Finalmente das fórmulas da cinemática concluímos que a altura em cada unidade de tempo é dada por

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

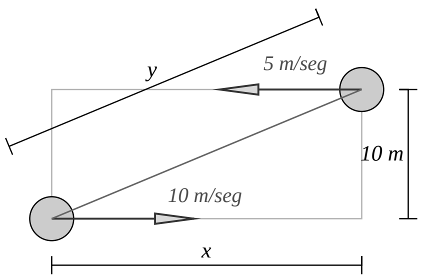
enquanto que a velocidade da queda em cada instante de tempo é dada por

$$\frac{dh}{dt} = -gt.$$

Tomando $h = 50$ encontramos que $t = 10$. Portanto a velocidade com que cai o corpo na altura de $50m$ é igual a $\frac{dh}{dt} = -10g$. Finalmente, o ângulo θ diminue com uma velocidade igual a

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{100}{100^2 + 50^2}10g = -\frac{2}{25}g \quad Rad/seg.$$

Exemplo 7.1.9 *Dois corpos se movimentam em trajetórias paralelas com uma separação de 10 metros, e com direções opostas. Se um corpo se movimenta a 10 m/seg e o outro a 5 m/seg, encontre a velocidade com que estes corpos se acercam quando a distância horizontal entre eles é* $5m$.



Suponhamos que as trajetórias paralelas sejam horizontais. Denotemos por x a distância horizontal entre os corpos e por y a distância entre ambos. Do teorema de Pitágoras encontramos que

$$x^2 + 10^2 = y^2.$$

O problema consiste em calcular $\frac{dy}{dt}$. Derivando a expressão anterior encontramos

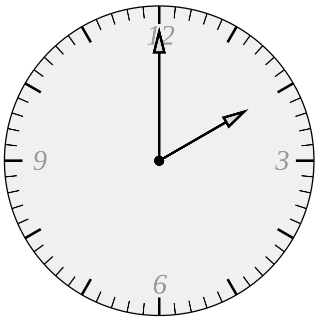
$$2x\frac{dx}{dt} = 2y\frac{dy}{dt}.$$

Se $x = 5$ temos que $y = 5\sqrt{5}$. Note que a velocidade horizontal com que os corpos se acercam é igual a $\frac{dx}{dt} = 10 + 5 = 15$. Concluímos assim que

$$2(5)(15) = 2(5\sqrt{5})\frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = 3\sqrt{5}.$$

Exemplo 7.1.10 *Encontre a velocidade com que os ponteiros de um relógio de pulso se acercam as 14:00 horas. Assuma que os comprimentos dos ponteros são* $1cm$ *e* $1.5cm$

Solução.- Denotemos por y a distância entre os ponteiros do relógio y por θ o ângulo entre os ponteiros. Nosso problema é calcular $\frac{dy}{dt}$ quando o relógio marca as 14 horas. Repare que nesse momento $\theta = 60^o$.



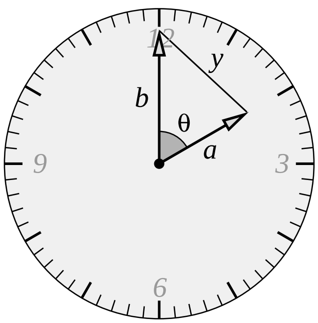
Aplicando a Lei se cossenos temos que y satisfaz.

$$y = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)}.$$

Derivando y com relação ao tempo encontramos que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2ab\,\text{sen}(\theta)\theta'(t)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)}}.$$

Nosso problema se reduz a encontrar a velocidade com que varia θ. Note que ambas as agulhas do relógio se movimentam com velocidade angular constante.
O ponteiro que indica os minutos se movimenta com uma velocidade angular igual a $2\pi/60$ rad/min. Enquanto que o ponteiro que indica as horas se movimenta a uma velocidade angular igual a $2\pi/12 \times 60$ rad/min.

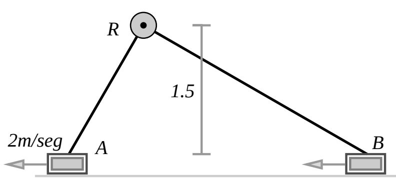


Portanto θ diminui a uma velocidade igual a $2\pi/60 - 2\pi/720 \approx .096$ rad/min. Substituindo valores encontramos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2(1)(1.5)\,\text{sen}(60).096}{\sqrt{(1)^2 + (1.5)^2 - 2(1)(1.5)\cos(60)}} = \frac{0.249}{\sqrt{1.75}} = 0.188.$$

Portanto os ponteiros do relógio se acercam com uma velocidade de 0.188 cm/min.

Exemplo 7.1.11 *Dois blocos estão munidos por uma corda de 6 m de comprimento, que passa por uma roldana situado a 1.5 m de altura. Se o bloco da izquerda se movimenta a 2m/seg, com que velocidade se movimentará o segundo bloco quando o comprimento da corda entre a roldana e o primeiro bloco seja igual a 2.5 m. Considere nulas as forças de atrito.*



Solução.- O problema consiste em calcular a velocidade com que se movimenta o bloco B no gráfico. O comprimento do cabo permanece constante o que faz com que a soma dos segmentos que vão do bloco A à roldana com o segmento que vai da roldana ao bloco B seja constante. Note que o cabo define um triângulo de vértices A, B e R de altura $h = 1.5$ fixo onde os lados $\overline{AR}$ e $\overline{RB}$ tem soma constante igual a $6m$, isto é, de acordo com o gráfico teremos que

$$a + b = 6.$$