Percolação com uma linha de defeitos

S. Friedli

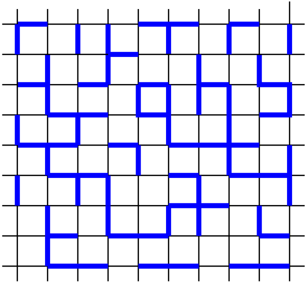
UFMG

CBPF-Rio de Janeiro-23/11/2011

Trabalho em colaboração com D. Ioffe e Y. Velenik

Percolação de Bernoulli em $\mathbb{Z}^d$ (SEM defeito)

$d \geq 2\,, \quad 0 < p < 1$



$\exists\ 0 < p_c = p_c(d) < 1$ tal que

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) \begin{cases} = 0 & \text{se } p < p_c \\ > 0 & \text{se } p > p_c\,. \end{cases}$$

Se $p < p_c$,

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x) \leq e^{-c(p)\|x\|}$$

Ornstein-Zernike:

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x) = \frac{\psi_p(\hat{x})}{\|x\|^{\frac{d-1}{2}}} e^{-\xi_p(x)}(1 + o(1))$$

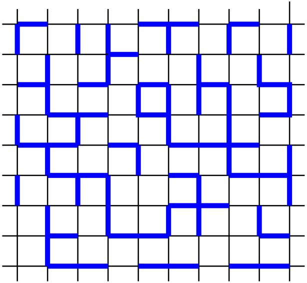
(Campanino, Chayes, Chayes, Ioffe)

$$\boxed{\xi_p := -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)\,.}$$

$p < p_c \Rightarrow \xi_p > 0.$

Percolação de Bernoulli em $\mathbb{Z}^d$ (SEM defeito)

$d \geq 2\,, \quad 0 < p < 1$



$\exists\; 0 < p_c = p_c(d) < 1$ tal que

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) \begin{cases} = 0 & \text{se } p < p_c \\ > 0 & \text{se } p > p_c\,. \end{cases}$$

Se $p < p_c$,

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x) \leq e^{-c(p)\|x\|}$$

Ornstein-Zernike:

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x) = \frac{\psi_p(\hat{x})}{\|x\|^{\frac{d-1}{2}}} e^{-\xi_p(x)}(1 + o(1))$$

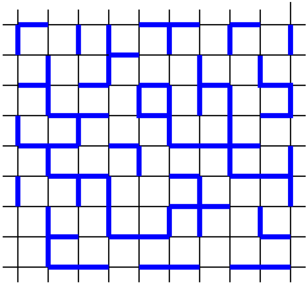
(Campanino, Chayes, Chayes, Ioffe)

$$\boxed{\xi_p := -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)\,.}$$

$p < p_c \Rightarrow \xi_p > 0.$

Percolação de Bernoulli em $\mathbb{Z}^d$ (SEM defeito)

$$d \geq 2\,, \quad 0 < p < 1$$



$\exists\ 0 < p_c = p_c(d) < 1$ tal que

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) \begin{cases} = 0 & \text{se } p < p_c \\ > 0 & \text{se } p > p_c\,. \end{cases}$$

Se $p < p_c$,

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x) \leq e^{-c(p)\|x\|}$$

Ornstein-Zernike:

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x) = \frac{\psi_p(\hat{x})}{\|x\|^{\frac{d-1}{2}}} e^{-\xi_p(x)}(1 + o(1))$$

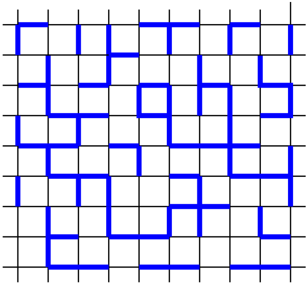
(Campanino, Chayes, Chayes, Ioffe)

$$\boxed{\xi_p := -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)\,.}$$

$p < p_c \Rightarrow \xi_p > 0.$

Percolação de Bernoulli em $\mathbb{Z}^d$ (SEM defeito)

$d \geq 2\,, \quad 0 < p < 1$



$\exists\ 0 < p_c = p_c(d) < 1$ tal que

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) \begin{cases} = 0 & \text{se } p < p_c \\ > 0 & \text{se } p > p_c\,. \end{cases}$$

Se $p < p_c$,

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x) \leq e^{-c(p)\|x\|}$$

Ornstein-Zernike:

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x) = \frac{\psi_p(\hat{x})}{\|x\|^{\frac{d-1}{2}}} e^{-\xi_p(x)}(1 + o(1))$$

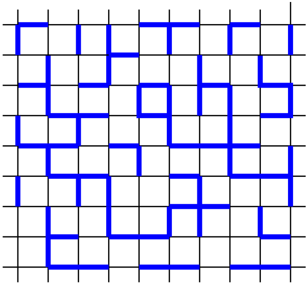
(Campanino, Chayes, Chayes, Ioffe)

$$\boxed{\xi_p := -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)\,.}$$

$p < p_c \Rightarrow \xi_p > 0.$

Percolação de Bernoulli em $\mathbb{Z}^d$ (SEM defeito)

$$d \geq 2\,, \quad 0 < p < 1$$



$\exists\ 0 < p_c = p_c(d) < 1$ tal que

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) \begin{cases} = 0 & \text{se } p < p_c \\ > 0 & \text{se } p > p_c\,. \end{cases}$$

Se $p < p_c$,

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x) \leq e^{-c(p)\|x\|}$$

Ornstein-Zernike:

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x) = \frac{\psi_p(\hat{x})}{\|x\|^{\frac{d-1}{2}}} e^{-\xi_p(x)}(1 + o(1))$$

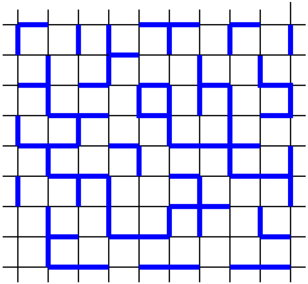
(Campanino, Chayes, Chayes, Ioffe)

$$\boxed{\xi_p := -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)\,.}$$

$p < p_c \Rightarrow \xi_p > 0.$

Percolação de Bernoulli em $\mathbb{Z}^d$ (SEM defeito)

$$d \geq 2\,, \quad 0 < p < 1$$



$\exists\ 0 < p_c = p_c(d) < 1$ tal que

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) \begin{cases} = 0 & \text{se } p < p_c \\ > 0 & \text{se } p > p_c\,. \end{cases}$$

Se $p < p_c$,

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x) \leq e^{-c(p)\|x\|}$$

Ornstein-Zernike:

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x) = \frac{\psi_p(\hat{x})}{\|x\|^{\frac{d-1}{2}}} e^{-\xi_p(x)}(1 + o(1))$$

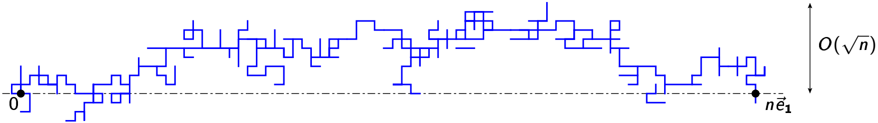
(Campanino, Chayes, Chayes, Ioffe)

$$\boxed{\xi_p := -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)\,.}$$

$$p < p_c \Rightarrow \xi_p > 0.$$

Percolação de Bernoulli em $\mathbb{Z}^d$ (SEM defeito)

Quando $p < p_c$, estrutura do aglomerado $C_{0,n\vec{e}_1}$ sob $\mathbb{P}_p(\cdot|0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)$:

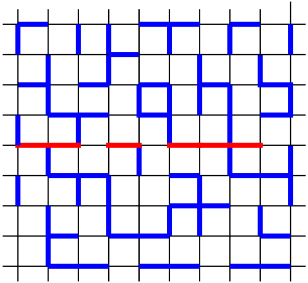


No limite difusivo, $C_{0,n\vec{e}_1}$ converge para uma *ponte Browniana*.

A linha de defeitos: $\mathcal{L} := \{k\vec{e}_1 : k \in \mathbb{Z}\}$

Em $\mathcal{L}^c$: $0 < p < p_c$

Em $\mathcal{L}$: $0 \leq p' < 1$



- Zhang, 1994: $d = 2$, $\forall p' < 1$,

$$\mathbb{P}_{p_c,p'}(0 \leftrightarrow \infty) = 0\,.$$

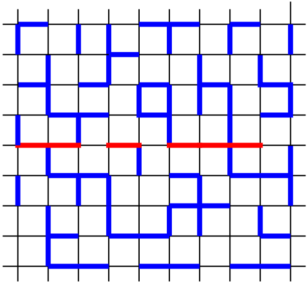
- Newman, Wu, 1997: outros tipos de defeitos (hiperplanos, etc.)

$p' \geq p \Rightarrow \mathbb{P}_{p,p'} \succeq \mathbb{P}_p$
$p' \leq p \Rightarrow \mathbb{P}_{p,p'} \preceq \mathbb{P}_p$

A linha de defeitos: $\mathcal{L}:=\{k\vec{e}_1 : k \in \mathbb{Z}\}$

Em $\mathcal{L}^c$: $0 < p < p_c$

Em $\mathcal{L}$: $0 \le p' < 1$



$$p' \ge p \Rightarrow \mathbb{P}_{p,p'} \succeq \mathbb{P}_p$$
$$p' \le p \Rightarrow \mathbb{P}_{p,p'} \preceq \mathbb{P}_p$$

- Zhang, 1994: $d = 2$, $\forall p' < 1$,

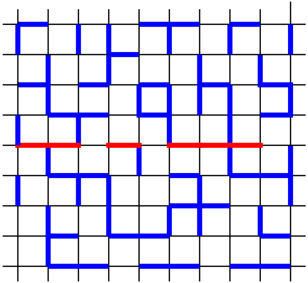
$$\mathbb{P}_{p_c,p'}(0 \leftrightarrow \infty) = 0\,.$$

- Newman, Wu, 1997: outros tipos de defeitos (hiperplanos, etc.)

A LINHA DE DEFEITOS: $\mathcal{L}:=\{k\vec{e}_1 : k \in \mathbb{Z}\}$

Em $\mathcal{L}^c$: $0 < p < p_c$

Em $\mathcal{L}$: $0 \leq p' < 1$



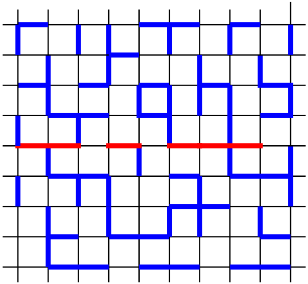
$$p' \geq p \Rightarrow \mathbb{P}_{p,p'} \succeq \mathbb{P}_p$$
$$p' \leq p \Rightarrow \mathbb{P}_{p,p'} \preceq \mathbb{P}_p$$

- Zhang, 1994: $d = 2$, $\forall p' < 1$,

$$\mathbb{P}_{p_c,p'}(0 \leftrightarrow \infty) = 0\,.$$

- Newman, Wu, 1997: outros tipos de defeitos (hiperplanos, etc.)

A linha de defeitos: $\mathcal{L}$



Objetivo: comparar

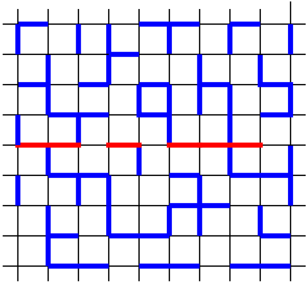
$$\boxed{\xi_{p,p'} := -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_{p,p'}(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)\,.}$$

com $\xi_{p,p} \equiv \xi_p$.

Nessa palestra:

- $d \geq 2$,
- $p < p_c(d)$ *fixo*,
- $p' \in [0,1]$.

A linha de defeitos: $\mathcal{L}$



Objetivo: comparar

$$\boxed{\xi_{p,p'} := -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_{p,p'}(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)\,.}$$

com $\xi_{p,p} \equiv \xi_p$.

Nessa palestra:

- $d \geq 2$,
- $p < p_c(d)$ *fixo*,
- $p' \in [0,1]$.

O ponto crítico

Fato 0: $p' \mapsto \xi_{p,p'}$ é não-crescente.

Fato 1: $\xi_{p,p'} > 0$ se $p' < 1$

Fato 2: $\xi_{p,p'} = \xi_p$ se $p' \leq p$

Fato 3: $\xi_{p,p'} < \xi_p$ se $p' \simeq 1$

$$\begin{aligned} p'_c = p'_c(d,p) &:= \inf\{p' : \xi_{p,p'} < \xi_p\} \\ &= \sup\{p' : \xi_{p,p'} = \xi_p\} \end{aligned}$$

$p' > p'_c \Rightarrow \mathcal{L}$ influi
$p' < p'_c \Rightarrow \mathcal{L}$ não influi

O ponto crítico

Fato 0: $p' \mapsto \xi_{p,p'}$ é não-crescente.

Fato 1: $\xi_{p,p'} > 0$ se $p' < 1$

Fato 2: $\xi_{p,p'} = \xi_p$ se $p' \leq p$

Fato 3: $\xi_{p,p'} < \xi_p$ se $p' \simeq 1$

$$
\begin{aligned}
p'_c = p'_c(d,p) &:= \inf\{p' : \xi_{p,p'} < \xi_p\} \\
&= \sup\{p' : \xi_{p,p'} = \xi_p\}
\end{aligned}
$$

$p' > p'_c \Rightarrow \mathcal{L}$ influi
$p' < p'_c \Rightarrow \mathcal{L}$ não influi

O PONTO CRÍTICO

Fato 0: $p' \mapsto \xi_{p,p'}$ é não-crescente.

Fato 1: $\xi_{p,p'} > 0$ se $p' < 1$

Fato 2: $\xi_{p,p'} = \xi_p$ se $p' \leq p$

Fato 3: $\xi_{p,p'} < \xi_p$ se $p' \simeq 1$

$$p'_c = p'_c(d,p) := \inf\{p' : \xi_{p,p'} < \xi_p\}$$
$$= \sup\{p' : \xi_{p,p'} = \xi_p\}$$

$p' > p'_c \Rightarrow \mathcal{L}$ influi
$p' < p'_c \Rightarrow \mathcal{L}$ não influi

O ponto crítico

Fato 0: $p' \mapsto \xi_{p,p'}$ é não-crescente.

Fato 1: $\xi_{p,p'} > 0$ se $p' < 1$

Fato 2: $\xi_{p,p'} = \xi_p$ se $p' \leq p$

Fato 3: $\xi_{p,p'} < \xi_p$ se $p' \simeq 1$

$$p'_c = p'_c(d,p) := \inf\{p' : \xi_{p,p'} < \xi_p\}$$
$$= \sup\{p' : \xi_{p,p'} = \xi_p\}$$

$p' > p'_c \Rightarrow \mathcal{L}$ influi
$p' < p'_c \Rightarrow \mathcal{L}$ não influi

O ponto crítico

Fato 0: $p' \mapsto \xi_{p,p'}$ é não-crescente.

Fato 1: $\xi_{p,p'} > 0$ se $p' < 1$

Fato 2: $\xi_{p,p'} = \xi_p$ se $p' \leq p$

Fato 3: $\xi_{p,p'} < \xi_p$ se $p' \simeq 1$

$$
\begin{aligned}
p'_c = p'_c(d,p) &:= \inf\{p' : \xi_{p,p'} < \xi_p\} \\
&= \sup\{p' : \xi_{p,p'} = \xi_p\}
\end{aligned}
$$

$p' > p'_c \Rightarrow \mathcal{L}$ influi
$p' < p'_c \Rightarrow \mathcal{L}$ não influi

O ponto crítico

Fato 0: $p' \mapsto \xi_{p,p'}$ é não-crescente.

Fato 1: $\xi_{p,p'} > 0$ se $p' < 1$

Fato 2: $\xi_{p,p'} = \xi_p$ se $p' \leq p$

Fato 3: $\xi_{p,p'} < \xi_p$ se $p' \simeq 1$

$$
\begin{aligned}
p'_c = p'_c(d,p) &:= \inf\{p' : \xi_{p,p'} < \xi_p\} \\
&= \sup\{p' : \xi_{p,p'} = \xi_p\}
\end{aligned}
$$

$p' > p'_c \Rightarrow \mathcal{L}$ influi
$p' < p'_c \Rightarrow \mathcal{L}$ não influi

O ponto crítico

Fato 0: $p' \mapsto \xi_{p,p'}$ é não-crescente.

Fato 1: $\xi_{p,p'} > 0$ se $p' < 1$

Fato 2: $\xi_{p,p'} = \xi_p$ se $p' \leq p$

Fato 3: $\xi_{p,p'} < \xi_p$ se $p' \simeq 1$

$$\begin{aligned} p'_c = p'_c(d,p) &:= \inf\{p' : \xi_{p,p'} < \xi_p\} \\ &= \sup\{p' : \xi_{p,p'} = \xi_p\} \end{aligned}$$

$p' > p'_c \Rightarrow \mathcal{L}$ influi
$p' < p'_c \Rightarrow \mathcal{L}$ não influi

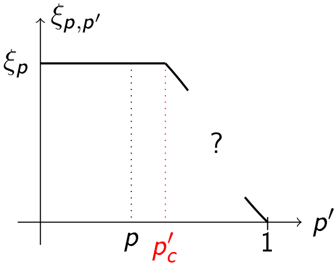
O ponto crítico

Fato 0: $p' \mapsto \xi_{p,p'}$ é não-crescente.

Fato 1: $\xi_{p,p'} > 0$ se $p' < 1$

Fato 2: $\xi_{p,p'} = \xi_p$ se $p' \leq p$

Fato 3: $\xi_{p,p'} < \xi_p$ se $p' \simeq 1$



$$
\begin{aligned}
p'_c = p'_c(d,p) &:= \inf\{p' : \xi_{p,p'} < \xi_p\} \\
&= \sup\{p' : \xi_{p,p'} = \xi_p\}
\end{aligned}
$$

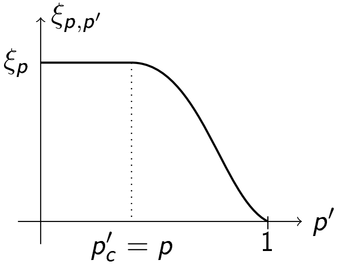
$p' > p'_c \Rightarrow \mathcal{L}$ influi
$p' < p'_c \Rightarrow \mathcal{L}$ não influi

Efeito da linha em baixas dimensões

Teorema ($d = 2, 3$)

- $p'_c(2) = p'_c(3) = p$.
- *quando* $p' \searrow p'_c$,

$$\xi_p - \xi_{p,p'} \sim \begin{cases} c(p'-p)^2 & \text{se } d = 2\,, \\ e^{-\frac{c}{p'-p}} & \text{se } d = 3\,. \end{cases}$$



Efeito da linha em altas dimensões

Teorema ($d \geq 4$)

Em $d \geq 4$, $p'_c(d) > p$.

Efeito da linha em altas dimensões

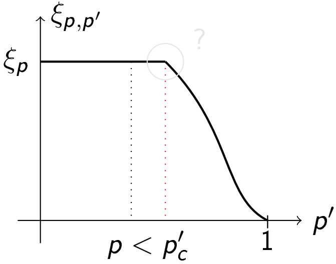
Teorema ($d \geq 4$)

Em $d \geq 4$, $p'_c(d) > p$.

Efeito da linha em altas dimensões

Teorema ($d \geq 4$)

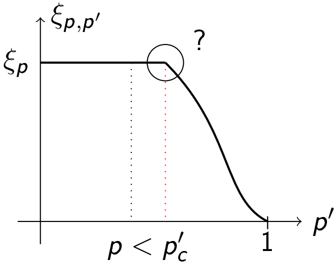
Em $d \geq 4$, $p_c'(d) > p$.



Efeito da linha em altas dimensões

Teorema ($d \geq 4$)

Em $d \geq 4$, $p'_c(d) > p$.

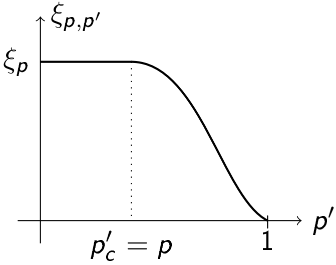


Resultados gerais na fase supercrítica

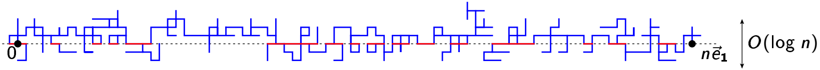
Teorema ($d \geq 2$)

$p' \mapsto \xi_{p,p'}$ é

- *Lipschitz-contínua em* $[0,1]$.
- *analítica em* $(p'_c, 1)$.



$\forall p' > p'_c$, sob $\mathbb{P}_{p,p'}(\cdot | 0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)$:



Estratégia

Se $p' > p$, queremos comparar $\xi_{p,p'}$ com ξ_p:

$$\frac{e^{-\xi_{p,p'}n}}{e^{-\xi_p n}} \overset{\text{exp}}{\simeq} \frac{\mathbb{P}_{p,p'}(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)}{\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)} = \frac{\mathbb{P}_{p,p'}(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)}{\mathbb{P}_{p,p}(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)}$$
$$= \mathbb{E}_p\left[e^{L(C_{0,n\vec{e}_1})}\middle|0 \leftrightarrow n\vec{e}_1\right]$$

Onde $L(C_{0,n\vec{e}_1})$ é o "hamiltoniano"

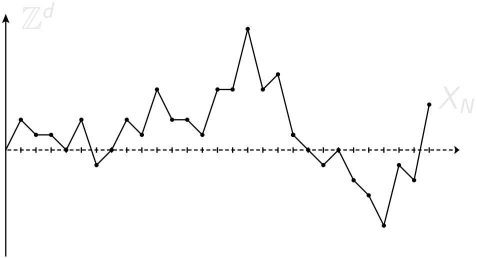
$$L(C) = |C \cap \mathcal{L}| \underbrace{\log \tfrac{p'}{p}}_{>0\ldots} + |\partial C \cap \mathcal{L}| \underbrace{\log \tfrac{1-p'}{1-p}}_{<0!} .$$

Parêntese: pinning de passeio aleatório

Passeio aleatório em $\mathbb{Z}^d$ ($d \leftrightarrow d-1!$): $X_0 = 0$,

$$X_N = Y_1 + \cdots + Y_N \,,$$

com (Y_j) i.i.d., $E[Y_j] = 0$, $P(\| Y_j \| \geq \ell) \leq e^{-c\ell}$.



- $P(X_N = 0) \sim \frac{1}{N^{d/2}}$
- Tempo local:
  $L_N := \sum_{k=0}^{N} 1_{\{X_k = 0\}}$

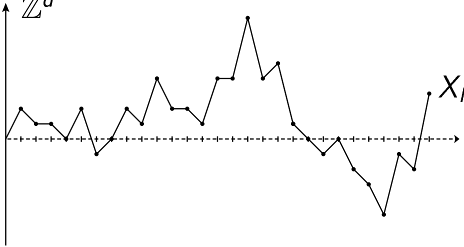
$$E[L_N] \sim \begin{cases} \sqrt{N} & (d=1)\,, \\ \log N & (d=2)\,, \\ \leq c_d & (d \geq 3)\,. \end{cases}$$

$\Rightarrow L_N \ll N$.

Passeio aleatório em $\mathbb{Z}^d$ ($d \leftrightarrow d-1!$): $X_0 = 0$,

$$X_N = Y_1 + \cdots + Y_N \,,$$

com (Y_j) i.i.d., $E[Y_j] = 0$, $P(\| Y_j \| \geq \ell) \leq e^{-c\ell}$.



- $P(X_N = 0) \sim \frac{1}{N^{d/2}}$
- Tempo local:
  $L_N := \sum_{k=0}^{N} 1_{\{X_k = 0\}}$

$$E[L_N] \sim \begin{cases} \sqrt{N} & (d=1)\,, \\ \log N & (d=2)\,, \\ \leq c_d & (d \geq 3)\,. \end{cases}$$

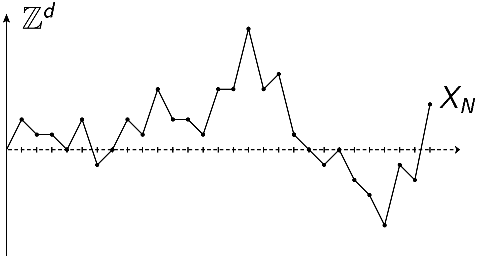
$\Rightarrow L_N \ll N$.

Parêntese: pinning de passeio aleatório

Passeio aleatório em $\mathbb{Z}^d$ ($d \leftrightarrow d-1!$): $X_0 = 0$,

$$X_N = Y_1 + \cdots + Y_N ,$$

com (Y_j) i.i.d., $E[Y_j] = 0$, $P(\| Y_j \| \geq \ell) \leq e^{-c\ell}$.

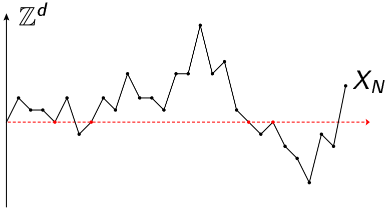


- $P(X_N = 0) \sim \frac{1}{N^{d/2}}$
- Tempo local: $L_N := \sum_{k=0}^N 1_{\{X_k = 0\}}$

$$E[L_N] \sim \begin{cases} \sqrt{N} & (d=1)\,, \\ \log N & (d=2)\,, \\ \leq c_d & (d \geq 3)\,. \end{cases}$$

$\Rightarrow L_N \ll N$.

Favorecendo as visitas na origem



Parâmetro de pinning: $\epsilon > 0$

$$\frac{dP_N^\epsilon}{dP} := \frac{e^{\epsilon L_N}}{E[e^{\epsilon L_N}]}$$

Há **pinning** se existir $\rho > 0$ tal que $P_N^\epsilon(L_N \geq \rho N) \to 1$.

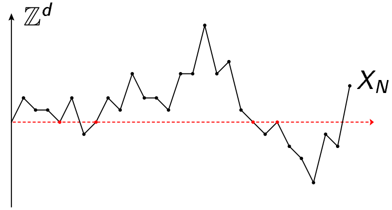
$$\text{Energia livre:} \quad f(\epsilon) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log E[e^{\epsilon L_N}] .$$

Fato: $f(\epsilon) > 0 \Rightarrow$ pinning.

Teorema (clássico)

- *$d = 1, 2$: há pinning para todo $\epsilon > 0$.*
- *$d \geq 3$: há pinning se e somente se $\epsilon > \epsilon_c(d) > 0$.*

Favorecendo as visitas na origem



Parâmetro de pinning: $\epsilon > 0$

$$\frac{dP_N^\epsilon}{dP} := \frac{e^{\epsilon L_N}}{E[e^{\epsilon L_N}]}$$

Há **pinning** se existir $\rho > 0$ tal que $P_N^\epsilon(L_N \geq \rho N) \to 1$.

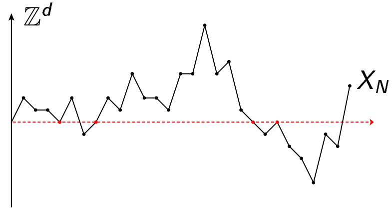
$$\text{Energia livre:} \quad f(\epsilon) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log E[e^{\epsilon L_N}] .$$

Fato: $f(\epsilon) > 0 \Rightarrow$ pinning.

Teorema (clássico)

- *$d = 1, 2$: há pinning para todo $\epsilon > 0$.*
- *$d \geq 3$: há pinning se e somente se $\epsilon > \epsilon_c(d) > 0$.*

Favorecendo as visitas na origem



Parâmetro de pinning: $\epsilon > 0$

$$\frac{dP_N^\epsilon}{dP} := \frac{e^{\epsilon L_N}}{E[e^{\epsilon L_N}]}$$

Há **pinning** se existir $\rho > 0$ tal que $P_N^\epsilon(L_N \geq \rho N) \to 1$.

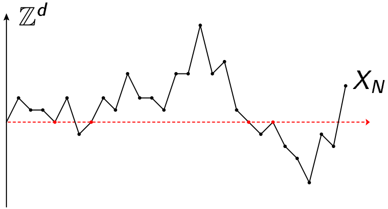
$$\text{Energia livre:} \quad f(\epsilon) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log E[e^{\epsilon L_N}] .$$

Fato: $f(\epsilon) > 0 \Rightarrow$ pinning.

Teorema (clássico)

- *$d = 1, 2$: há pinning para todo $\epsilon > 0$.*
- *$d \geq 3$: há pinning se e somente se $\epsilon > \epsilon_c(d) > 0$.*

Favorecendo as visitas na origem



Parâmetro de pinning: $\epsilon > 0$

$$\frac{dP_N^\epsilon}{dP} := \frac{e^{\epsilon L_N}}{E[e^{\epsilon L_N}]}$$

Há **pinning** se existir $\rho > 0$ tal que $P_N^\epsilon(L_N \geq \rho N) \to 1$.

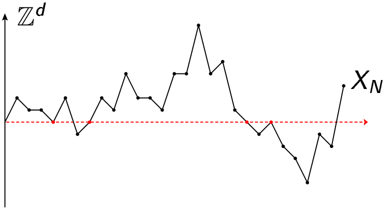
$$\text{Energia livre:} \quad f(\epsilon) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log E[e^{\epsilon L_N}] .$$

Fato: $f(\epsilon) > 0 \Rightarrow$ pinning.

Teorema (clássico)

- *$d = 1, 2$: há pinning para todo $\epsilon > 0$.*
- *$d \geq 3$: há pinning se e somente se $\epsilon > \epsilon_c(d) > 0$.*

Favorecendo as visitas na origem



Parâmetro de pinning: $\epsilon > 0$

$$\frac{dP_N^\epsilon}{dP} := \frac{e^{\epsilon L_N}}{E[e^{\epsilon L_N}]}$$

Há **pinning** se existir $\rho > 0$ tal que $P_N^\epsilon(L_N \geq \rho N) \to 1$.

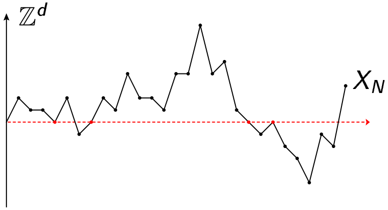
$$\text{Energia livre:} \quad f(\epsilon) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log E[e^{\epsilon L_N}] .$$

Fato: $f(\epsilon) > 0 \Rightarrow$ pinning.

Teorema (clássico)

- *$d = 1, 2$: há pinning para todo $\epsilon > 0$.*
- *$d \geq 3$: há pinning se e somente se $\epsilon > \epsilon_c(d) > 0$.*

Favorecendo as visitas na origem



Parâmetro de pinning: $\epsilon > 0$

$$\frac{dP_N^\epsilon}{dP} := \frac{e^{\epsilon L_N}}{E[e^{\epsilon L_N}]}$$

Há **pinning** se existir $\rho > 0$ tal que $P_N^\epsilon(L_N \geq \rho N) \to 1$.

$$\text{Energia livre:} \quad f(\epsilon) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log E[e^{\epsilon L_N}]\,.$$

Fato: $f(\epsilon) > 0 \Rightarrow$ pinning.

Teorema (clássico)

- *$d = 1, 2$: há pinning para todo $\epsilon > 0$.*
- *$d \geq 3$: há pinning se e somente se $\epsilon > \epsilon_c(d) > 0$.*

Voltando para a linha de defeitos:

$$\frac{\mathbb{P}_{p,p'}(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)}{\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)} = \mathbb{E}_p\left[e^{L(C_{0,n\vec{e}_1})}\middle| 0 \leftrightarrow n\vec{e}_1\right]$$

Cota superior ($d \geq 2$): se $p' > p$,

$$\begin{aligned} L(C) &= |C \cap \mathcal{L}| \log \tfrac{p'}{p} + |\partial C \cap \mathcal{L}| \log \tfrac{1-p'}{1-p} \\ &\leq |C \cap \mathcal{L}| \log \tfrac{p'}{p} \\ &\equiv \epsilon |C \cap \mathcal{L}|, \quad \epsilon > 0 \ldots \end{aligned}$$

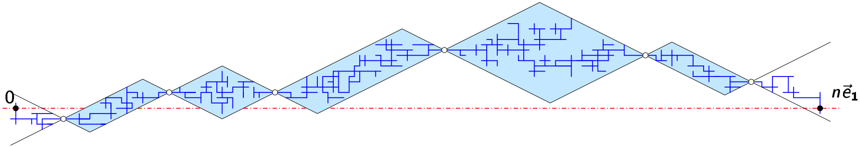
Voltando para a linha de defeitos:

$$\frac{\mathbb{P}_{p,p'}(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)}{\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)} = \mathbb{E}_p\left[e^{L(C_{0,n\vec{e}_1})}\middle| 0 \leftrightarrow n\vec{e}_1\right]$$

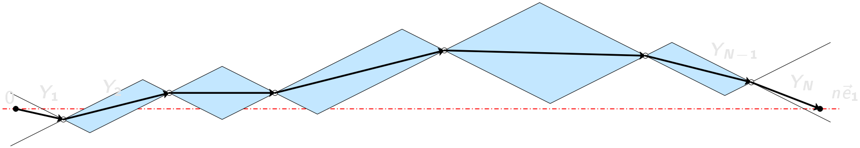
COTA SUPERIOR ($d \geq 2$): se $p' > p$,

$$\begin{aligned} L(C) &= |C \cap \mathcal{L}| \log \tfrac{p'}{p} + |\partial C \cap \mathcal{L}| \log \tfrac{1-p'}{1-p} \\ &\leq |C \cap \mathcal{L}| \log \tfrac{p'}{p} \\ &\equiv \epsilon |C \cap \mathcal{L}|\,, \quad \epsilon > 0 \dots \end{aligned}$$

$C_{0,n\vec{e}_1}$ E O PASSEIO EFETIVO

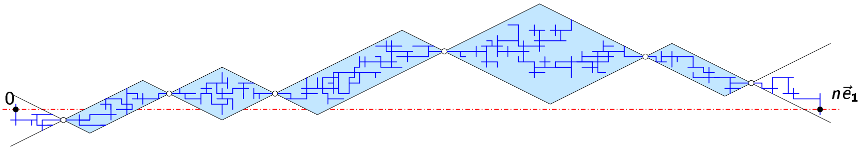


(Campanino, Ioffe, Velenik)

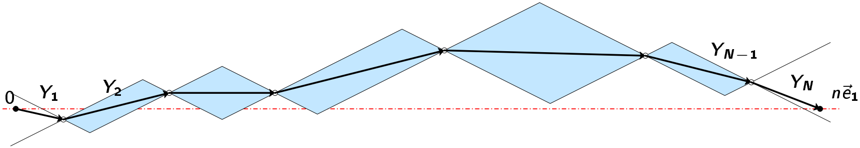


$$\frac{\mathbb{P}_{p,p'}(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)}{\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)} \leq \mathbb{E}_p\left[e^{\epsilon|C\cap\mathcal{L}|}\middle|0 \leftrightarrow n\vec{e}_1\right] \leq E\left[e^{\epsilon\sum_{k=1}^{N}|D(Y_k)\cap\mathcal{L}|}\right]\dots$$

$C_{0,n\vec{e}_1}$ E O PASSEIO EFETIVO

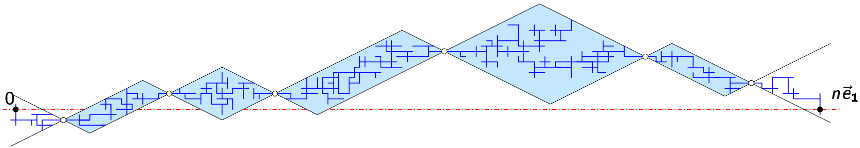


(Campanino, Ioffe, Velenik)

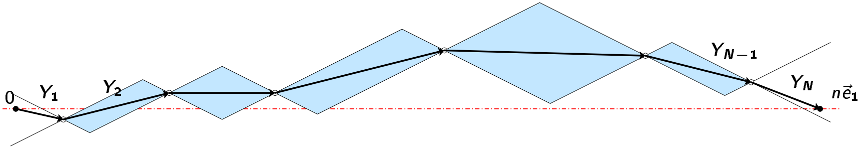


$$\frac{\mathbb{P}_{p,p'}(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)}{\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)} \leq \mathbb{E}_p\left[e^{\epsilon|C\cap\mathcal{L}|}\middle| 0 \leftrightarrow n\vec{e}_1\right] \leq E\left[e^{\epsilon\sum_{k=1}^{N}|D(Y_k)\cap\mathcal{L}|}\right]\dots$$

$C_{0,n\vec{e}_1}$ E O PASSEIO EFETIVO



(Campanino, Ioffe, Velenik)



$$\frac{\mathbb{P}_{p,p'}(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)}{\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)} \leq \mathbb{E}_p\left[e^{\epsilon|C\cap\mathcal{L}|}\middle|0 \leftrightarrow n\vec{e}_1\right] \leq E\left[e^{\epsilon\sum_{k=1}^N |D(Y_k)\cap\mathcal{L}|}\right] \dots$$

COTA INFERIOR (aqui: em $d = 2$): Se $M \subset \{0 \leftrightarrow n\vec{e}_1\}$ é crescente,

$$\frac{\mathbb{P}_{p,p'}(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)}{\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)} \geq \frac{\mathbb{P}_{p,p'}(M)}{\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)}$$

$$= \underbrace{\frac{\mathbb{P}_{p,p'}(M)}{\mathbb{P}_p(M)}}_{energia} \times \underbrace{\mathbb{P}_p(M|0 \leftrightarrow n\vec{e}_1)}_{entropia}$$

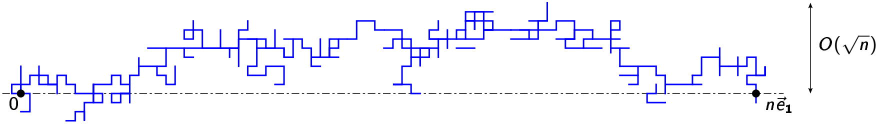
$$\geq e^{\delta(p'-p)n} \times e^{-\delta^2 n}$$

Com $\delta := \frac{p'-p}{2}$, $\quad = e^{-\frac{1}{4}(p'-p)^2 n}.$

$$\Rightarrow \xi_p - \xi_{p,p'} \leq \frac{1}{4}(p'-p)^2$$

Resumo

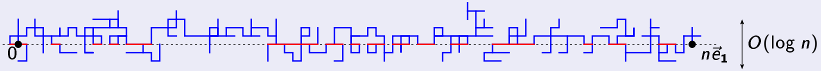
Quando $p' = p$:



Teorema ($d \geq 2$)

Para todo $p > p'_c$, existe $\psi_p > 0$ tal que

$$\mathbb{P}_{p,p'}(0 \leftrightarrow n\vec{e}_1) = \psi_p e^{-\xi_{p,p'} n}(1 + o(1)) .$$



Obrigado!