos assumir que  $2\xi < \zeta$ , e definimos:

$$\alpha'(t) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{se } t \in [0, T(p_Y) - \xi]; \\ \frac{T(q_Y) - \alpha(T(p_Y) - \xi)}{\xi}(t - T(p_Y) + \xi) + \alpha(T(p_Y) - \xi), & \text{se } t \in [T(p_Y) - \xi, T(p_Y)]. \end{cases}$$

Então  $\alpha'$  é uma função crescente e contínua tal que  $\alpha'(0) = 0$  e  $\alpha'(T(p_Y)) = T(q_Y)$ .

Também, se  $t \in [0, T(p_Y) - \zeta]$ , então

$$d(Y_{\alpha'(t)}(p_Y), Y_t(q_Y)) = d(Y_{\alpha(t)}(p_Y), Y_t(q_Y)) < \varepsilon.$$

Se  $t \in [T(p_Y) - \xi, T(p_Y)]$ , nós temos que

$$\alpha(t), \alpha'(t) \in [\alpha(T(p_Y) - \xi), T(q_Y)],$$

o que significa que  $|\alpha'(t) - \alpha(t)| < 2\xi$  e então,  $d(Y_{\alpha'(t)}(p_Y), Y_{\alpha(t)}(p_Y)) < \eta$ . Portanto

$$\begin{aligned} d(Y_{\alpha'(t)}(p_Y), Y_t(q_Y)) &\leq d(Y_{\alpha'(t)}(p_Y), Y_{\alpha(t)}(p_Y)) + d(Y_{\alpha(t)}(p_Y), Y_t(q_Y)) \\ &< \eta + \varepsilon' < \varepsilon. \end{aligned}$$

Podemos concluir, então, que  $Y \in \mathcal{V}_n$ , e isso significa que  $H_n(\varepsilon)$  é um conjunto aberto em  $\mathfrak{X}^1(M)$ .

Seja

$$N_n(\varepsilon) = \mathfrak{X}^1(M) - \overline{H_n(\varepsilon)}.$$

Então  $H_n(\varepsilon) \cup N_n(\varepsilon)$  é um subconjunto aberto e denso sobre  $\mathfrak{X}^1(M)$ , o que implica que

$$\mathcal{R}(\varepsilon) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n(\varepsilon) \cup N_n(\varepsilon)$$

é um subconjunto residual em  $\mathfrak{X}^1(M)$ . Portanto

$$\mathcal{R} = \bigcap_{r > 0, r \in \mathbb{Q}} \mathcal{R}(r)$$

também é um subconjunto residual de  $\mathfrak{X}^1(M)$ .

Agora vamos tomar  $X \in \mathcal{R}$  tal que as hipóteses do item (1) são verdadeiras. Dados qualquer  $\varepsilon > 0$  e qualquer vizinhança  $C^1$ ,  $\mathcal{U}$ , de  $X$ , podemos tomar  $\varepsilon < r < 2\varepsilon$  com  $r \in \mathbb{Q}$ . Então, como  $X$  sempre admite um campo arbitrariamente próximo com dois pontos periódicos hiperbólicos em  $\mathcal{V}_n$  e uma reparametrização  $\alpha$  como na definição de  $H_n(\varepsilon)$ , existe  $Y \in \mathcal{U}$  tal que  $Y \in H_n(r)$ . Portanto  $X \in \overline{H_n(r)}$ . Como  $X \in \mathcal{R}$  nós temos que  $X \in H_n(r) \subset H_n(2\varepsilon)$ , e isso significa que existem  $p, q \in \text{Per}_h(X)$  e uma função crescente e contínua  $\alpha' : [0, T(p)] \rightarrow [0, T(q)]$  tal que  $\alpha'(0) = 0$ ,  $\alpha'(T(p)) = T(q)$  e  $d(Y_{\alpha'(t)}(p), Y_t(q)) < 2\varepsilon \forall t \in [0, T(p)]$ .

Para demonstrar o item (2) nós podemos fazer uma construção análoga usando

$$H_n(\delta) = \{Z \in \mathfrak{X}^1(M) : \text{existe } p_z \in \mathcal{V}_n \cap Per_h(Z) \text{ com um ah}\delta\text{-f}\}.$$

Nós afirmamos que se  $Z \in H_n(\delta)$ , então a órbita de  $p_z$  é hiperbólica e, portanto, todo  $Y \in \mathfrak{X}^1(M)$  suficientemente próximo a  $Z$  admite uma continuação  $p_Y$  em  $Per_h(Y)$  que admite um ah $\delta$ -f. Isso significa que  $H_n(\delta)$  é um conjunto aberto sobre  $\mathfrak{X}^1(M)$ .

Para toda seqüência  $\{Y_k \in \mathfrak{X}^1(M)\}_{k \in \mathbb{N}}$  que converge para  $Y$ , a continuação  $p_k$  está no conjunto  $Per_h(Y_k)$  para  $k$  suficientemente grande. Pela continuidade do fluxo e de sua derivada, nós podemos assumir que para  $k$  suficientemente grande,  $p_k$  admite um autovalor  $\sigma_k$  suficientemente próximo do ah $\delta$ -f de  $p$ ,  $\sigma$ . Se a afirmação acima não fosse verdadeira, nós teríamos que  $\sigma_k$  não é uma ah $\delta$ -f. Isso significa que  $(1 - \delta) > \sigma_k$  para infinitos  $k$ 's, ou  $(1 + \delta) < \sigma_k$  para infinitos  $k$ 's. Nós vamos assumir o segundo caso, o primeiro é análogo.

Seja  $\varepsilon > 0$ , então podemos tomar  $k$  suficientemente grande para que  $|\sigma - \sigma_k| < \varepsilon$ .

Então

$$(1 + \delta) < \sigma_k \quad \Rightarrow \quad (1 + \delta) < \sigma + \varepsilon.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , nós temos que  $\sigma \geq (1 + \delta)$ , o que é uma contradição.

Isso mostra que nosso conjunto  $H_n(\delta)$  é aberto. Agora, repetindo o argumento dado na demonstração do item (1) nós temos o item (2).

Para demonstrar o item (3) nós faremos a mesma construção, agora usando

$$H_n(\delta) = \{Z \in \mathfrak{X}^1(M) : \text{existe } p_z \in \mathcal{V}_n \cap Per_h(Z) \text{ que admite um ah}\delta\text{-f e espectro real e simples}\}.$$

Como os autovalores variam continuamente em relação ao campo vetorial, o conjunto acima é aberto sobre  $\mathfrak{X}^1(M)$ . Então, podemos repetir os argumetos dados anteriormente, e nós concluímos a demonstração.

Finalmente, vamos demonstrar o item (4). Suponha que existe  $X \in \mathcal{R}$ , onde  $\mathcal{R}$  é o subconjunto residual dado pelo item(3), que admite um ponto periódico hiperbólico  $q$ , e tal que a aplicação linear  $A = Df(q) : N_{p,r_0} \rightarrow N_p$  admite um autovalor complexo. Aqui  $f : \Pi_{p,r_0} \rightarrow \Pi_p$  é a aplicação de primeiro retorno de Poincaré.

Então existe uma aplicação linear  $A' : N_{p,r_0} \rightarrow N_p$  suficientemente próxima de  $A$  tal que

- ou  $A'$  tem espectro simples,
- ou  $A'$  admite dois autovalores conjugados com argumento racional

Assim, para algum  $k \in \mathbb{N}$ , os respectivos autovalores de  $(A')^k : N_{p,r_0} \rightarrow N_p$ , dado pelo segundo item acima, são reais e têm multiplicidade dois. Portanto, existe uma aplicação linear  $A'' : N_{p,r_0} \rightarrow N_p$  arbitrariamente próxima de  $A'$  e tal que seus respectivos autovalores são reais e têm multiplicidade um.

Note que toda aplicação linear  $B : N_{p,r_0} \rightarrow N_p$  suficientemente próxima de  $A''$  tem espectro real e simples. Então, podemos assumir que  $\|B - Df(p)\| < \delta_0$ , onde  $\delta_0$  e  $\varepsilon_0$  são dados pelo Lemma 1.8, e  $f : \Pi_{p,r_0} \rightarrow \Pi_p$  é a aplicação de Poincaré. Por tal lema, existe  $Y \in \mathcal{R}$  com  $p \in Per(Y)$  que tem espectro real e simples. Como os multiplicadores característicos da órbita de  $p$  e os autovalores de  $Dg_Y(p)$  são os mesmos, nós podemos aplicar o item (3) que nos garante um  $p \in Per_h(X)$  com  $ah\delta$ -f com espectro real e simples.

□

**Observação 2.12** *Segue do lema anterior que se um campo  $X \in \mathfrak{X}^1(M)$  não admite  $ah\delta$ -f, então existe uma vizinhança de classe  $C^1$  de  $X$ ,  $\mathcal{U}(X)$ , tal que todo campo vetorial  $Y \in \mathcal{U}(X)$  não admite  $ah\frac{\delta}{2}$ -f.*

**Lema 2.13** *Existe um subconjunto residual  $\mathfrak{X}^1(M)$  tal que se  $X$  é um campo vetorial Bowen-expansivo, então existe  $\delta > 0$  tal que  $X$  não admite  $ah\delta$ -f.*

*Demonstração:* Suponha por contradição que não existe subconjunto residual com tal propriedade. Seja  $\mathcal{R}$  o residual dado pelo Lema 2.11. Então existe  $X \in \mathfrak{X}^1(M)$  campo vetorial Bowen-expansivo em  $\mathcal{R}$  tal que para todo  $\delta > 0$  existe um ponto periódico hiperbólico  $p$  que admite um  $ah\delta$ -f,  $\sigma$ , que tem espectro real e simples. Isso significa que o autoespaço associado a  $\sigma$  é unidimensional.

Fixe  $\varepsilon > 0$ . Para um futuro uso do Lema 1.8, iremos tomar  $0 < \delta < \delta_0$  e  $0 < \varepsilon_0$ , onde  $\delta_0$  e  $\varepsilon_0$  são dados por tal lema. Note que  $\delta$  é menor que  $\delta_0$ , no entanto, é arbitrário.

Seja  $\mathcal{U}$  uma vizinhança  $C^1$  de  $X$  arbitrariamente pequena, e tomamos  $\zeta > 0$  tal que  $d(Y_t(x), x) < \varepsilon/2$  para todo  $t \in [-2\zeta, 2\zeta]$ , e todo  $Y \in \mathcal{U}$ .

Seja  $f : \Pi_{p,r_0} \rightarrow \Pi_p$  a aplicação de Poincaré. Então os multiplicadores característicos da órbita de  $p$  e os autovalores de  $Df(p)$  são os mesmos. Sejam  $\sigma, \lambda_1, \dots, \lambda_k$  os autovalores de  $Df(p)$  com autovetores associados dados por  $v, v_1, \dots, v_k$  respectivamente. Então

$$(1 - \delta) < \sigma < (1 + \delta).$$

Agora definimos a aplicação linear  $A : N_{p,r_0} \rightarrow N_p$  por

$$\left\{ \begin{array}{ll} A(v) = v, & \text{se } \sigma \neq 1, \\ A(v) = (1 - \frac{\delta}{k})v, & \text{se } \sigma = 1, \\ A(v_i) = \lambda_i v_i, & \text{se } \lambda_i \neq 1, \\ A(v_i) = (1 - \frac{\delta}{k})\lambda_i v_i, & \text{se } \lambda_i = 1, \end{array} \right.$$

para  $i = 1, \dots, k$ .

Então  $\|A - Df(p)\| < \delta < \delta_0$ . Pelo Lema 1.8, existe  $Y \in \mathcal{U}$  tal que

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \exp_p \circ A \circ \exp_p^{-1}(x), & \text{se } x \in B_{\varepsilon_0/4}(p) \cap \Pi_{p,r} \\ f(x), & \text{se } x \notin B_{\varepsilon_0}(p) \cap \Pi_{p,r}, \end{array} \right.$$

onde  $g : \Pi_{p,r} \rightarrow \Pi_p$  é a aplicação de Poincaré associada ao ponto periódico  $p$  por  $Y$ .

Agora podemos assumir que  $\|v\|$  é pequeno o suficiente para que  $\exp_p(v) \in B_{\varepsilon_0/4}(p) \cap \Pi_{p,r}$ . Então  $q = \exp_p(v) \in \Pi_{p,r}$  é um ponto fixo por  $g$ , que é ponto periódico para  $Y$ . Por continuidade da derivada, diminuindo  $\|v\|$ , se necessário, podemos assumir que  $q$  é hiperbólico por  $Y$ .

Novamente diminuindo  $\|v\|$  se necessário, podemos assumir que

$$d(Y_t(q), Y_t(p)) < \varepsilon/2, \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{e que} \quad |T(p) - T(q)| < \zeta,$$

onde  $T(p)$  e  $T(q)$  são os períodos de  $p$  e  $q$  por  $Y$ , respectivamente, e  $T > \max\{T(p), T(q)\}$ .

Agora temos três hipóteses a considerar:  $T(p) = T(q)$ ,  $T(p) > T(q)$  e  $T(p) < T(q)$ .

No primeiro caso, definimos  $\alpha(t) = t$  para todo  $t \in [0, T(p)]$ .

Então  $\alpha : [0, T(p)] \rightarrow [0, T(q)]$  é tal que  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(T(p)) = T(q)$  e

$$d(Y_{\alpha(t)}(p), Y_t(q)) < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T(p)].$$

No segundo caso, definimos  $\alpha : [0, T(q)] \rightarrow [0, T(p)]$  por:

$$\alpha(x) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in [0, T(q) - \zeta]; \\ \frac{T(p) - T(q) - \zeta}{\zeta}(t - T(q)) + T(p), & \text{se } t \in [T(q) - \zeta, T(q)]. \end{cases}$$

Então  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(T(q)) = T(p)$ , e

$$d(Y_{\alpha(t)}(q), Y_t(p)) = d(Y_t(q), Y_t(p)) < \varepsilon/2, \quad \forall t \in [0, T(p) - \zeta].$$

Se  $t \in [T(q) - \zeta, T(q)]$ , então

$$|\alpha(t) - t| < \zeta \quad \text{e} \quad d(Y_{\alpha(t)}(p), Y_t(p)) < \varepsilon/2.$$

Portanto

$$d(Y_{\alpha(t)}(p), Y_t(q)) < \varepsilon.$$

No terceiro caso, podemos constuir, analogamente, uma função  $\alpha : [0, T(p)] \rightarrow [0, T(q)]$  com a propriedade acima.

Note que  $X$  satisfaz as hipóteses do item (1) of Lema 2.11. Então como arbitrariamente próximo de  $X$  existe uma campo  $Y$  que admite pontos periódicos hiperbólicos e uma função  $\alpha$  como nas hipóteses do item(1), o Lema 2.11 garante que o campo vetorial original  $X$  admite pontos periódicos hiperbólicos  $p_X$  e  $q_X$  e uma função crescente e contínua  $\alpha' : [0, T(p_X)] \rightarrow [0, T(q_X)]$  tal que

$$\alpha'(0) = 0, \quad \alpha'(T(p_X)) = T(q_X), \quad \text{e} \quad d(Y_{\alpha'(t)}(p_X), Y_t(q_X)) < \varepsilon$$

para todo  $t \in [0, T(p_X)]$ .

Estendendo  $\alpha'$  por

$$\alpha'(t) = \alpha'(t - [t/T(p_X)]T(p_X)), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde  $[t/T(p_X)]$  é o maior número inteiro menor que  $\frac{t}{T(p_X)}$ , temos que,

$$d(X_{\alpha'(t)}(p_X), X_t(q_X)) < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Mostramos, assim, que para cada  $\varepsilon > 0$  podemos encontrar dois pontos periódicos e hiperbólicos  $p_X$  e  $q_X$  em órbitas distintas e uma função  $\alpha' \in K$  com

$$d(X_{\alpha'(t)}(p_X), X_t(q_X)) < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Esse fato contradiz a propriedade de Bowen-expansividade do campo  $X$ , e conclui a demonstração. □

Agora faremos a demonstração do Teorema B.

*Demonstração (Demonstração do Teorema B):* Supomos, por contradição que não existe subconjunto residual com tal propriedade. Seja  $\mathcal{R}$  o residual dado pelo Lema 2.13. Então existe  $X \in \mathcal{R}$  campo vetorial Bowen-expansivo que não é Axioma A sem ciclos.

Pelo Lema 2.3, o campo  $X$  é não singular. Pelo Teorema 2.11, para toda vizinhança  $C^1$  de  $X$  existem um campo vetorial  $Y$  nessa vizinhança, e um ponto periódico  $p$  por  $Y$  que não é hiperbólico. Então o fluxo gerado por  $Y$ ,  $Y_t$ , admite 1 como multiplicador característico, e isso significa que para todo  $\delta > 0$ ,  $Y_t$  admite um  $\text{ah}(\frac{\delta}{2})$ -f. Isso é uma contradição com o Lema 2.13 e a Observação 2.12.

□

# Capítulo 3

## Especificação Robusta para Fluxos

### 3.1 Introdução

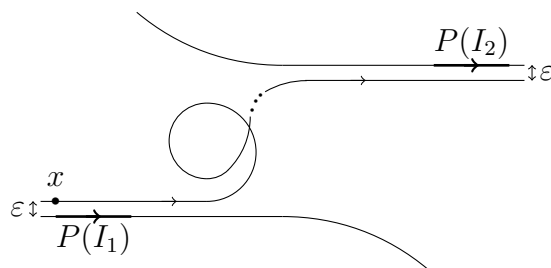
Ao longo desta seção voltamos a considerar que a variedade  $M$  tem, possivelmente, bordo não vazio. Caso o bordo seja vazio, será explicitado ao longo do texto.

Sejam  $X$  campo vetorial em  $\mathfrak{X}^1(M)$ , e  $\Lambda$  um conjunto compacto e invariante por  $X$ . Uma *especificação fraca*  $S$  consiste de dois intervalos fechados  $\{I_i = [a_i, b_i]\}_{i=1}^2$  da reta real e uma aplicação  $P : I_1 \cup I_2 \rightarrow \Lambda$  tal que para qualquer  $t_1, t_2 \in I_i$  temos que

$$X_{t_2}(P(t_1)) = X_{t_1}(P(t_2)).$$

Dizemos que  $S$  é  $K$ -espaçado se  $a_2 > b_1 + K$ . Dizemos que  $S$  é  $\varepsilon$ -sombreado por  $x \in \Lambda$  se

$$d(X_t(x), P(t)) < \varepsilon \quad \text{para todo } t \in I_1 \cup I_2.$$



**Definição 3.1** Dizemos que um conjunto compacto e invariante  $\Lambda$  de  $X$  tem a propriedade de especificação fraca se, para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe um número positivo  $K = K(\varepsilon) \in \mathbb{R}$  tal que toda especificação fraca  $K$ -espaçada  $S$  é  $\varepsilon$ -sombreada por um ponto em  $\Lambda$ . Nesse caso, dizemos que o campo vetorial  $X|_{\Lambda}$  tem a propriedade de especificação fraca. Dizemos que o campo vetorial  $X$  tem a propriedade de especificação fraca se  $M$  tem essa propriedade.

**Definição 3.2** Dizemos que um conjunto isolado  $\Lambda$  tem a propriedade de especificação fraca robustamente, se  $\Lambda$  admite um bloco isolador  $U$  e se existe uma vizinhança  $C^1$ ,  $\mathcal{U}$ , de  $X$  tal que para qualquer  $Y \in \mathcal{U}$ ,  $Y|_{\Lambda_Y(U)}$  satisfaz a propriedade de especificação fraca. Nesse caso, dizemos que o campo vetorial  $X|_{\Lambda}$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente. Dizemos que o campo vetorial  $X$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente se  $M$  satisfaz a propriedade de especificação fraca.

O principal resultado desta seção é o seguinte:

**Teorema C** *Seja  $M$  variedade compacta. Se  $X$  é um campo vetorial que satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente, então  $X_t$  é um fluxo Anosov.*

Nós apresentamos, também, uma versão semi-local para esse resultado:

**Teorema D** *Se  $\Lambda$  é um conjunto isolado que admite a propriedade de especificação fraca robustamente, então  $\Lambda$  é um conjunto transitivo seccional hiperbólico.*

Queremos enfatizar aqui que a demonstração desses resultados segue a linha de [89]. No entanto, as bifurcações são mais complicadas. De fato, temos que lidar também com a hiperbolicidade das singularidades.

## 3.2 Propriedades

Nessa seção nós obteremos algumas propriedades importantes para para fluxos nas hipóteses do Teorema C.

### 3.2.1 Mistura Topológica

**Lema 3.3** *Seja  $X$  um campo vetorial, e seja  $\Lambda$  um conjunto compacto e invariante por  $X$ . Se  $X|_{\Lambda}$  satisfaz a propriedade de especificação fraca, então o fluxo  $X_t$  é misturador topológico em  $\Lambda$ .*

*Demonstração:* Sejam  $U$  e  $V$  dois conjuntos abertos em  $\Lambda$ ,  $x_0 \in U$  e  $y_0 \in V$ . Existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_{2\varepsilon}(x_0) \subset U$  and  $B_{2\varepsilon}(y_0) \subset V$ . A propriedade de especificação fraca nos fornece um  $K > 0$ . Fixamos  $S > 0$  e definimos  $x = x_0$  e  $y = X_{-K-S}(y_0)$ , e escolhemos  $\eta > 0$  tal que, se  $I_1 = [0, \eta]$  e  $I_2 = [K + S, K + S + \eta]$  então  $X_{I_1}(x) \subset B(x_0, \varepsilon)$  e  $X_{I_2}(y) \subset B(y_0, \varepsilon)$ . isso nos fornece uma especificação  $K$ -espaçada. Então existe  $z$  que  $\varepsilon$ -sombreia essa especificação. Pela desigualdade triangular, temos que  $X_{K+S}(U) \cap V \neq \emptyset$ , e essa propriedade se mantém para todo  $S > 0$ .

□

O lema anterior garante que qualquer campo que satisfaz a propriedade de especificação fraca não admite poços ou fontes.

Agora citaremos um resultado de Vivier [98]:

**Teorema 3.4** *Se  $X$  é um campo vetorial  $C^1$  robustamente transitivo em uma variedade compacta e sem bordo, então  $X$  não admite singularidades.*

Em particular, se  $X$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente em uma variedade compacta, então  $X$  é  $C^1$ -robustamente transitivo e, portanto, não admite

singularidades.

### 3.2.2 Conexões Heteroclínicas

**Teorema 3.5** *Seja  $X$  um campo vetorial que satisfaz a propriedade de especificação fraca, então para quaisquer duas órbitas periódicas e hiperbólicas distintas  $O(p)$  e  $O(q)$ , as variedades invariantes  $W^u(O(p))$  e  $W^s(O(q))$  se intersectam.*

*Demonstração:* Nós já sabemos que  $X$  não admite poços ou fontes, portanto  $p$  e  $q$  devem ser selas. Lembre-se que existem  $\varepsilon(p) > 0$  e  $\varepsilon(q) > 0$  tais que

$$W_X^{ss}(p) = \bigcup_{t \leq 0} X_t(W_{\varepsilon(p), X}^{ss}(p)) \quad \text{e} \quad W_X^{ss}(\sigma) = \bigcup_{t \leq 0} X_t(W_{\varepsilon(\sigma), X}^{ss}(\sigma)).$$

Seja  $\varepsilon = \min\{\varepsilon(p), \varepsilon(q)\}$ , e  $K$  dados pela propriedade de especificação. Se  $t \geq K$ , então tomamos  $I_1 = [0, t]$  e  $I_2 = [K + t, K + 2t]$ . Agora definimos  $P(s) = X_{s-t}(p)$  se  $s \in I_1$  e  $P(s) = X_{s-K-t}(q)$  se  $s \in I_2$ . Note que essa é uma especificação  $K$ -espaçada.

Então, existe  $x_t$  que sombreia essa especificação fraca:

$$d(X_s(x_t), P(s)) \leq \varepsilon \text{ se } s \in I_1 \cup I_2.$$

Usando a mudança de variáveis  $u = t - s$ , para cada  $u \in [0, t]$  nós temos:

$$d(X_{-u}(X_t(x_t)), X_{-u}(p)) = d(X_{t-u}(x_t), X_{-u}(p)) \leq \varepsilon$$

e usando  $u = s - K - t$ , para cada  $u \in [K + t, K + 2t]$  nós temos

$$d(X_u(X_{K+t}(x_t)), X_u(q)) \leq \varepsilon.$$

Se  $y_t = X_t(x_t)$ , então podemos assumir que  $y_t \rightarrow y$ . E tomando o limite quando  $t$  tende ao infinito nas desigualdades acima nós obtemos

$$d(X_{-u}(y), X_{-u}(p)) \leq \varepsilon \text{ para todo } u \geq 0, \text{ e}$$

$$d(X_u(X_K(y)), X_u(q)) \leq \varepsilon \text{ para todo } u \geq 0.$$

A primeira desigualdade nos diz que  $y \in W_\varepsilon^{uu}(p) \subset W^u(O(p))$  e a segunda nos diz que  $X_K(y) \in W_\varepsilon^{ss}(q)$ , e portanto  $y \in W^s(O(q))$ .

□

**Observação 3.6** *No caso em que  $\Lambda$  é um conjunto isolado que satisfaz a propriedade de especificação fraca, então podemos refazer a demonstração acima para órbitas periódicas em  $\Lambda$  usando singularidades no lugar de órbitas periódicas.*

### 3.2.3 Índice

**Teorema 3.7** *Se  $X|_\Lambda$  é um campo vetorial que satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente, então o índice de todas as órbitas periódicas em  $\Lambda$  que são selas hiperbólicas é constante e essa propriedade é robusta com o mesmo índice.*

*Demonstração:* Seja  $X|_\Lambda$  um campo vetorial que satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente, e seja  $\mathcal{U}$  tal que todo campo em  $\mathcal{U}$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente.

Fixando  $Y \in \mathcal{U}$ , sejam  $\sigma, \tau \in \Lambda_Y(U)$  órbitas periódicas hiperbólicas para  $Y_t$  que são selas. Então, existe uma vizinhança  $C^1$ ,  $\mathcal{V}_Y \subset \mathcal{U}$ , de  $Y$  tal que para qualquer  $Z \in \mathcal{V}_Y$ , existem continuações  $\sigma_Z, \tau_Z \in \Lambda_Z(U)$  de  $\sigma$  e  $\tau$  respectivamente.

Suponha que  $\text{index}(\sigma) < \text{index}(\tau)$  (o outro caso é similar). Temos duas hipóteses a considerar:

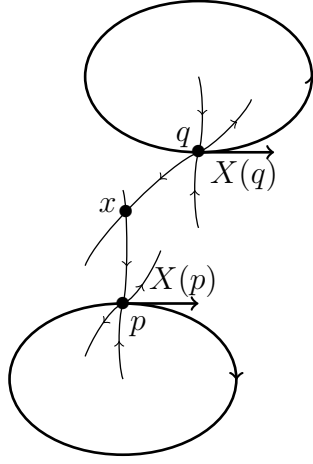
1.  $\dim W^s(\sigma) + \dim W^u(\tau) < \dim M$ ;
2.  $\dim W^s(\sigma) + \dim W^u(\tau) = \dim M$ . (esse caso ocorre quando  $\text{index}(\tau) = \text{index}(\sigma) + 1$ )

No primeiro caso podemos tomar um campo vetorial Kupka-Smale  $Z \in \mathcal{V}_Y$ . Então  $W^s(\sigma_Z) \cap W^u(\tau_Z) = \emptyset$  uma vez que

$$\dim W^s(\sigma) = \dim W^s(\sigma_Z) \quad \text{e} \quad \dim W^u(\tau) = \dim W^u(\tau_Z).$$

Por outro lado, como  $Z \in \mathcal{U}$ , então  $Z|_{\Lambda_Z(U)}$  satisfaz a propriedade de especificação, e então  $W^s(\sigma_Z) \cap W^u(\tau_Z) \neq \emptyset$  pelo Teorema 3.5, o que é uma contradição.

No segundo caso podemos tomar, novamente, um campo vetorial Kupka-Smale  $W \in \mathcal{V}_Y$ . Pelo Teorema 3.5, temos que  $W^s(\sigma_W) \cap W^u(\tau_W) \neq \emptyset$ . Tomamos  $x$  nessa interseção.



Note que  $O_W(x) \subset W^s(\sigma_W)$  e  $O_W(x) \subset W^u(\tau_W)$ . Então podemos decompor

$$T_x(W^s(\sigma_W)) = T_x(O_W(x)) \oplus E^1$$

e

$$T_x(W^u(\tau_W)) = T_x(O_W(x)) \oplus E^2.$$

Então,

$$\dim(T_x(W^s(\sigma_W)) \oplus T_x(W^u(\tau_W))) < \dim W^s(\sigma_W) + \dim W^u(\tau_W) = \dim M.$$

Portanto  $W^s(\sigma_W)$  não é transversal a  $W^u(\tau_W)$ . Isso é uma contradição uma vez que  $W$  é um campo vetorial Kupka-Smale.

□

**Observação 3.8** *Nós podemos trocar órbitas periódicas hiperbólicas por singularidades do tipo sela no Teorema anterior. Para demonstrar qesse caso é importante observar que: se  $p_1$  e  $p_2$  são singularidades, então  $W^r(O(p_i)) = W^{rr}(p_i)$ , onde  $r = u, s$  e  $i = 1, 2$  e se nós supusermos que  $\text{index}(p_1) < \text{index}(p_2)$ , o segundo caso na demonstração anterior não ocorre. Então o resto da demonstração é a mesma.*

### 3.2.4 Hiperbolicidade de Órbitas Críticas

O seguinte Teorema garante que todas as órbitas periódicas de um fluxo que satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente são hiperbólicas.

**Teorema 3.9** *Sejam  $X$  um campo vetorial,  $\Lambda$  um conjunto compacto e invariante que satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente, e  $\mathcal{U}$  uma vizinhança  $C^1$  de  $X$ . Então toda órbita periódica de  $X$  é hiperbólica.*

*Demonstração:* Faremos a demonstração por contradição. Vamos mostrar que se uma órbita periódica de  $X$  contida em  $\Lambda$  não é hiperbólica, então existe um campo vetorial  $Y \in \mathcal{U}$  com duas órbitas periódicas contidas em  $\Lambda_Y$  com índices diferentes, o que é uma contradição com o Teorema 3.7.

Sejam  $U$  um bloco isolador de  $\Lambda$ , e  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  uma vizinhança  $C^1$  de  $X$  tal que para todo campo vetorial em  $\mathcal{V}$  a continuação de  $\Lambda$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente, e  $\sigma$  uma órbita periódica por  $X$  em  $\Lambda$  que não é hiperbólica. Tomamos  $p \in \sigma$ . Sejam  $r_0 > 0$  e  $f : \Pi_{p,r_0} \rightarrow \Pi_p$  a aplicação de primeiro retorno de Poincaré por  $X$ . Como  $\sigma$  não é hiperbólico, então  $D_p f$  admite um autovalor  $\lambda$  com  $|\lambda| = 1$ .

Seja  $\mathcal{U}$  uma vizinhança  $C^1$  de  $X$  contida em  $\mathcal{V}$  arbitrariamente pequena, e sejam  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(X) > 0$  e  $\delta_0 = \delta_0(X) > 0$  dados pelo Lema 1.8. Como  $\lambda$  é autovalor de  $D_p f$ , então sua forma de Jordan é dada por

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B \end{pmatrix}$$

onde cada  $J_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  é um bloco de Jordan, e  $B$  é o bloco de Jordan associado ao autovalor  $\lambda$ .

Seja  $H : N_p \rightarrow N_p$  tal que sua matriz na base associada a  $J$  seja dada por

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & H_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B \end{pmatrix},$$

onde  $H_i = J_i$  se o autovalor associado a  $J_i$  tem norma diferente de um, e  $H_i = \eta J_i$  se o autovalor associado a  $J_i$  tem norma igual a um.

Então,  $H$  é um isomorfismo linear tal que se  $\lambda$  é real, ele é o único autovalor com norma igual a um, e se ele é complexo, então  $\lambda$  e seu conjugado são os únicos autovalores com norma um. Se tomarmos  $\eta$  suficientemente próximo de 1, podemos assumir, também, que  $\|H - D_p f\| < \delta_0$ . Podemos tomar  $0 < r < r_0$  suficientemente pequeno tal que  $F_p(X_i; r; T(p)) \subset U$  (ver definição na Seção 1.2). Pelo Lema 1.8, existe um campo vetorial  $Y \in \mathcal{U}$ , e que satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente, tal que:

$$g_Y(x) = \begin{cases} \exp_p \circ H \circ \exp_p^{-1}(x), & \text{se } x \in B_{\varepsilon_0/4}(p) \cap \Pi_{p,r} \\ f(x), & \text{se } x \notin B_{\varepsilon_0}(p) \cap \Pi_{p,r}, \end{cases}$$

onde  $g_Y : \Pi_{p,r} \rightarrow \Pi_p$  é a aplicação de Poincaré associada ao ponto periódico  $p$  por  $Y$ .

**Observação 3.10** *Isso significa que, se  $X$  é um campo vetorial que satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente, e  $p$  é ponto periódico não hiperbólico, então arbitrariamente próximo de  $X$  é possível encontrar um campo  $Y$  tal que a continuação  $\Lambda_Y$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente, e é tal que a órbita de  $p$  ainda é periódica,  $O(p) \in \Lambda_Y$ , e  $\lambda$  (e seu conjugado, possivelmente) é o único autovalor de  $D_p g_Y$  com norma um.*

Denotaremos a matriz de  $D_p Y$  na forma de Jordan por

$$D_p Y = H = \begin{pmatrix} H_s & 0 & 0 \\ 0 & H_u & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \text{ onde}$$

$$H_s = \begin{pmatrix} H_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & H_m \end{pmatrix} \text{ e } H_u = \begin{pmatrix} H_{m+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & H_k \end{pmatrix}$$

são, respectivamente, os blocos de Jordan associados aos autovalores com norma menor que um, e com norma maior que um. Denotamos por  $E_p^s$  o subespaço associado a  $H_s$ , por  $E_p^u$  o subespaço associado a  $H_u$ , por  $E_p^c$  o autoespaço associado ao autovalor  $\lambda$  de  $D_p g_Y$  e por  $\beta$  a base de  $N_p$  na qual está a matriz de Jordan. Então,

$$T_p \Pi_{p,r} = E_p^s \oplus E_p^c \oplus E_p^u.$$

Seja  $\mathcal{V}_Y$  uma vizinhança  $C^1$  de  $Y$  tal que todo campo vetorial em  $\mathcal{V}_Y$  é tal que a continuação de  $\Lambda_Y$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente. Então existem  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(Y)$  e  $\delta_0 = \delta_0(Y)$  dados pelo Lema 1.8.

- Se  $\dim E_p^c = 1$ :

Nós vamos supor que  $\lambda = 1$  e o outro caso é similar.

Então nós temos que

$$g_Y(x) = x, \quad \forall x \in \exp_p^{-1}(E_p^c) \cap B_{\varepsilon_0/4}(p) \cap \Pi_{p,r_0}.$$

Como  $x$  é um ponto fixo para  $g_Y$ , a órbita de  $x$  é periódica com período  $T_x > 0$  e, tomando  $x$  suficientemente próximo de  $p$ , nós temos que  $x \in \Lambda_Y$ . Fixamos

$$q \in \exp_p^{-1}(E_p^c) \cap B_{\varepsilon_0/4}(p) \cap \Pi_{p,r_0},$$

e tomamos  $r > 0$  tal que

$$F_p(Y_t; r; T) \cap F_q(Y_t; r; T_q) = \emptyset.$$

Por continuidade da derivada, dado  $\eta > 0$  suficientemente pequeno, tomando  $q$  suficientemente próximo de  $p$ , temos que existe uma base de  $N_p$ ,  $\beta'$ , próxima da base de Jordan de  $D_p f$ , tal que a matriz de  $D_q f$  é dada por

$$J = \begin{pmatrix} J_s & 0 & 0 \\ 0 & J_u & 0 \\ 0 & 0 & \lambda' \end{pmatrix},$$

onde  $\|J_s - H_s\| < \eta$ ,  $\|J_u - H_u\| < \eta$  e  $|\lambda - \lambda'| < \eta$ .

Podemos, então, supor que  $\eta$  é suficientemente pequeno para que os autovalores de  $H_s$  sejam menores que um, e os autovalores de  $H_u$  sejam maiores que um.

Agora temos três hipóteses a considerar:

*Caso 1:*  $1 = \lambda < \lambda'$ .

Nesse caso,  $q$  é um ponto fixo hiperbólico para  $f$ , e portanto pertence a uma órbita periódica hiperbólica para  $Y$  de índice  $index(q) = m$ . Então definimos uma aplicação

linear  $P : N_p \rightarrow N_p$  tal que na base  $\beta$  sua matriz é dada por

$$P = \begin{pmatrix} H_s & 0 & 0 \\ 0 & H_u & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \delta_0(Y) \end{pmatrix}.$$

Então, pelo Lema 1.8, existe  $Z \in \mathcal{V}_Y$  tal que a continuação  $\Lambda_Z$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente, tal que  $Z(x) = Y(x)$  para todo  $x \notin F_p(Y_t, r, T)$  e tal que

$$g_Z(x) = \begin{cases} \exp_p \circ P \circ \exp_p^{-1}(x), & \text{se } x \in B_{\varepsilon_0(Y)/4}(p) \cap \Pi_{p,r} \\ g_Y(x), & \text{se } x \notin B_{\varepsilon_0(Y)}(p) \cap \Pi_{p,r}, \end{cases}$$

onde  $g_Z : \Pi_{p,r} \rightarrow \Pi_p$  é a aplicação de primeiro retorno de Poincaré para  $Z$ .

Então  $p$  é ponto fixo hiperbólico para  $g_Z$  e portanto pertence a uma órbita periódica hiperbólica para  $Z$  de índice  $\text{index}(p) = m + 1$ . Como estamos assumindo que  $p, q \in U$  segue que  $p$  e  $q$  pertencem a continuação  $\Lambda_Z$ . Como  $F_p(Y_t; r; T) \cap F_q(Y_t; r; T) = \emptyset$ , segue que  $q$  ainda é uma órbita periódica hiperbólica para  $Z$  de índice  $\text{index}(q) = m$ . Encontramos, então, nossas duas órbitas periódicas de índices diferentes.

*Caso 2:*  $1 = \lambda > \lambda'$ .

Nesse caso,  $q$  é um ponto fixo hiperbólico para  $f$ , e portanto pertence a uma órbita periódica hiperbólica para  $Y$  de índice  $\text{index}(q) = m + 1$ . Então definimos uma aplicação linear  $P : N_p \rightarrow N_p$  tal que na base  $\beta$  sua matriz é dada por

$$P = \begin{pmatrix} H_s & 0 & 0 \\ 0 & H_u & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \delta_0(Y) \end{pmatrix}.$$

Então, pelo Lema 1.8, existe  $Z \in \mathcal{V}_Y$  tal que a continuação  $\Lambda_Z$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente, tal que  $Z(x) = Y(x)$  para todo  $x \notin F_p(Y_t, r, T)$  e tal

que

$$g_Z(x) = \begin{cases} \exp_p \circ P \circ \exp_p^{-1}(x), & \text{se } x \in B_{\varepsilon_0(Y)/4}(p) \cap \Pi_{p,r} \\ g_Y(x), & \text{se } x \notin B_{\varepsilon_0(Y)}(p) \cap \Pi_{p,r}, \end{cases}$$

onde  $g_Z : \Pi_{p,r} \rightarrow \Pi_p$  é a aplicação de primeiro retorno de Poincaré para  $Z$ .

Então  $p$  é ponto fixo hiperbólico para  $g_Z$  e portanto pertence a uma órbita periódica hiperbólica para  $Z$  de índice  $index(p) = m$ . Como estamos assumindo que  $p, q \in U$  segue que  $p$  e  $q$  pertencem a continuação  $\Lambda_Z$ . Como  $F_p(Y_t; r; T) \cap F_q(Y_t; r; T_q) = \emptyset$ , segue que  $q$  ainda é uma órbita periódica hiperbólica para  $Z$  de índice  $index(q) = m+1$ . Encontramos, novamente, nossas duas órbitas periódicas de índices diferentes.

*Caso 3:*  $1 = \lambda = \lambda'$ .

Nesse caso definimos uma aplicação linear  $P : N_p \rightarrow N_p$  tal que na base  $\beta$  sua matriz é dada por

$$P = \begin{pmatrix} H_s & 0 & 0 \\ 0 & H_u & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \delta_0(Y) \end{pmatrix},$$

Então, pelo Lema 1.8, existe  $Z \in \mathcal{V}_Y$  tal que a continuação  $\Lambda_Z$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente, tal que  $Z(x) = Y(x)$  para todo  $x \notin F_p(Y_t, r, T)$  e tal que

$$g_Z(x) = \begin{cases} \exp_p \circ P \circ \exp_p^{-1}(x), & \text{se } x \in B_{\varepsilon_0(Y)/4}(p) \cap \Pi_{p,r} \\ g_Y(x), & \text{se } x \notin B_{\varepsilon_0(Y)}(p) \cap \Pi_{p,r}, \end{cases}$$

onde  $g_Z : \Pi_{p,r} \rightarrow \Pi_p$  é a aplicação de primeiro retorno de Poincaré para  $Z$ .

Então  $p$  é ponto fixo hiperbólico para  $g_Z$  e portanto pertence a uma órbita periódica hiperbólica para  $Z$  de índice  $index(p) = m + 1$ . Como estamos assumindo que  $p \in U$  segue que  $p$  pertence a continuação  $\Lambda_Z$ .

Tomamos, novamente, uma vizinhança  $C^1$  de  $Z$ ,  $\mathcal{V}_Z$  tal que a continuação de  $\Lambda_Z$  por todo campo vetorial em  $\mathcal{V}$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente. Novamente, o Lema 1.8 nos fornece  $\delta_0 = \delta_0(Z)$  e  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(Z)$ .

Definimos, também, uma aplicação linear  $Q : N_p \rightarrow N_p$  tal que na base  $\beta'$  sua matriz é dada por

$$J = \begin{pmatrix} J_s & 0 & 0 \\ 0 & J_u & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \delta_0(Z) \end{pmatrix},$$

Então, pelo Lema 1.8, existe  $W \in \mathcal{V}_Z$  tal que a continuação  $\Lambda_W$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente, tal que  $W(x) = Z(x)$  para todo  $x \notin F_q(Z_t, r, T)$  e tal que

$$g_W(x) = \begin{cases} \exp_p \circ Q \circ \exp_p^{-1}(x), & \text{se } x \in B_{\varepsilon_0(Y)/4}(p) \cap \Pi_{p,r} \\ g_Y(x), & \text{se } x \notin B_{\varepsilon_0(Y)}(p) \cap \Pi_{p,r}, \end{cases}$$

onde  $g_W : \Pi_{p,r} \rightarrow \Pi_p$  é a aplicação de primeiro retorno de Poincaré para  $W$ . Então  $q$  é ponto fixo hiperbólico para  $g_W$  e portanto pertence a uma órbita periódica hiperbólica para  $W$  de índice  $\text{index}(p) = m$ .

Como estamos assumindo que  $p, q \in U$  segue que  $p$  e  $q$  pertencem a continuação  $\Lambda_W$ . Como  $F_p(Z_t; r; T) \cap F_q(Z_t; r; T_q) = \emptyset$ , segue que  $q$  ainda é uma órbita periódica hiperbólica para  $Z$  de índice  $\text{index}(q) = m + 1$ . Encontramos, finalmente, nossas duas órbitas periódicas de índices diferentes.

- Se  $\dim E_p^c = 2$ :

Nesse caso  $\lambda$  e seu conjugado são os únicos autovalores de norma 1. Nós vamos considerar o caso  $g_Y(p) = p$ , o outro caso é similar.

Pelo Lema 1.8 existe  $Z \in \mathcal{V}_Y$  que satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente e

$$g_Z(x) = \exp_p \circ D_p g_Y \circ \exp_p^{-1}(x), \quad \text{if } x \in B_{\varepsilon_0(Y)/4}(p).$$

Então  $D_p g_Y$  age em  $E_p^c$  como uma rotação. Se essa rotação é racional, então existe  $l > 0$  tal que  $D_p g_Y^l(v) = v$  para todo  $v \in \exp_p^{-1}(E_p^c) \cap B_{\varepsilon_0}(p)$ . Fixamos  $l$  o mínimo com essa propriedade. Como no primeiro caso, com uma pequena modificação  $C^1$ , nós podemos encontrar um campo vetorial em  $\mathcal{V}_Y$  tal que a continuação de  $\Lambda_Z$  satisfaz a propriedade de especificação fraca e possui duas órbitas periódicas de índices diferentes.

Se a rotação é irracional, existe um isomorfismo linear  $A : N_p \rightarrow N_p$  tal que

$$\|A - D_p g_Y\| < \delta_0(Y)$$

e  $A$  age em  $E_p^c$  como uma rotação racional. Então existe  $Z \in \mathcal{V}_Y$  que ainda satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente e tal que  $D_p g_Z^l(v) = v$  para todo  $v \in \exp_p^{-1}(E_p^c) \cap B_{\varepsilon_0}(p)$ , onde  $l > 0$  é o mínimo com essa propriedade. Novamente, podemos encontrar um campo vetorial em  $\mathcal{V}_Z$  tal que a continuação de  $\Lambda_Z$  satisfaz a propriedade de especificação fraca e possui duas órbitas periódicas distintas com índices diferentes.

□

No caso do fluxo  $X$  possuir a propriedade de especificação fraca robustamente, ou seja,  $\Lambda = M$ , como consequência de Teorema anterior, nós temos que existe uma vizinhança  $C^1$  de  $X$  tal que todas as órbitas periódicas de todos os campos vetoriais nessa vizinhança são hiperbólicas de mesmo índice..

As versões análogas para os resultados anteriores são verdadeiras para singularidades. Abaixo nós faremos as bifurcações necessárias para lidar com elas.

**Teorema 3.11** *Sejam  $X$  um campo vetorial,  $\Lambda$  um compacto invariante que satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente, e  $\mathcal{U}$  uma vizinhança  $C^1$  de  $X$ . Se uma singularidade de  $X$  não é hiperbólica, então existe um campo vetorial  $Y \in \mathcal{U}$  com duas singularidades em  $\Lambda_Y$  com índices diferentes.*

*Demonstração:* Sejam  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  uma vizinhança  $C^1$  de  $X$  tal que para cada campo vetorial em  $\mathcal{V}$  a continuação de  $\Lambda$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente, e  $p$  uma singularidade de  $X$  em  $\Lambda$  que não é hiperbólica. Seja, também,  $U$  um bloco isolador para  $\Lambda$ . Como  $\sigma$  não é hiperbólica, então  $D_p X$  admite um autovalor  $\lambda$  tal que sua parte real,  $Re(\lambda)$ , é nula. Seja

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_\lambda \end{pmatrix},$$

a matriz de  $D_p X$  na forma de Jordan organizada de tal forma que  $J_\lambda$  é o bloco de Jordan associado a  $\lambda$ . Seja  $\beta$  a base em que se encontra a forma de Jordan.

Pelo Lema 1.6, existem  $\delta_0 > 0$  e  $\varepsilon_0 > 0$  tais que se  $H : T_p M \rightarrow T_p M$  é uma aplicação linear tal que  $\|H - D_p X\| < \delta < \delta_0$ , então existe  $Y \in \mathcal{V}$  como no Lema.

Tomaremos, então  $\delta > 0$  arbitrariamente pequeno, e definimos o isomorfismo linear  $H : T_p M \rightarrow T_p M$  dado pela seguinte matriz na base  $\beta$ .

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & H_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_\lambda \end{pmatrix},$$

onde  $H_i = J_i$  se o autovalor associado a  $J_i$  tem parte real não nula, e  $H_i = \frac{\delta}{n+1}J_i$ , onde  $n$  é a dimensão da variedade  $M$ , se o autovalor associado a  $J_i$  tem parte real nula.

Então  $\|H - D_p X\| < \delta$ , e portanto, existe um campo vetorial  $Y \in \mathcal{V}$  tal que a continuação  $\Lambda_Y = \cap_{t \in \mathbb{R}} Y_t(U)$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente e tal que

$$Y(x) = \begin{cases} (D_{\exp_p^{-1}(x)} \exp_p) \circ H \circ \exp_p^{-1}(x), & \text{se } x \in B_{\varepsilon_0/4}(p) \\ X(x), & \text{se } x \notin B_{\varepsilon_0}(p). \end{cases}$$

Nesse caso, para  $x \in B_{\varepsilon_0/4}(p)$ , temos que

$$D_x Y \cdot v = D_{(\exp_p^{-1}(x), D_x \exp_p^{-1} \cdot v)}^2 \exp_p \circ H \circ \exp_p^{-1}(x) + D_{\exp_p^{-1}(x)} \exp_p \circ H \circ D_x \exp_p^{-1} \cdot v,$$

para qualquer  $v \in T_p M$  e, em particular,

$$Y(p) = 0 \quad \text{e} \quad D_p Y = H.$$

Isso significa que  $p$  é uma singularidade para o campo vetorial  $Y$  tal que  $\lambda$  é o único autovalor com parte real  $Re(\lambda)$  igual a zero.

Analogamente ao caso das órbitas periódicas, escreveremos a forma canônica de  $D_p Y$  da seguinte forma:

$$J = \begin{pmatrix} J_s & 0 & 0 \\ 0 & J_u & 0 \\ 0 & 0 & J_\lambda \end{pmatrix},$$

onde  $J_s$  é o bloco associado aos autovalores com parte real menor que zero e  $J_u$  é o bloco associado aos autovalores com parte real maior que zero. Denotaremos por  $m$  a dimensão da matriz  $J_s$ .

Denotamos por  $E_p^s$  o subespaço de  $D_p Y$  associado aos autovalores com parte real menor que zero, por  $E_p^u$  o subespaço de  $D_p Y$  associado aos autovalores com parte real

maior que zero, e por  $E_p^c$  o autoespaço de  $D_p Y$  associado a  $\lambda$ . Então

$$T_p M = E_p^s \oplus E_p^c \oplus E_p^u.$$

Seja  $\mathcal{V}_Y$  uma vizinhança  $C^1$  de  $Y$  tal que todo campo vetorial em  $\mathcal{V}_Y$  é tal que a continuação de  $\Lambda_Y$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente.

Temos duas hipóteses a analisar:

- Se  $\dim E_p^c = 1$ :

Nesse caso  $\lambda = 0$  e, portanto, para cada  $v \in E_p^c$ , temos  $Y(\exp_p(v)) = 0$ .

Podemos, então, supor que  $\eta$  é suficientemente pequeno para que os autovalores de  $H_s$  sejam menores que um, e os autovalores de  $H_u$  sejam maiores que um. Por continuidade da derivada do campo, dado  $\eta > 0$  suficientemente pequeno, podemos assumir que para todo  $q = \exp_p(v)$  tal que  $v \in E_p^c$  tem norma suficientemente pequena, temos que existe uma base de  $T_p M$ ,  $\beta'$ , próxima da base em que está a forma de Jordan de  $D_p f$ , tal que a matriz de  $D_q Y$  é dada por :

$$Q = \begin{pmatrix} Q_s & 0 & 0 \\ 0 & Q_u & 0 \\ 0 & 0 & J'_\lambda \end{pmatrix},$$

onde  $\|J_s - Q_s\| < \eta$ ,  $\|J_u - Q_u\| < \eta$  e  $|\lambda'| < \eta$ . Novamente temos dois casos a analisar:

*Caso 1:* Existe  $q \in \exp_p(E_p^c)$  suficientemente próximo de  $p$ , e hiperbólico para  $Y$ .

Nesse caso, o autovalor  $\lambda'$  tem parte real diferente de zero. Vamos assumir que é maior que zero. Sendo assim, o índice de  $q$  é igual a  $m$ . O outro caso é análogo.

Pelo Lema 1.6, existem  $\delta_0 = \delta_0(Y) > 0$  e  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(Y) > 0$  tais que se  $Q : T_p M \rightarrow T_p M$  é uma aplicação linear tal que  $\|Q - D_p Y\| < \delta < \delta_0$ , então existe  $Z \in \mathcal{V}_Y$  como no Lema.

Tomando  $0 < \varepsilon_0(Y) < d(q, p)/2$  no Lema 1.6, podemos tomar  $0 < \delta < \delta_0$  e definir uma aplicação linear  $P : T_\sigma M \rightarrow T_\sigma M$  tal que sua matriz na base  $\beta'$  é dada por

$$P = \begin{pmatrix} J_s & 0 & 0 \\ 0 & J_u & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{pmatrix}.$$

Nesse caso  $\|P - D_p Y\| < \delta_0$ , e portanto existe  $Z \in \mathcal{V}_Y$  tal que a continuação  $\Lambda_Z$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente e

$$Z(x) = \begin{cases} (D_{\exp_p^{-1}(x)} \exp_p) \circ P \circ \exp_p^{-1}(x), & \text{se } x \in B_{\varepsilon_0(Y)/4}(p) \\ Y(x), & \text{se } x \notin B_{\varepsilon_0(Y)}(p). \end{cases}$$

Nesse caso,  $D_p Z = P$ , e portanto,  $p$  é uma singularidade hiperbólica para  $Y$  de índice  $\text{index}(p) = m + 1$ , e é tal que  $p$  está na continuação de  $\Lambda_Y$ .

Como  $q \notin \overline{B_{\varepsilon_0(Y)}(p)}$ , segue que  $q$  ainda é uma singularidade hiperbólica para  $Z$  com índice  $\text{index}(p) = m$ . Temos, então, nossas duas singularidades hiperbólicas com índices diferentes.

*Caso 2:* Para todo  $q \in \exp_p(E_p^c)$  suficientemente próximo de  $p$ ,  $q$  não é uma singularidade hiperbólica para  $Y$ .

Nesse caso, o autovalor  $\lambda'$  tem parte real igual a zero. Agora faremos a mesma perturbação da derivada em  $p$ , e depois perturbaremos a derivada em  $q$  para produzir uma singularidade hiperbólica de índice diferente de  $p$ .

Pelo Lema 1.6, existem  $\delta_0 = \delta_0(Y) > 0$  e  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(Y) > 0$  tais que se  $P : T_p M \rightarrow T_p M$  é uma aplicação linear tal que  $\|P - D_p Y\| < \delta < \delta_0$ , então existe  $Z \in \mathcal{V}_Y$  como no Lema. Podemos assumir que  $\varepsilon_0 < d(p, q)/2$ .

Podemos tomar  $0 < \delta < \delta_0$  e definir uma aplicação linear  $P : T_p M \rightarrow T_p M$  tal que

sua matriz na base  $\beta$  é dada por

$$P = \begin{pmatrix} J_s & 0 & 0 \\ 0 & J_u & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{pmatrix}.$$

Nesse caso  $\|P - D_p Y\| < \delta_0$ , e portanto existe  $Z \in \mathcal{V}_Y$  tal que a continuação  $\Lambda_Z$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente e

$$Z(x) = \begin{cases} (D_{\exp_p^{-1}(x)} \exp_p) \circ P \circ \exp_p^{-1}(x), & \text{se } x \in B_{\varepsilon_0(Y)/4}(p) \\ Y(x), & \text{se } x \notin B_{\varepsilon_0(Y)}(p). \end{cases}$$

Nesse caso,  $D_p Z = P$ , e portanto,  $p$  é uma singularidade hiperbólica para  $Y$  de índice  $\text{index}(p) = m+1$ , e é tal que  $p$  está na continuação de  $\Lambda_Y$ . Além disso, como  $q \notin \overline{B_{\varepsilon_0(Y)}(p)}$ , segue que  $q$  é singularidade para  $Z$  com  $D_q Z = D_q Y$ .

Seja  $\mathcal{V}_Z$  uma vizinhança  $C^1$  de  $Z$  tal que a continuação  $\Lambda_Z = \cap_{t \in \mathbb{R}} (U)$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente. Pelo Lema 1.6, existem  $\delta_0 = \delta_0(Z) > 0$  e  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(Y) > 0$  tais que se  $Q : T_q M \rightarrow T_q M$  é uma aplicação linear tal que  $\|Q - D_q Y\| < \delta < \delta_0$ , então existe  $Z \in \mathcal{V}_Y$  como no Lema.

Tomando  $0 < \varepsilon_0(Y) < d(q, p)/2$  no Lema 1.6, podemos tomar  $0 < \delta < \delta_0$  e definir uma aplicação linear  $Q : T_q M \rightarrow T_q M$  tal que sua matriz na base  $\beta'$  é dada por

$$Q = \begin{pmatrix} J_s & 0 & 0 \\ 0 & J_u & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Nesse caso  $\|Q - D_q Z\| < \delta_0$ , e portanto existe  $W \in \mathcal{V}_Z$  tal que a continuação  $\Lambda_W$

satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente e

$$W(x) = \begin{cases} (D_{\exp_p^{-1}(x)} \exp_p) \circ Q \circ \exp_p^{-1}(x), & \text{se } x \in B_{\varepsilon_0(Y)/4}(q) \\ Z(x), & \text{se } x \notin B_{\varepsilon_0(Y)}(q). \end{cases}$$

Nesse caso,  $D_q W = Q$ , e portanto,  $q$  é uma singularidade hiperbólica para  $W$  de índice  $\text{index}(q) = m$ , e é tal que  $q$  está na continuação de  $\Lambda_W$ .

Como  $p \notin \overline{B_{\varepsilon_0(Z)}(q)}$ , segue que  $p$  ainda é uma singularidade hiperbólica para  $W$  com índice  $\text{index}(p) = m + 1$ . Temos, então, nossas duas singularidades hiperbólicas com índices diferentes.

- Se  $\dim E_\sigma^c = 2$ :

Nesse caso  $D_\sigma Y$  age em  $E_\sigma^c$  como uma rotação. Se essa rotação é racional, existe  $l > 0$  tal que  $D_\sigma Y^l(v) = v$  para todo  $v \in E_\sigma^c$ . Fixamos  $l$  o mínimo com essa propriedade. Como no primeiro caso, com uma pequena modificação  $C^1$  nós podemos encontrar um campo vetorial em  $\mathcal{V}_Y$  tal que a continuação de  $\Lambda_Z$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente e tem duas singularidades de índices diferentes. Se essa rotação é irracional, existe uma rotação racional  $R_\theta : E_\sigma^c \rightarrow E_\sigma^c$  arbitrariamente próxima de  $D_\sigma Y|_{E_\sigma^c}$ .

Pelo Lema 1.6, existem  $\delta_0 = \delta_0(Y) > 0$  e  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(Y) > 0$  tais que se  $P : T_\sigma M \rightarrow T_\sigma M$  é uma aplicação linear tal que  $\|P - D_\sigma Y\| < \delta < \delta_0$ , então existe  $Z \in \mathcal{V}_Y$  como no Lema. Tomaremos, então, a aplicação linear  $P$  tal que sua matriz na base  $\beta$  é dada por

$$P = \begin{pmatrix} J_s & 0 & 0 \\ 0 & J_u & 0 \\ 0 & 0 & R_\theta \end{pmatrix},$$

para  $R_\theta$  próximo de  $D_\sigma Y|_{E_\sigma^c}$  de forma que  $\|P - D_\sigma Y\| < \delta$ .

Então existe  $Z \in \mathcal{V}_Y$  tal que a continuação  $\Lambda_Z$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente e

$$Z(x) = \begin{cases} (D_{\exp_p^{-1}(x)} \exp_p) \circ P \circ \exp_p^{-1}(x), & \text{se } x \in B_{\varepsilon_0(Y)/4}(p) \\ Y(x), & \text{se } x \notin B_{\varepsilon_0(Y)}(p). \end{cases}$$

Nesse caso a continuação  $\Lambda_Z$  tem a propriedade de especificação fraca robustamente e  $D_\sigma Y$  age em  $E_\sigma^c$  como uma rotação racional. Daí, como feito anteriormente, podemos encontrar um campo vetorial arbitrariamente próximo de  $Z$  tal que a continuação de  $\Lambda_Z$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente e tem duas singularidades de índices diferentes.

□

### 3.3 Hiperbolicidade Seccional

*Demonstração (Teorema C):* Primeiro nós lidaremos com o caso global. Como vimos na seção anterior, se o fluxo  $X$  satisfaz a propriedade de especificação fraca robustamente, então pelo Lema 3.3 e pelo Teorema 3.4 não existem singularidades ou órbitas periódicas que são poços ou fontes. Ainda, pelo Teorema 3.7, toda órbita periódica tem o mesmo índice. Em particular, pelo Lema 3.9, todas as órbitas periódicas são do tipo sela. Pelo Teorema 1.11,  $X$  é Axioma A sem ciclos, e como  $X$  é misturador topológico, então  $X$  é Anosov.

Agora nós lidaremos com um conjunto isolado  $\Lambda$  que tem a propriedade de especificação fraca robustamente.

Mesmo que existam singularidades, novamente não existem poços ou fontes, e toda órbita crítica é hiperbólica. Agora nós estabeleceremos algumas noções dadas por [24].

**Definição 3.12** *Um conjunto invariante  $\Lambda$  é fortemente homogêneo de índice  $i \in [0, d -$*

1], onde  $d$  é a dimensão de  $M$ , se existem vizinhanças  $\mathcal{U}$  de  $X$  e  $U$  de  $\Lambda$  tais que, para qualquer  $Y \in \mathcal{U}$  e qualquer órbita periódica de  $Y$  em  $U$  tem índice  $i$ .

Agora veremos um Teorema devido a Gan, Wen e Zhu [24]. Esse resultado pode ser encontrado, também, em [62].

**Teorema 3.13** *Seja  $\Lambda$  um conjunto robustamente transitivo de  $X$  que é fortemente homogêneo de índice  $i$ . Se todas as singularidades em  $\Lambda$  são hiperbólicas, então elas têm o mesmo índice e o conjunto  $\Lambda$  é seccionalmente hiperbólico.*

Isso implica que  $\Lambda$  é seccional hiperbólico e completa a demonstração nesse caso.

□

# Capítulo 4

## Sensibilidade

### 4.1 Introdução

Dizemos que  $X$  é sensível às condições iniciais se existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in M$  e toda vizinhança  $U$  de  $x$  existem  $y \in U$  e  $t \geq 0$  tais que  $d(X_t(x), X_t(y)) \geq \delta$ .

Exemplos de campos vetoriais que são sensíveis às condições iniciais são os campos Anosov. Eles motivam a pergunta se tal propriedade se mantém para sistemas dinâmicos mais gerais como, por exemplo, sistemas parcialmente hiperbólicos. No entanto, campos vetoriais parcialmente hiperbólicos em variedades compactas com fronteira não são sempre sensíveis às condições iniciais como mostra o exemplo dado pelo produto do campo vetorial nulo no toro por uma contração forte.

Esses contra-exemplos sugerem a questão de encontrar quais são as condições necessárias para que um campo vetorial parcialmente hiperbólico seja sensível às condições iniciais. A condição que levaremos em conta é a de ser *seccionalmente expansor*, ou seja, expande área em cada subespaço de dimensão dois do subfibrado central. De fato, estudaremos fluxos seccional-Anosov [59] em variedades compactas de dimensão três para os quais o conjunto maximal invariante coincide com o conjunto não-errante. Nós mostraremos que a

propriedade de sensibilidade em relação às condições iniciais se mantém para todo campo vetorial  $C^1$  próximo de  $X$ .

Vamos exprimir esse resultado mais precisamente.

**Teorema 4.1** *Seja  $X$  um campo vetorial seccional-Anosov em uma variedade em uma variedade compacta de dimensão três. Se  $\Omega(X) = M(X)$ , então cada campo vetorial suficientemente próximo de  $X$  é sensível às condições iniciais.*

Observe que, diferentemente de fluxos Anosov, a propriedade de  $\Omega(X) = M(X)$  para campos seccionais-Anosov não é estável por pequenas perturbações, em geral ([65]).

Como mencionado anteriormente, um conceito relacionado com o de sensibilidade às condições iniciais é a de Komuro-expansividade. No entanto, Komuro-expansividade não implica em sensibilidade às condições iniciais uma vez que Komuro-expansividade envolve apenas o conjunto maximal invariante enquanto sensibilidade às condições iniciais envolve toda a variedade  $M$ . Um exemplo concreto é um campo vetorial em uma bola de dimensão três transversal ao bordo apontando para o interior da bola, cujo maximal invariante é uma singularidade atratora.

No entanto, [2, Teorema A, pg. 2434] implica que todo fluxo *transitivo*  $X_t$  seccional-Anosov em uma variedade compacta e conexa de dimensão três,  $M$ , é Komuro-expansivo. Portanto o fluxo restrito ao maximal invariante  $X_t|_{M(X)}$  é fracamente sensível às condições iniciais, ou seja, existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $x \in M(X)$  e cada vizinhança  $U$  de  $x$  em  $M$  existem

$$y \in M(X) \cap U \quad e \quad t \in \mathbb{R}$$

tais que  $d(X_t(x), X_t(y)) \geq \delta$  (veja a definição de sensibilidade em [1, pg. 18], e o argumento em [1, pg. 20]. Finalmente, nós observamos que, diferentemente do Teorema 4.1, os resultados em [2] não consideram nenhuma perturbação de  $X$ .

Esse capítulo está organizado da seguinte forma:

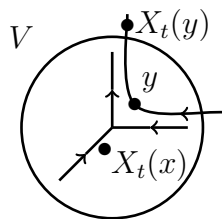
Começaremos com uma condição suficiente para que um fluxo seja sensível às condições iniciais. Lembramos que uma singularidade ou uma órbita periódica hiperbólica é do *tipo sela* se os subfibrados hiperbólicos são não triviais, ou seja, não são o subfibrado  $\{0\}$ .

A seguinte proposição fornece uma condição suficiente para sensibilidade em relação às condições iniciais.

**Proposição 4.2** *Seja  $X$  um campo vetorial em uma variedade compacta  $M$  tal que todas as singularidades são hiperbólicas do tipo sela. Se cada ponto de  $M$  pode ser aproximado por pontos para os quais o  $\omega$ -limite é uma singularidade, então  $X$  é sensível em às condições iniciais.*

*Demonstração:* Como  $M$  é compacta, temos que o conjunto  $Sing(X)$  é finito. Então, existe  $\delta > 0$  tal que as bolas de raio  $\delta$  centradas nas singularidades de  $X$  são disjuntas duas a duas. Sejam  $x \in M$  e  $U$  uma vizinhança de  $x$ . Nós temos duas hipóteses a considerar:  $x \in W^s(\sigma)$  para algum  $\sigma \in Sing(X)$  ou não.

No primeiro caso, podemos escolher  $y \in U$ , fora das variedades estáveis das singularidades, uma vez que a união de tais variedades não é densa em nenhum aberto de  $M$ . (Lembramos que todas as singularidades são do tipo sela.) Pelo Teorema de Hartman-Grobman, existe uma vizinhança  $V$  de  $\sigma$  onde o campo  $X$  é conjugado a sua derivada  $D_\sigma X$ . Diminuindo  $\delta$ , se necessário, podemos tomar  $V = B_{2\delta}(\sigma)$ .



Como a órbita positiva de  $x$ ,  $O^+(x) = \{X_t(x) : t \geq 0\}$ , converge para  $\sigma$ , existe  $t_0 > 0$

tal que

$$d(X_t(x), \sigma) < \delta, \quad \text{para todo } t \geq t_0.$$

Por outro lado, como a órbita positiva de  $y$  não converge para  $\sigma$ , nós eventualmente encontraremos  $t > t_0$  tal que  $d(X_t(y), \sigma) \geq 2\delta$ . Segue que

$$d(X_t(y), X_t(x)) > \delta.$$

No segundo caso podemos escolher  $\sigma \in \text{Sing}(X)$  e  $y \in W^s(\sigma) \cap U$  uma vez que a união das variedades estáveis das singularidades é densa por hipótese. Novamente como a órbita positiva de  $y$  converge a  $\sigma$ , e a de  $x$  não converge, nós eventualmente encontraremos  $t > 0$  tal que  $d(X_t(x), X_t(y)) \geq \delta$ . Isso prova o resultado. □

A Proposição 4.2 garante que um fluxo que admite uma singularidade hiperbólica do tipo sela em uma variedade compacta é sensível às condições iniciais desde que cada ponto possa ser aproximado por pontos para os quais o  $\omega$ -limite é uma singularidade. Na Seção 4.2 provaremos que, para todo fluxo seccional-Anosov que satisfaz a Propriedade (P) em uma variedade compacta de dimensão três, todo ponto pode ser aproximado por pontos para os quais o  $\omega$ -limite é uma singularidade. Então, aplicaremos a Proposição 4.2.

## 4.2 Sensibilidade às Condições Iniciais

Agora introduziremos a notação que usaremos em seguida.

Seja  $X$  um fluxo seccional-Anosov para  $M$ . Segue da Teoria das Variedades Invariantes [38] que o fibrado estável  $E_{M(X)}^s$  de  $X$  pode ser estendido continuamente a um fibrado estável  $E_U^s$  em toda uma vizinhança  $U$  de  $M(X)$ . Como o fluxo  $X_t$  contrai  $M$  em  $M(X)$ , nós podemos assumir que tal vizinhança é a própria variedade  $M$ . Por outro lado, temos

que a soma direta  $E_M^s \oplus E_M^X$  é tangente à folheação singular estável  $W^s$ . Podemos usar isso para definir uma folheação contínua unidimensional  $\mathcal{F}^s = \{\mathcal{F}^s(x, D) : x \in D\}$ , em cada seção transversal  $D$ , intersectando as folhas de  $W^s$  com  $D$ . Dizemos que  $D$  é um *retângulo folheado* se ele é difeomorfo à  $[0, 1] \times [0, 1]$  e as folhas de  $\mathcal{F}^s$  têm a forma  $* \times [0, 1]$  a menos de uma identificação. Nesse caso, existe uma fronteira vertical  $\partial^v D$  formada por folhas de  $\mathcal{F}^s$  e uma fronteira horizontal  $\partial^h D$  transversal a  $\mathcal{F}^s$ .

**Teorema 4.3** *Se  $X$  é um campo vetorial seccional-Anosov que satisfaz a Propriedade (P) em  $M$  e  $x \in M$  não pode ser aproximado por pontos para os quais o  $\omega$ -limite é uma singularidade, então  $\omega(x)$  admite uma partição singular de diâmetro arbitrariamente pequeno.*

Para a demonstração desse fato nós precisaremos do seguinte resultado.

**Lema 4.4 (Improved Sectional-Anosov Closing Lemma)** *Todos os pontos não-errantes de um fluxo seccional-Anosov em uma variedade compacta, conexa e de dimensão três podem ser aproximados por pontos periódicos ou por pontos para os quais o  $\omega$ -limite é uma singularidade.*

Para a demonstração veja [60].

*Demonstração (Teorema 4.3):* Pela Proposição 1.15 nós temos que provar que para todo  $z \in \omega(x) \setminus \text{Sing}(X)$  existe uma seção transversal de diâmetro pequeno  $\Sigma_z$  tal que  $z \in \text{Int}(\Sigma_z)$  e  $\omega(x) \cap \partial\Sigma_z = \emptyset$ .

Afirmamos que  $\omega(x) \cap W^{ss}(z)$  tem interior vazio em  $W^{ss}(z)$  para todo  $z \in \omega(x)$ . De fato, suponha por contradição que isso não é verdade. Então  $\omega(x)$  contém uma variedade estável forte  $W_\epsilon^{ss}(y)$  passando por algum  $y \in \omega(x)$ . Agora nós temos duas hipóteses a considerar, ou  $\omega(x)$  admite alguma singularidade, ou não. Se não, então  $\omega(x)$  é hiperbólico [64] e então temos que  $x \in \omega(x)$  usando a variedade estável por  $W_\epsilon^{ss}(y)$ . Segue do

*Improved Sectional-Anosov Closing Lemma* (Lema 4.4) que  $x$  pode ser aproximado por órbitas periódicas ou por pontos para os quais o  $\omega$ -limite é uma singularidade. Como esses pontos são acumulados por pontos para os quais o  $\omega$ -limite é uma singularidade, segue do Lema 1.13 que o próprio  $x$  pode ser aproximado por pontos para os quais o  $\omega$ -limite é uma singularidade. Isso é uma contradição. Se  $\omega(x)$  admite uma singularidade, teremos uma contradição tomando a órbita negativa de  $W_\epsilon^{ss}(y)$  como em [58]. Essas contradições completam a afirmação.

Pela afirmação podemos tomar, para todo  $z \in \omega(x)$  um retângulo folheado de diâmetro pequeno  $R_z^0$  tal que  $z \in \text{Int}(R_z^0)$  e  $\omega(x) \cap \partial^h R_z^0 = \emptyset$ . Se a órbita positiva de  $x$  intersecta  $\mathcal{F}^s(z, R_z^0)$  infinitas vezes, nós teremos que  $\omega(x)$  é uma órbita periódica, e nesse caso o resultado é trivial. Portanto, podemos assumir que a órbita positiva de  $x$  não intersecta  $\mathcal{F}^s(z, R_z^0)$ . Então, ela intersecta uma das componentes conexas de  $R_z^0 \setminus \mathcal{F}^s(z, R_z^0)$ .

Se a órbita positiva intersecta somente uma componente, podemos escolher algum ponto  $x'$  da órbita positiva dentro dessa componente, um ponto  $z'$  na outra componente e definir  $\Sigma_z$  como o subretângulo de  $R_z^0$  limitado por  $\mathcal{F}^s(x', R_z^0)$  e  $\mathcal{F}^s(z', R_z^0)$ . Como a órbita positiva não passa pela componente conexa de  $R_z^0 \setminus \mathcal{F}^s(z, R_z^0)$  contendo  $z'$ , nós temos que  $\omega(x) \cap \mathcal{F}^s(z', R_z^0) = \emptyset$ . Agora suponha, por enquanto, que existe  $h \in \omega(x) \cap \mathcal{F}^s(x', R_z^0)$ . Como  $\omega(x) \subset \Omega(X)$ , o *Improved Sectional-Anosov Closing Lemma* [60] e o Lema 1.13 implicam, como antes, que  $h$  é acumulado por pontos para os quais o  $\omega$ -limite é uma singularidade. Como as variedades estáveis tem tamanho grande nós temos que  $x'$  também é acumulado por pontos para os quais o  $\omega$ -limite é uma singularidade. Isso implica que o mesmo vale para  $x$ , o que é uma contradição. Portanto  $\omega(x) \cap \mathcal{F}^s(x', R_z^0) = \emptyset$ . Como  $\partial^h \Sigma_z \subset \partial^h R_z^0$  e  $\partial^v \Sigma_z = \mathcal{F}^s(z', R_z^0) \cup \mathcal{F}^s(x', R_z^0)$  nós temos que  $\Sigma_z$  tem a propriedade requerida.

No caso da órbita positiva intersectar ambas as componentes de  $R_z^0 \setminus \mathcal{F}^s(z, R_z^0)$  nós

podemos escolher dois pontos  $x', x''$  nessa órbita, em cada componente conexa e definir  $\Sigma_z$  como o retângulo de  $R_z^0$  limitado por  $\mathcal{F}^s(x', R_z^0)$  e  $\mathcal{F}^s(x'', R_z^0)$ . Repetindo o argumento acima, nós temos que  $\omega(x) \cap (\mathcal{F}^s(x', R_z^0) \cup \mathcal{F}^s(x'', R_z^0)) = \emptyset$  e então  $\Sigma_z$  satisfaz as propriedades da tese do Teorema.

□

O seguinte teorema é uma nova versão para [16].

**Teorema 4.5** *Seja  $X_t$  um fluxo seccional-Anosov em  $M$  que satisfaz a Propriedade (P). Então, todo ponto de  $M$  pode ser aproximado por pontos para os quais o  $\omega$ -limite é uma singularidade.*

*Demonstração:* Suponha por contradição que existem um fluxo seccional-Anosov  $X_t$  que satisfaz a propriedade (P) em uma variedade compacta e conexa de dimensão 3,  $M$  e  $x \in M$  que não pode ser aproximado por pontos para os quais o  $\omega$ -limite é uma singularidade. Em particular  $\omega(x)$  não é uma singularidade. Como  $X_t$  satisfaz a Propriedade (P) nós podemos aplicar o Teorema 4.3 para encontrar uma partição singular  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_r\}$  de  $\omega(x)$ .

Por outro lado, como  $x$  não pode ser aproximado por pontos para os quais o  $\omega$ -limite é uma singularidade, podemos fixar um intervalo aberto  $I$  em torno de (e próximo a)  $x$  tangente a  $E^c$  e ortogonal a  $E^X$  tal que:

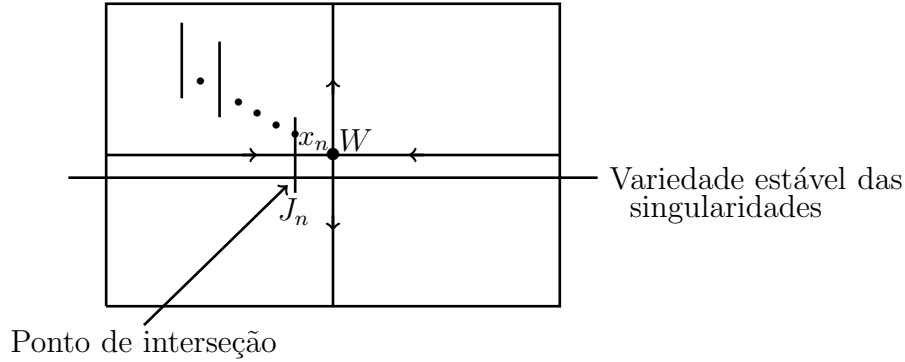
*$I$  não intersecta a variedade estável de nenhuma singularidade.*

Por outro lado, como  $\omega(x)$  não é uma singularidade, podemos fazer a seguinte afirmação:

**Afirmção 4.6** *É possível encontrar  $S \in \mathcal{R}$ , uma seqüência  $x_n \in S$  de pontos na órbita positiva de  $x$  e uma seqüência de intervalos  $J_n \subset S$  na órbita positiva de  $I$  com  $x_n \in J_n$  tal que  $J_n^+$  e  $J_n^-$  são componentes conexas de  $J_n \setminus \{x_n\}$  então ambas seqüências  $\{Comp(J_n^+)\}$  :*

$n = 1, 2, 3, \dots\}$  e  $\{Comp(J_n^-) : n = 1, 2, 3, \dots\}$  estão uniformemente limitadas por 0. Aqui  $Comp(\cdot)$  denota a operação comprimento.

Deixaremos a demonstração dessa afirmação para o final.



**Figura**

Tomamos um ponto limite  $w \in S$  de  $x_n$ . Então  $w \in \omega(x) \cap Int(S)$  uma vez que  $S$  é uma partição singular. Como  $I$  é tangente a  $E^c$ , segue que a sequência de intervalos  $J_n$  converge a um intervalo  $J$  tangente a  $E_w^c \cap T_w S$  na topologia  $C^1$ . Temos que  $J$  não é trivial pois  $\{Comp(J_j^+) : j = 1, 2, 3, \dots\}$  e  $\{Comp(J_j^-) : j = 1, 2, 3, \dots\}$  são limitadas por 0. Isso se dá por que o único jeito do intervalo contrair é se tomarmos ele inteiramente contido na variedade estável de uma singularidade, e isso pode ser evitado, uma vez que  $\omega(x)$  não é uma singularidade. Segue desses limitantes inferiores e de  $x_j \rightarrow w$  que  $J_n$  intersecta  $W^s(w)$  para algum  $n$  suficientemente grande. Agora, como  $w$  é não-errante, segue do *Improved Sectional-Anosov Closing Lemma* [60] e do Lema 1.13 que  $w$  pode ser aproximado por pontos para os quais o  $\omega$ -limite é uma singularidade. Segue, então, da dependência contínua nas partes compactas das variedades estáveis que existe um ponto de interseção entre  $J_n$  e a variedade estável de uma singularidade (veja a figura acima). Como as variedades estáveis das singularidades são invariantes pelo fluxo temos que:

*$I$  intersecta a variedade estável de uma singularidade.*

Isso contradiz a escolha de  $I$ . Agora, para completar a demonstração do Teorema 4.5

basta provar a Afirmação 4.6.

Vamos supor momentâneamente que  $\mathcal{S}$  não possui singularidades. Como  $\mathcal{S}$  é uma família finita de seções dois a dois disjuntas, podemos definir  $\mathcal{S}' = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$ , e a aplicação de primeiro retorno  $\Pi : \text{Dom}(\Pi) \subset \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ , por

$$\Pi(y) = X_{t(y)}(y),$$

onde  $t(y)$  é o primeiro número positivo tal que  $X_{t(y)} \in \mathcal{S}'$ .

Como  $\mathcal{S}$  é dois a dois disjunta, temos que existem  $\alpha$  e  $\beta$  números positivos tais que  $\beta < t(y) < \alpha$ , para todo  $y \in \text{Dom}(\Pi)$ .

Nós devemos usar, também, o *fluxo de Poincaré* associado a  $X$ : dado  $y \in M$  tal que  $X(y) \neq 0$ , sejam  $N_y = \langle X(y) \rangle^\perp \subset T_y M$  o complemento ortogonal a  $X(y)$  em  $T_y M$  e  $\Phi : T_y M \rightarrow N_y$  a projeção ortogonal à direção do campo. Definimos

$$L_t(y) = \Phi_{X_t(y)} \circ DX_t(y).$$

Segue que, para quaisquer  $y \in M \setminus \text{Sing}(X)$  e  $s, t \in \mathbb{R}$  temos

$$L_{s+t}(y) = L_t(X_s(y)) \circ L_s(y).$$

A família  $\{L_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  é o chamado fluxo de Poincaré associado a  $X$ .

O fluxo de Poincaré é usado para calcular  $D\Pi$ . Para isso, iremos assumir

$$T_y \mathcal{S}' = N_y \quad \forall y \in \mathcal{S}'. \quad (4.1)$$

Nesse caso, afirmamos que

$$D\Pi^n(y) = L_{\sum_{i=0}^{n-1} t(y_i)}(y), \quad (4.2)$$

onde  $y_0 = y$  e  $Y_i = \Pi^i(y)$  para  $i = 0, \dots, n-1$ .

Agora vamos demonstrar a afirmação acima. Derivando (4.2) com respeito a  $y$  e usando (4.1), temos que

$$D\Pi^n(y) \cdot v = (t'(y) \cdot v)X(\Pi(y)) + DX_{t(y)}(y),$$

para todo  $v \in T_y\mathcal{S}'$ . Agora a equação (4.1) nos fornece que  $\Phi(X) = 0$ . Portanto

$$\begin{aligned} \Phi_{\Pi(y)}(D\Pi(y) \cdot v) &= (t'(y) \cdot v)\Phi_{\Pi(y)}(X(\Pi(y))) + \Phi_{\Pi(y)}(DX_{t(y)}(y) \cdot v) \\ &= \Phi_{\Pi(y)}(DX_{t(y)}(y) \cdot v). \end{aligned}$$

Como  $D\Pi(y) \cdot v \in T_y\mathcal{S}' = N_{\Pi(y)}$ , nós temos que  $\Phi_{\Pi(y)}(D\Pi(y) \cdot v) = D\Pi(y) \cdot v$ . Substituindo na equação acima, nós temos que

$$D\Pi(y) \cdot v = \Phi_{\Pi(y)}(DX_{t(y)}(y) \cdot v).$$

Portanto a definição do fluxo linear de Poincaré implica em  $D\Pi(y) = L_{t(y)}(y)$  para todo  $y \in \mathcal{S}'$ .

Agora basta usar indução matemática para completar a prova da afirmação no caso em que  $\mathcal{S}$  não possui singularidades.

**Observação 4.7** *Agora, como estamos supondo que  $w \in \omega(X)$  não é uma singularidade, então o fluxo de Poincaré em uma vizinhança de  $w$  não é exatamente a derivada da transformação de retorno e sim parecida pois as caixas de fluxo estão longe das singularidades.*

Por outro lado, como  $E^c$  expande volume, se definirmos  $F_z = E_z^c \cap N_z$  para todo  $z \in M \setminus \text{Sing}(X)$  e tomarmos  $U$  uma vizinhança de  $w \in \omega(x)$  tal que  $U \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$ , então existem  $K', \lambda > 0$  tais que

$$m(L_t(z)) \frac{\|X(X_t(z))\|}{\|X(z)\|} \geq K' e^{\lambda t},$$

para todo  $z \in U$ . Então podemos tomar  $K > 0$  dependendo de  $U$  tal que

$$m(L_t(z) |_{F_z}) \geq K e^{\lambda t}, \tag{4.3}$$

desde que  $X_{[0,t]} \subset U$ .

Se definirmos  $x_0 = x$  e  $x_n = \Pi^n(x_0)$ , temos que  $x_n \in \text{Dom}(\Pi)$  para todo  $n \geq 1$ . Podemos definir, então, uma sequencia  $k_n \in \{1, \dots, r\}$  tal que  $x_n \in S_{k_n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande.

Afirmamos que existe  $\delta > 0$  que independe de  $n$  tal que

$$B_\delta(x_n) \cap S_{k_n} \subset \text{int}(\text{Dom}(\Pi)).$$

De fato, para todo  $y \in \omega(x) \cap S_i$  existe  $\delta_y > 0$  tal que

$$B_{\delta_y}(y) \cap S_i \subset \text{int}(\text{Dom}(\Pi)).$$

Como  $\omega(x) \cap S_i$  é compacto, existem  $y_1, \dots, y_l \in \omega(x) \cap S_i$  tais que  $\omega(x) \cap S_i \subset V_i$ , onde

$$V_i = B_{\delta_{y_1}}(y_1) \cup \dots \cup B_{\delta_{y_l}}(y_l).$$

Note que  $V_i$  é uma vizinhança de  $\omega(x) \cap S_i$  tal que

$$V_i \cap S_i \subset \text{int}(\text{Dom}(\Pi)).$$

Então existe  $\delta > 0$  tal que

$$\max_i d(\omega(x) \cap S_i, \partial V_i) > 4\delta.$$

Por definição de  $\omega$ -limite, para  $n$  suficientemente grande temos que

$$x_n \in S_{k_n} \cap V_{k_n} \quad \text{e} \quad d(x_n, \partial V_{k_n}) > 2\delta.$$

Logo

$$B_\delta(x_n) \cap S_{k_n} \subset V_{k_n} \cap S_{k_n} \subset \text{int}(\text{Dom}(\Pi)),$$

para  $n$  suficientemente grande, o que completa a afirmação.

Diminuindo  $I$ , se necessário, podemos assumir que  $I \subset B_\delta(x_0) \cap S_{k_0}$ . Agora, como  $I$  é tangente a  $E^c$  e ortogonal à direção do campo, a Observação (4.7) em conjunto com a equação (4.3) implicam que  $Comp(I_n) \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , se todo o intervalo  $I_n$  estiver definido para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então, existe  $n_0$  suficientemente grande para o qual  $I_n$  não está definido para todo  $n \geq n_0$ . Em particular, para todo  $n \geq n_0$  existe um subarco  $J_n \subset I_n \cap S_{k_n}$  que é fechado e que une  $x_n$  a um ponto  $b_n \in \partial B_\delta(x_n)$ . Portanto  $l(J_n) \geq \delta$ .

□

*Demonstração (Teorema 4.1):* Seja  $X_t$  um fluxo seccional Anosov em uma variedade compacta e conexa  $M$  tal que  $\Omega(X) = M(X)$ . Se  $X$  não admite singularidades, então  $M(X)$  é um atrator hiperbólico, e então é conhecido que a sensibilidade às condições iniciais se mantém para campos vetoriais suficientemente próximos de  $X$ . Portanto podemos supor que  $X$  admite uma singularidade. Em particular, cada campo vetorial de  $C^1$  próximo a  $X$  também admite uma singularidade. Pelo Corolário 1.18 temos que cada campo vetorial  $C^1$  próximo a  $X$  temos que todo campo vetorial suficientemente  $C^1$  próximo a  $X$  também satisfaz a Propriedade (P). Como todos esses campos vetoriais também são seccional-Anosov, temos pelo Teorema 4.5 que todos eles satisfazem a propriedade de cada ponto ser aproximado por pontos para os quais o  $\omega$ -limite é uma singularidade. Como as singularidades de um fluxo seccional-Anosov são todas hiperbólicas do tipo sela, podemos aplicar a Proposição 4.2 para concluir que todos esses campos vetoriais são sensíveis às condições iniciais.

□

## Apêndice

Nesse Apêndice nós demonstraremos o Teorema 1.16. A prova é similar à dada em [60], com a diferença que usaremos o seguinte lema ao invés da hipótese de transitividade usada

em [60].

**Lema 4.8 ([60], Corolário 1)** *Seja  $X_t$  um fluxo seccional-Anosov com singularidades em  $M$  que satisfaz  $\Omega(X) = M(X)$ . Então, todo ponto não-errante de  $X$  pode ser aproximado por pontos cujo  $\omega$ -limite é uma singularidade.*

*Demonstração:* Escreveremos  $W_X^s(\cdot)$ ,  $W_X^{ss}(\cdot)$ , etc para indicar a dependência sobre os fluxos  $X_t$ . As notações  $Cl(\cdot)$  e  $B_\delta(\cdot)$  denotam o fecho de um conjunto, e a  $\delta$ -bola de um ponto ou conjunto, respectivamente. Uma singularidade  $\sigma$  é dita do *tipo Lorenz* se ela admite três autovalores reais  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  satisfazendo  $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1$  a menos de alguma ordenação.

Suponha por contradição que existe um fluxo seccional Anosov  $X_t$  em  $M$  satisfazendo  $\Omega(X) = M(X)$ , e além disso  $X_t$  é limite de uma seqüência de fluxos  $X_t^n$ , onde cada  $X_t^n$  exibe um atrator sem singularidades  $A^n$ . Segue que cada um desses atratores é hiperbólico para o fluxo correspondente, [64].

Nós afirmamos que

$$Sing(X) \cap Cl\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n\right) \neq \emptyset.$$

Do contrário, existe  $\delta > 0$  tal que

$$B_\delta(Sing(X)) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n\right) = \emptyset. \quad (4.4)$$

Definimos

$$H = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(M \setminus B_{\delta/2}(Sing(X))).$$

Nesse caso temos que  $Sing(X) \cap H = \emptyset$  e portanto  $H$  é um conjunto hiperbólico. Denotamos por  $E^s \oplus E^X \oplus E^u$  a decomposição hiperbólica do fibrado tangente correspondente.

Pela estabilidade dos conjuntos hiperbólicos, podemos fixar uma vizinhança  $W$  de  $H$  e  $\epsilon > 0$  tais que se  $Y$  é um campo vetorial  $C^r$  próximo a  $X$  e  $H_Y$  é um conjunto compacto e invariante em por  $Y$  em  $W$ , então:

(H1)  $H_Y$  é hiperbólico e sua decomposição hiperbólica  $E^{s,Y} \oplus E^Y \oplus E^{u,Y}$  satisfaz

$$\dim(E^u) = \dim(E^{u,Y}), \quad \dim(E^s) = \dim(E^{s,Y}).$$

(H2) As variedades instáveis fortes  $W_Y^{uu}(x, \epsilon)$ ,  $x \in H_Y$ , são unidimensionais de tamanho uniforme  $\epsilon$ .

Como  $X^n \rightarrow X$ , nós temos que

$$\bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t^n(M \setminus B_{\delta/2}(\text{Sing}(X))) \subset W$$

para todo  $n$  suficientemente grande. Mas  $A^n \subset M \setminus B_{\delta/2}(\text{Sing}(X))$  para todo  $n$  por (4.4). Como  $A^n$  é  $X^n$ -invariante, podemos concluir que  $A^n \subset W$  para todo  $n$  suficientemente grande.

Agora, (H2) implica que  $W_{X^n}^{uu}(x^n, \epsilon)$  tem tamanho uniforme  $\epsilon$  para todo  $x^n \in A^n$  e  $n$ . Tomamos  $x^n \in A^n$  convergindo para algum  $x \in M$ , e portanto  $x$  pertence a  $H$ . Note que os vetores tangentes da curva  $W_{X^n}^{uu}(x^n, \epsilon)$  em  $c \in W_{X^n}^{uu}(x^n, \epsilon)$  estão em  $E_c^{u, X^n}$ .

Como  $X^n \rightarrow X$ , nós temos que o ângulo entre as direções  $E^{u, X^n}$  e  $E^u$  tendem à zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto as variedades  $W_X^{uu}(x, \epsilon)$  e  $W_{X^n}^{uu}(x^n, \epsilon)$  são quase paralelas quando  $n \rightarrow \infty$ . Como  $x^n \rightarrow x$  podemos concluir que

$$W_{X^n}^{uu}(x^n, \epsilon) \rightarrow W_X^{uu}(x, \epsilon)$$

no sentido das  $C^1$  variedades.

Fixamos um intervalo aberto  $I \subset W_X^{uu}(x, \epsilon)$  contendo  $x$ . Então  $I \subset M(X)$ .

Como  $\Omega(X) = M(X)$  e  $I \subset M(X)$ , nós temos que  $I \subset \Omega(X)$ . Então, pelo Lema 4.8, cada ponto de  $I$  pode ser aproximado por pontos no  $\omega$ -limite de uma singularidade. Como  $I$  é um intervalo e as variedades estáveis têm tamanho uniformemente grande, segue que  $I$  intersecta a variedade estável de uma singularidade em algum ponto  $q$ . Então existe

$T > 0$  tal que

$$X_T(q) \in B_{\delta/5}(Sing(X)).$$

Assim, existe um conjunto aberto  $V_q$  contendo  $q$  tal que

$$X_T(V_q) \subset B_{\delta/5}(Sing(X)).$$

Como  $X^n \rightarrow X$ , temos que

$$X_T^n(V_q) \subset B_{\delta/4}(Sing(X)) \tag{4.5}$$

para todo  $n$  suficientemente grande. Mas  $W_{X^n}^{uu}(x^n, \epsilon) \rightarrow W_X^{uu}(x, \epsilon)$ ,  $q \in I \subset W_X^{uu}(p, \epsilon)$ ,  $q \in V_q$  e  $V_q$  são abertos. Então,

$$W_{X^n}^{uu}(x^n, \epsilon) \cap V_q \neq \emptyset$$

para todo  $n$  suficientemente grande. Aplicando (4.5) em  $X^n$  para  $n$  suficientemente grande

$$X_T^n(W_{X^n}^{uu}(x^n, \epsilon)) \cap B_{\delta/4}(Sing(X)) \neq \emptyset.$$

Como  $W_{X^n}^{uu}(x^n, \epsilon) \subset W_{X^n}^u(x^n)$  a invariância de  $W_{X^n}^u(x^n)$  implica em

$$W_{X^n}^u(x^n) \cap B_{\delta/2}(Sing(X)) \neq \emptyset.$$

Mas  $W_X^u(x^n) \subset A^n$  já que  $x^n \in A^n$  e  $A^n$  é um atrator, logo

$$A^n \cap B_{\delta}(Sing(X)) \neq \emptyset$$

contradizendo (4.4). O que demonstra a afirmação.

Vamos continuar com a demonstração do teorema. Pela afirmação anterior podemos escolher

$$\sigma \in Sing(X) \cap Cl\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n\right).$$

Aplicando [9, 64] nós temos que  $\sigma$  é do tipo Lorenz e satisfaz

$$M(X) \cap W_X^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}.$$

Sejam  $S^t = S_\sigma^t$  e  $S^b = S_\sigma^b$  seções transversais singulares associadas a  $\sigma$  (conforme a Seção 4 p. 278 em [9]). Em particular,

$$M(X) \cap (\partial^h S^t \cup \partial^h S^b) = \emptyset.$$

Como  $X^n \rightarrow X$  nós temos que  $S^t, S^b$  são seções transversais singulares de  $X^n$  também. Podemos assumir que  $\sigma(X^n) = \sigma$ , onde  $\sigma(X^n)$  é a continuação de  $\sigma = \sigma(X)$ . Além disso,

$$l^t \cup l^b \subset W_{X^n}^s(\sigma), \quad \forall n. \quad (4.6)$$

O subfibrado unidimensional  $E^s$  de  $X$  se estende a um subfibrado invariante contrator em  $M$ . Tomamos uma extensão contínua (mas não necessariamente invariante) de  $E^c$ . Ainda denotaremos por  $E^s \oplus E^c$  a extensão anterior.

Pela Teoria das Variedades Invariantes [38], segue que a decomposição  $E^s \oplus E^c$  persiste por pequenas perturbações de  $X$ . Mais precisamente, para todo  $n$  suficientemente grande, o campo vetorial  $X^n$  admite uma decomposição  $E^{s,n} \oplus E^{c,n}$  sobre  $U$  tal que  $E^{s,n}$  é invariante e contrator,  $E^{s,n} \rightarrow E^s$  e  $E^{c,n} \rightarrow E^c$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Em particular,  $E^{s,n} \oplus E^{c,n}$  é definido em  $S^t \cup S^b$  para todo  $n$  suficientemente grande. No que segue denotaremos por  $E^Y$  o subfibrado de  $TM$  gerado por um fluxo  $Y_t$  em  $M$ .

A condição de dominação implica que para  $* = t, b$ , temos que

$$T_x S^* \cap (E_x^s \oplus E_x^c) = T_x l^*,$$

para todo  $x \in l^*$ .

Denotamos por  $\angle(E, F)$  o ângulo entre dois subespaços. A última desigualdade implica que existe  $\rho > 0$  tal que

$$\angle(T_x S^* \cap E_x^c, T_x l^*) > \rho,$$

para todo  $x \in l^*$  ( $* = t, b$ ). Mas  $E^{c,n} \rightarrow E^c$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Então, para todo  $n$  suficientemente grande temos que

$$\angle(T_x S^* \cap E_x^{c,n}, T_x l^*) > \frac{\rho}{2}, \quad (4.7)$$

para todo  $x \in l^*$  (novamente  $* = t, b$ ).

Fixamos  $* = t, b$  e um sistema de coordenadas  $(x, y) = (x^*, y^*)$  em  $S^*$  tais que

$$S^* = [-1, 1] \times [-1, 1], \quad l^* = \{0\} \times [-1, 1]$$

com respeito a  $(x, y)$ .

Denotamos por  $\Pi^* : S^* \rightarrow [-1, 1]$  a projeção

$$\Pi^*(x, y) = x$$

e para  $\Delta > 0$  definimos

$$S^{*,\Delta} = [-\Delta, \Delta] \times [-1, 1].$$

Definimos o campo de linha  $F^n$  em  $S^{*,\Delta}$  por

$$F_x^n = T_x S^* \cap E_x^{c,n}, \quad x \in S^{*,\Delta}.$$

A continuidade de  $E^{c,n}$  e (4.7) implicam que  $\exists \Delta_0 > 0$  tal que  $\forall n$  suficientemente grande a linha  $F^n$  é transversal a  $\Pi^*$ .

Agora lembramos que  $A^n$  é um atrator hiperbólico para  $X^n$  para todo  $n$ . Segue que as órbitas periódicas de  $X^n$  em  $A^n$  são densas em  $A^n$ . Então, como  $\sigma \in Cl(\cup_{n \in \mathbb{N}} A^n)$ , existe uma sequência de órbitas periódicas  $O_n \in A^n$  acumulando em  $\sigma$ . Segue que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que vale pelo menos uma das duas alternativas:

$$O_{n_0} \cap Int(S^{t,\Delta_0}) \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad O_{n_0} \cap Int(S^{b,\Delta_0}) \neq \emptyset.$$

Como  $O_{n_0} \subset A_{n_0}$ , podemos concluir que vale uma das alternativas

$$A^{n_0} \cap Int(S^{t,\Delta_0}) \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad A^{n_0} \cap Int(S^{b,\Delta_0}) \neq \emptyset.$$

Denotaremos  $Z = X^{n_0}$ ,  $A = A^{n_0}$ ,  $F = F^{n_0}$  por simplicidade.



que

$$\text{dist}(\Pi(z_0), 0) < \text{dist}(\Pi(p), 0).$$

Note que  $C \subset S \cap A$  pois  $A$  é um atrator para  $Z$ . Além disso,  $p \in A$  e  $C \subset W_Z^u(p)$ . Como  $A \cap \partial^h S = \emptyset$  podemos concluir que

$$\text{dist}(\Pi(S \cap A), 0) = 0.$$

Como  $A$  é fechado, essa última desigualdade implica em

$$A \cap l^t \neq \emptyset.$$

Como  $l^t \subset W_Z^s(\sigma)$  e  $A$  é um invariante fechado por  $Z$  podemos concluir que  $\sigma \in A$ . No entanto, isso é impossível uma vez que  $A$  é um atrator hiperbólico. Isso completa a demonstração.

□

# Referências

- [1] Araujo, V., Pacifico, M., J., **Three dimensional flows**, Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications] 26° Colóquio Brasileiro de Matemática. [26th Brazilian Mathematics Colloquium] Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2007.
- [2] Araujo, V., Pacifico, M., J., Pujals, E., R., Viana, M., **Singular-hyperbolic attractors are chaotic**, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), no. 5, 2431–2485.
- [3] Arbieto, A., **Periodic Orbits and Expansiveness**, Aparecerá em Math. Z. 2010.
- [4] Arbieto, A., **On Persistently Positively Expansive Maps**, Anais da Academia Brasileira de Ciências (2010) 82(2): 263–266.
- [5] Arbieto, A., Morales, C., **A  $\lambda$ -lemma for foliations**, Topology and its Applications, v. 156, p. 1491-1495, 2009.
- [6] Arbieto, A., Morales, C., **Positively expansive measures** (2010) submmited.
- [7] Artigue, A., Brum, J., Potrie, R., **Local product structure for expansive homeomorphisms**. Topology Appl. 156 (2009), no. 4, 674–685.
- [8] Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G., Stacey, P., **On Devaney’s definition of Chaos**, Amer. Math. Monthly, 99, 332-334, 1992.

- [9] Bautista, S., Morales, C., **A sectional-Anosov connecting lemma**, Ergodic Theory Dynam. Systems 30 (2010), 339–359.
- [10] Bowen R., **Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms**. *Trans. Amer. Math. Soc.* 154, 1971, pp. 377-397.
- [11] R. Bowen, P. Walters, **Expansive one-parameter flows**. *J. Differential Equations*, 12, 180–193, 1972.
- [12] Bowen, R., **Entropy-expansive maps**. *Trans. Amer. Math. Soc.* 164 (1972) 323–331.
- [13] Bowen, R. **Some systems with unique equilibrium states**. *Math. Systems Theory* 8 (1974/75), no. 3, 193–202.
- [14] Brunella, M., **Surfaces of section for expansive flows on three-manifolds**. *J. Math. Soc. Japan* 47 (1995), no. 3, 491–501.
- [15] Buzzi, J., **Intrinsic ergodicity of smooth interval maps**. (English summary) *Israel J. Math.* 100 (1997), 125–161.
- [16] Carballo, C., M., Morales, C., A., **Omega-limit sets close to singular-hyperbolic attractors**, *Illinois J. Math.* 48 (2004), no. 2, 645–663.
- [17] Coven, E. M., Reddy, W. L., **Positively expansive maps of compact manifolds**. *Global theory of dynamical systems (Proc. Internat. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1979)*, pp. 96–110, *Lecture Notes in Math.*, 819, Springer, Berlin, 1980.
- [18] Devaney, R., **Chaotic Dynamical Systems**, Addison-Wesley Public. Co., New York & Reading, MA, 1989.

- [19] Doering, C. I.: **Persistently transitive vector fields on three-dimensional manifolds.** *Proc. on Dynamical Systems and Bifurcation Theory* Pitman Res. Notes Math. Ser. **160** (1987), 59–89.
- [20] Fathi, A., **Expansiveness, hyperbolicity and Hausdorff dimension.** *Comm. Math. Phys.* 126 (1989), no. 2, 249–262.
- [21] Franco E., **Flows with unique equilibrium states.** *Amer. J. Math* 99, no. 3, 1977, 486–514.
- [22] Fried, D., **The geometry of cross sections to flows,** *Topology* 21 (1982), no. 4, 353–371.
- [23] Gan S., Wen, L., **Nonsingular Star Flows Satisfy Axioma A and the no-Cycle Condition.** *Invent. Math.* 164, 279–315, 2006.
- [24] Gan S., Wen L. and Zhu S. **Indices of Singularities of Robustly Transitive Sets.** *Disc. Cont. Dynamical Systems* vol. 21, number 3, 2008, 945–957.
- [25] Gan, S., Yang, D., **Expansive homoclinic classes.** (English summary) *Nonlinearity* 22 (2009), no. 4, 729–733.
- [26] Groisman, J., **Expansive homeomorphisms of the plane,** PhD thesis, Universidad de la República, Uruguay, Preprint 2008/101 <http://premat.fing.edu.uy>
- [27] Groisman, J., **Expansive and fixed point free homeomorphisms of the plane,** arXiv:0906.4581.
- [28] Guckenheimer, J., Williams, R. F.: **Structural Stability of Lorenz attractors.** *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **50** (1979), 59–72.
- [29] Hayashi, S., **On a conjecture by Palis.** *New developments in dynamical systems* (Japanese) 1179, 103–108, 2000.

- [30] Haydn N. T. and Ruelle, D. **Equivalence of Gibbs and equilibrium states for homeomorphisms satisfying expansiveness and specification.** *Comm. Math. Phys.* 148, no. 1, 1992, 155–167.
- [31] He, L. F., Shan G. Z.: **The nonexistence of expansive flow on a compact 2-manifold.** *Chinese Ann. Math. Ser. B* **12(2)** (1991), 260.
- [32] Rodriguez Hertz, F., Rodriguez Hertz, J., **Expansive attractors on surfaces.** *Ergodic Theory Dynam. Systems* 26 (2006), no. 1, 291–302.
- [33] Hiraide, K. **On homeomorphisms with Markov partitions.** *Tokyo J. Math.* 8 (1985), no. 1, 219–229.
- [34] Hiraide, K., **Expansive homeomorphisms with the pseudo-orbit tracing property of  $n$ -tori.** *Dynamical systems and applications* (Kyoto, 1987), 35–41, World Sci. Adv. Ser. Dynam. Systems, 5, World Sci. Publishing, Singapore, 1987.
- [35] Hiraide, K., **Expansive homeomorphisms with the pseudo-orbit tracing property on compact surfaces.** *J. Math. Soc. Japan* 40 (1988), no. 1, 123–137.
- [36] Hiraide, K., **Expansive homeomorphisms of compact surfaces are pseudo-Anosov,** *Osaka J. Math.* 27 (1990) 117–162.
- [37] Hiraide, K., **Nonexistence of positively expansive maps on compact connected manifolds with boundary.** *Proc. Amer. Math. Soc.* 110 (1990), no. 2, 565–568.
- [38] Hirsh, M., Pugh, C., Shub, M., **Invariant Manifolds,** *Lecture Notes in Math.*, vol. 583, Springer Verlag, New York, 1974.

- [39] Inaba, T., Matsumoto, S., **Nonsingular expansive flows on 3-manifolds and foliations with circle prong singularities.** Japan. J. Math. (N.S.) 16 (1990), no. 2, 329–340.
- [40] Inaba, T., Tsuchiya, N., **Expansive foliations.** Hokkaido Math. J. 21 (1992), no. 1, 39–49.
- [41] Kato, H., **Minimal sets and chaos in the sense of Devaney on continuum-wise expansive homeomorphisms.** Continua (Cincinnati, OH, 1994), 265–274, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 170, Dekker, New York, 1995.
- [42] Kato, H., **Expansiveness of homeomorphisms and dimension.** J. Math. Soc. Japan 47 (1995), no. 4, 583–590.
- [43] Katok, A., Hasselblatt, B., **Introduction to the modern theory of dynamical systems.** With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. xviii+802 pp. ISBN: 0-521-34187-6
- [44] Keynes, H. B., Sears, M.,  **$\mathcal{F}$ -expansive transformation groups.** General Topology Appl. 10 (1979), no. 1, 67–85.
- [45] Keynes, H. B., Sears, M., **Real-expansive flows and topological dimension.** Ergodic Theory Dynamical Systems 1 (1981), no. 2, 179–195.
- [46] Komuro, M. **One-parameter flows with the pseudo-orbit tracing property.** Monatsh. Math. 98 (1984), no. 3, 219–253.
- [47] Komuro, M., **Expansive properties of Lorenz attractors.** The Theory of Dynamical Systems and its Applications to Nonlinear Problems (Kyoto 1984), World Scientific Publishing, Singapore, 4–26, 1984.

- [48] Koscielniak, P., **On the genericity of chaos**. *Topology Appl.* 154 (2007), no. 9, 1951–1955.
- [49] Lewowicz, J., **Expansive homeomorphisms of surfaces**, *Bol. Soc. Bras. de Mat.* 20 (1989) 113–133.
- [50] Lewowicz, J., **Dinámica de los homeomorfismos expansivos**. (Spanish) [Dynamics of expansive homeomorphisms] *Monografías del Instituto de Matemática y Ciencias Afines* [Monographs of the Institute of Mathematics and Related Sciences], 36. Instituto de Matemática y Ciencias Afines, IMCA, Lima; Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, 2003.
- [51] Li, T., Yorke, J., **Period three implies chaos**, *Amer. Math. Monthly*, 82, 985–982, 1975.
- [52] Lorenz, E., N., **Deterministic non-periodic flow** *J. Atmos. Sci.*, 20, 130–141, 1963.
- [53] Mañé, R., **Contributions to the stability conjecture**. *Topology* 17 (1978), no. 4, 383–396.
- [54] Mañé, R., **Expansive homeomorphisms and topological dimension**. *Trans. Amer. Math. Soc.* 252 (1979), 313–319.
- [55] Mañé, R., **Expansive diffeomorphisms**. *Dynamical systems – Warwick 1974* (Proc. Sympos. Appl. Topology and Dynamical Systems, Univ. Warwick, Coventry, 1973/1974; presented to E.C. Zeeman on his fiftieth birthday), pp. 162–174. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 468, Springer, Berlin, 1975.
- [56] Misiurewicz, M. **Diffeomorphism without any measure with maximal entropy**. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 21 (1973), 903–910.

- [57] Morales, C., **The explosion of singular-hyperbolic attractors**, Ergodic Theory Dynam. Systems 24 (2004), no. 2, 577–591.
- [58] Morales, C., **Strong stable manifolds for sectional-hyperbolic sets**, Discrete Contin. Dyn. Syst. 17 (2007), no. 3, 553–560.
- [59] Morales, C., **Sectional-Anosov systems**, Monatsh. Math. 159 (2010), 253–260.
- [60] Morales, C., **An improved sectional-Anosov closing lemma**, to appear in Mathematische Zeitschrift. DOI: 10.1007/s00209-010-0673-x.
- [61] Morales, C., **Measure-expansive systems** (2010) preprint.
- [62] Metzger, R. and Morales, C. **Sectional-hyperbolic systems**. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 28, no. 5, 2008, 1587–1597.
- [63] Morales, C., Pacifico, M. **A dichotomy for three-dimensional vector fields**. Ergodic Theory Dynam. Systems, 23, no. 5, 1575–1600, 2003.
- [64] Morales, C., Pacifico, M., J., Pujals, E., R., **Singular-hyperbolic systems**, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), 3393–3401.
- [65] Morales, C., Pujals, E., R., **Singular strange attractors on the boundary of Morse-Smale systems**, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 30 (1997), no. 6, 693–717.
- [66] Moriyasu, K., **Continuous flows with Markov families**. Japan. J. Math. (N.S.) 16 (1990), no. 1, 1–15.
- [67] Moriyasu, K., Sakai, W., Sun, N.  **$C^1$ -stably expansive flows'**. Journal of Differential Equations, 213, 352–367, 2005.
- [68] Moriyasu, K., Sakai, K., Sumi, N., **Vector Fields with Topological Stability**. Trans. Amer. Math. Soc. 353, no. 8, 3391–3408, 2001.

- [69] Norton, V., O'Brien, T., **Anosov flows and expansiveness**. Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1973), 625–628.
- [70] Oka, M., **Expansiveness of real flows**. Tsukuba J. Math. 14, no. 1, 1–8, 1990.
- [71] Oliveira, K., **Every expanding measure has the nonuniform specification property**. arXiv:1007.1449.  
no. 2, 179–199.
- [72] Oka, M., **Expansive flows and their centralizers**. Nagoya Math. J. 64 (1976), 1–15.
- [73] Oka, M., **Hyperbolic expansivity and equilibrium states**. Southeast Asian Bull. Math. 21 (1997), no. 2, 159–165.
- [74] Ombach, J. **Equivalent conditions for hyperbolic coordinates**. Topology Appl. 23 (1986), no. 1, 87–90.
- [75] Ombach, J. **Consequences of the pseudo-orbits tracing property and expansiveness**. J. Austral. Math. Soc. Ser. A 43 (1987), no. 3, 301–313.
- [76] Ombach, J., **Shadowing, expansiveness and hyperbolic homeomorphisms**. (English summary) J. Austral. Math. Soc. Ser. A 61 (1996), no. 1, 57–72.
- [77] Pacifico, M. J., Pujals, E. R., Vieitez, J. L., **Robustly expansive homoclinic classes**. (English summary) Ergodic Theory Dynam. Systems 25 (2005), no. 1, 271–300.
- [78] Pacifico, M. J., Pujals, E. R., Sambarino, M., Vieitez, J. L., **Robustly expansive codimension-one homoclinic classes are hyperbolic**. (English summary) Ergodic Theory Dynam. Systems 29 (2009), no. 1, 179–200.

- [79] Paternain, M., **Expansive flows and the fundamental group**. Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 24 (1993),
- [80] Peixoto, M., M., **On structural stability**. Ann. of Math. (2), 69:199–222, 1959.
- [81] Peixoto, M., M., **Structural stability on two-dimensional manifolds**. Topology, 1:101–120, 1962.
- [82] Plante, J. F., Thurston, W. P., **Anosov flows and the fundamental group**. Topology 11 (1972), 147–150.
- [83] Pliss, V. A., **On a conjecture of Smale**. Differ. Uravn. 8, 268–282, 1972.
- [84] Reddy, W. L., **Expansive canonical coordinates are hyperbolic**. Topology Appl. 15 (1983), no. 2, 205–210.
- [85] Richeson, D., Wiseman, J., **Positively expansive homeomorphisms of compact spaces**. Int. J. Math. Math. Sci. 2004, no. 53-56, 2907–2910.
- [86] Robinson, C., **Dynamical Systems, stability, symbolic dynamics, and chaos**
- [87] Sakai, K.,  **$C^1$ -stably positively expansive maps**. (English summary) Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 52 (2004), no. 2, 197–209.
- [88] Sakai, K., **Continuum-wise expansive diffeomorphisms**. (English summary) Publ. Mat. 41 (1997), no. 2, 375–382.
- [89] Sakai K., Sumi N. and Yamamoto K., **Diffeomorphisms satisfying the specification property**. *Proc. Amer. Math. Soc* 138, no. 1, 2010, 315–321.
- [90] Sambarino, M., Vieitez, J., **On  $C^1$ -persistently expansive homoclinic classes**. (English summary) Discrete Contin. Dyn. Syst. 14 (2006), no. 3, 465–481.

- [91] Sambarino, M., Vieitez, J., **Robustly expansive homoclinic classes are generically hyperbolic.** (English summary) *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 24 (2009), no. 4, 1325–1333.
- [92] Schwartzman, S., **On transformation groups**, Ph.D. thesis, Yale University, Connecticut (1952).
- [93] Shilnikov, L., P., Turaev, D., V., **An example of a wild strange attractor**, (Russian) *Mat. Sb.* 189 (1998), no. 2, 137–160; translation in *Sb. Math.* 189 (1998), no. 1-2, 291–314.
- [94] Thurston, W. P., **On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces.** *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 19 (1988), no. 2, 417–431.
- [95] Tucker, W., **A rigorous ODE solver and Smale’s 14th problem.** *Found. Comput. Math.* 2 (2002), no. 1, 53–117.
- [96] Utz, W. R., **Unstable homeomorphisms.** *Proc. Amer. Math. Soc.* 1, (1950). 769–774.
- [97] Vieitez, J., **Expansive homeomorphisms and hyperbolic diffeomorphisms on 3-manifolds.** *Ergodic Theory Dynam. Systems* 16 (1996), no. 3, 591–622.
- [98] Vivier T., **Flots robustement transitifs sur les variétés compactes.** *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 337, n. 12, 2003, 791–796.
- [99] Walters, P., **An introduction to ergodic theory**, Springer-Verlag, New York, 1982.