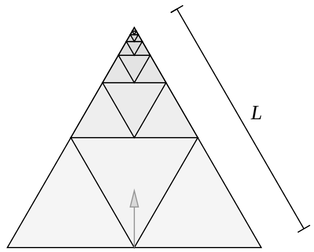


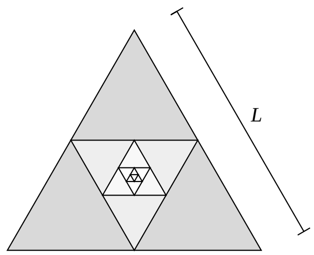
Solução.- Os lados de cada triângulos são iguais a mitade do lado do triângulo anterior. Assim o primeiro triângulo tem lado $L/2$ o segundo tem lado $L/4$ o terceiro tem lado $L/8$. Em geral o enésimo triângulo tem lado igual a $L/2^n$. Por outro lado, sabemos que a área de um triângulo equilátero de lado a é $a^2\sqrt{3}/4$. Portanto a área do enésimo triângulo é igual a: $\sqrt{3}L^2/2^{2n+2}$. As seqüências das áreas está dada por

$$x_n = \sqrt{3}\frac{L^2}{2^{2n+2}} = \sqrt{3}\frac{L^2}{4^{n+1}}.$$

Calculando o limite quando $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3}\frac{L^2}{2^{2n+2}} = \sqrt{3}L^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^{n+1}} = 0$$

Exemplo 3.3.6 *Descreva a seqüência das áreas dos triângulos equiláteros mostrada na figura e verifique que a) o limite dessa seqüência é zero b) que os triângulos convirgem a um ponto que concincide com o baricentro do triângulo maior. Considere que o lado de um triângulo é igual a metade do lado do triângulo anterior.*



Solução.- Análogamente ao exercício anterior os triângulos tem a propriedade de que um tem lado igual a mitade do lado do triângulo anterior. Assim o primeiro triângulo tem lado $L/2$ o segundo tem lado $L/4$ o terceiro tem lado $L/8$. Em geral o enésimo triângulo tem lado igual a $L/2^n$. Por outro lado, sabemos que a área de um triângulo equilátero de lado a é $a^2\sqrt{3}/2$. Portanto a área do enésimo retângulo é igual a: $\sqrt{3}L^2/2^{2n+1}$. Assim as seqüências das áreas está dada por

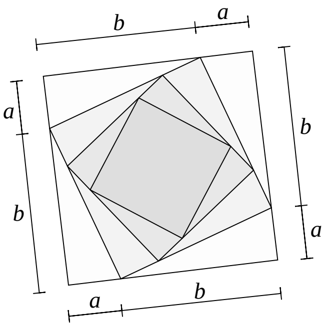
$$x_n = \sqrt{3}\frac{L^2}{2^{2n+1}}$$

É simples verificar que o limite é zero. De fato

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}L^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = 0$$

Finalmente, de uma simples inspeção verificamos que todos os triângulos da seqüência tem os mesmos baricentros. Portanto concluimos que os triângulos convergem a um ponto que é o baricentro des triângulos.

Exemplo 3.3.7 *Descreva a seqüência das áreas dos quadrados mostrada na figura e verifique que a) o limite dessa seqüência é zero b) Que os quadrados convirgem a um ponto que concincide com o centro do quadrado maior. Suponha que $b = 3a$ e que todos os lados dos quadrados preservão a mesma proporção.*



Solução.- Denotemos por L o lado do primeiro quadrado, em termos de a e b temos

$$L = a + b = 4a.$$

O lado do segundo quadrado é a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos igual $L/4$ e $3L/4$ isto é

$$L_2 = \sqrt{\left(\frac{L}{4}\right)^2 + \left(\frac{3L}{4}\right)^2} = L\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

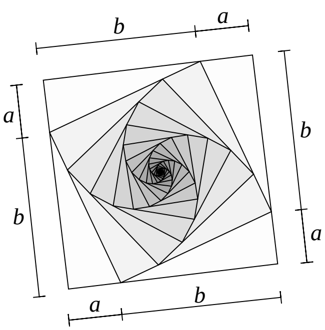
L_3 é a hipotenusa do triângulo retângulo formado pelos catetos $L_2/4$ e $3L_2/4$ isto é

$$L_3 = \sqrt{\left(\frac{L_2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3L_2}{4}\right)^2} = L_2\frac{\sqrt{10}}{4} = L\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2.$$

Análogamente temos que o lado do cuarto quadrado é dado por

$$L_4 = \sqrt{\left(\frac{L_3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3L_3}{4}\right)^2} = L_3\frac{\sqrt{10}}{4} = L\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^3.$$

Em geral teremos que o enésimo termo é dado por



$$L_n = \sqrt{\left(\frac{L_{n-1}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3L_{n-1}}{4}\right)^2} = L_{n-1}\frac{\sqrt{10}}{4} = L\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^n.$$

Portanto a seqüência das áreas dos quadrados é

$$A_n = L_n^2 = L^2\left(\frac{5}{8}\right)^n.$$

Tomando limite, encontramos

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} L^2\left(\frac{5}{8}\right)^n = 0$$

Finalmente, como todos os quadrados são concentricos o limite dos quadrados será o centro do quadrado maior. A seqüência de quadrados define o fractal dado na figura acima.

Observação 3.3.1 *As seqüências de quadrados estudadas no exercício anterior pode criar figuras interessantes, fazendo variar os valores de a.*