Capítulo 1

Equações Diferenciais de Primeira Ordem

1.1 Introdução

Equações diferenciais é um dos tópicos da matemática com aplicações em quase todos os ramos da ciência. Física, Química, Biologia, Economia são algumas destas áreas. Para entender melhor, toda equação contendo derivadas de funções são chamadas de equações diferenciais. Portanto, o estudo de equações diferenciais e suas aplicações dependem do que se entende por derivada de uma função, tópico este já estudado em Cálculo I. As equações abaixo são alguns exemplos de equações diferenciais que estudaremos neste e no próximo capítulo.

$$y' + 2xy = 3x^2 \,, \quad xy' + \operatorname{sen} x \, y = e^x \,, \quad 3y'' + 4y' + 5y = \cos x$$

As duas primeiras equações diferenciais são chamadas de primeira ordem e a última de segunda ordem, devido à ordem da derivada de maior ordem ser um e dois, respectivamente.

Uma equação diferencial que descreve algum processo físico, químico, biológico, econômico ... etc, é chamada de modelo matemático do processo em questão e chegar a esta equação a partir das descrições destes processos é chamado de modelagem do problema. Chegar a este modelos e resolvê-los é o que veremos a seguir.

Exemplo 1.1 *Vimos em Cálculo I que calcular a $\int f(x)\,dx$ é encontrar uma primitiva F da função dada f, ou seja, é determinar uma função F tal que, $F' = f$, isto é,*

$$F' = f \Longleftrightarrow \int f(x)\,dx = F(x)$$

Esta equação foi a primeira equação diferencial que resolvemos e a primitiva F nada mais é que uma solução para esta equação diferencial. Por exemplo, resolver $F'(x) = \cos(x)$ é equivalente a

$$F(x) = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + \mathrm{c} \,,$$

o que nos mostra que esta equação diferencial tem infinitas soluções. O estudo da existência e unicidade de soluções é um dos aspectos mais interessantes desta teoria.

Exemplo 1.2 *Considere um corpo de massa m caindo na atmosfera. Se desprezarmos a resistência do ar, chamando de v sua velocidade em um determinado instante de tempo t e de a sua aceleração, a única força atuante é a do seu próprio peso $p = mg$, onde g é a constante gravitacional. Pela segunda lei de Newton teremos*

$$F = ma = p = mg \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dv}{dt} = g \Longrightarrow v(t) = gt + c \tag{1.1}$$

Se o objeto partiu do repouso, sua velocidade inicial $v(0) = 0$*, e, então,* $v(t) = gt$*. Se o objeto partiu com uma velocidade inicial* $v(0) = v_0$*, então,* $v(t) = gt + v_0$*. A equação 1.1 nos diz que toda solução* $v(t)$ *tem inclinação* g*, isto é, a velocidade não varia com o tempo e tem sempre a mesma inclinação. Isto é mostrado no gráfico abaixo, chamado de campo de direções ou vetores, onde desenhamos pequenos segmentos de reta com coeficiente angular* $g = 9,8$*. Chamando de* $x(t)$ *a*

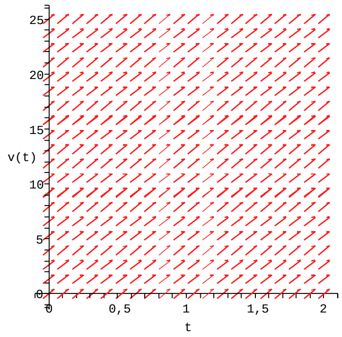

Figura 1.1: Campo de direções para a equação $\frac{dv}{dt} = g$

posição do objeto em cada instante de tempo t*, temos que*

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = gt + v_0 \Longrightarrow x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + c$$

Se o objeto parte de uma posição inicial $x(0) = x_0$*, tem-se* $x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$*.*

Exemplo 1.3 *Considere o problema anterior, agora, com o ar oferecendo uma resistência proporcional à velocidade. As forças atuantes no sistema, agora, são o peso e a resistência do ar. Assim, pela segunda lei de Newton,*

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \Longrightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v \tag{1.2}$$

Podemos fazer uma análise do comportamento da solução desta equação diferencial sem resolvê-la, como fizemos no exemplo 1, através do seu campo de direções. Para isto, vamos dar valores às constantes envolvidas na equação 1.2. Considere $g = 9,8\ \frac{m}{s^2}$*,* $m = 20\ kg$ *e o coeficiente de resistência do ar* $k = 5\ \frac{kg}{s}$*.*

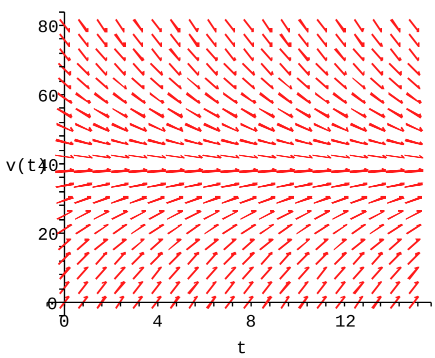

Figura 1.2: Campo de direções da equação $\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{4}$

Observe que o campo de vetores na figura 1.2 é traçado no plano $t \times v$ *sem resolver a equação 1.2, dando-se um valor para a velocidade* v*, por exemplo* $v = 60$ *e obtendo-se o valor de* $\frac{dv}{dt} = -5,2$

para todo valor de t. Com isso traça-se pequenos segmentos de retas, ou vetores, para determinados valores de t, eqüidistantes, ao longo da reta $v = 60$ com o mesma declividade. Olhando para a figura, observe que se o objeto partir com velocidade acima de $40\,m/s$, ou abaixo, esta velocidade tende a diminuir ou crescer, respectivamente, e se aproximar da velocidade terminal ou de equilíbrio que, como se vê no gráfico, deve ser próxima de $40\,m/s$.

Voltemos para a resolução da equação 1.2. Chamando $\dfrac{k}{m} = h$, observe que

$$\frac{dv}{dt} = g - hv \Longleftrightarrow \frac{1}{g - hv}\frac{dv}{dt} = 1 \tag{1.3}$$

Integrando ambos os lados com respeito à variável t, obtém-se:

$$\int \frac{1}{g - hv}\frac{dv}{dt}\,dt = \int dt = t + c_1 \tag{1.4}$$

Agora, para calcular a integral do lado esquerdo acima, observe que se $v = v(t)$, então, $dv = v'(t)dt$. Fazendo esta substituição, tem-se:

$$\int \frac{1}{g - hv}\frac{dv}{dt}\,dt = \int \frac{1}{g - hv}\,dv \tag{1.5}$$

Agora, fazemos a substituição $u = g - hv \Rightarrow du = -h\,dv$, assim,

$$\int \frac{1}{g - hv}\,dv = -\frac{1}{h}\int \frac{1}{u}\,du = -\frac{1}{h}\,\ln|u| + c_2 = -\frac{1}{h}\,\ln|g - hv| + c_2 \tag{1.6}$$

Assim, as equações 1.4 e 1.6 implicam que

$$-\frac{1}{h}\,\ln|g - hv| + c_2 = t + c_1 \Longleftrightarrow \ln|g - hv| = -ht - hc_1 + c_2 = -ht + c_3$$

onde, $c_3 = -hc_1 + c_2$ é uma constante real qualquer. Assim,

$$|g - hv| = e^{-ht + c_3} \Longrightarrow g - hv = \pm e^{-ht + c_3} = ce^{-ht} \Longrightarrow v = \frac{g}{h} - ce^{-ht}$$

onde $c = \pm e^{c_3}$, ou seja, c é uma constante real qualquer diferente de zero.

Se o objeto parte do repouso, temos uma condição inicial $v(0) = 0$, e assim,

$$v(0) = \frac{g}{h} - c = 0 \Longrightarrow c = \frac{g}{h}$$

e, portanto,

$$v(t) = \frac{g}{h}(1 - e^{-ht}) \tag{1.7}$$

A figura 1.3 mostra o campo de vetores com as condições iniciais $v(0) = 0$ e $v(0) = 60$.

Note que a solução $v(t) \to \frac{g}{h}$, quando o tempo $t \to \infty$, que é também uma solução da equação 1.2. Para verificar isto, basta substituir $v = \frac{g}{h}$ na equação 1.2 e verificar que dará $0 = 0$.

Se quisermos determinar a posição do objeto em cada instante, basta lembrar que $\dfrac{dx}{dt} = v(t)$ e supondo que sua posição inicial $x(0) = 0$, tem-se

$$x(t) = \frac{g}{h}t + \frac{g}{h^2}e^{-ht}$$

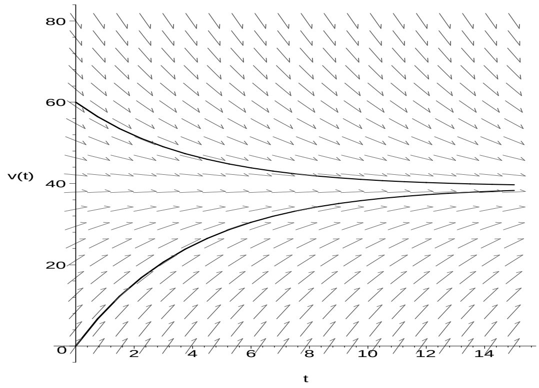

Figura 1.3:

1.2 Equações Separáveis

A resolução da equação do exemplo 1.3 da seção anterior pode ser esquematizada de modo a ficar mais prático e rápido de se resolver equações daquele tipo. Tal método é chamado de separação de variáveis e as equações de equações separáveis. Note que a substituição que fizemos na integral do lado esquerdo em 1.4, nos dá uma igualdade que, de um lado temos apenas a variável v e do outro, apenas a variável t, isto é, separamos as variáveis t e v.

Resumindo: O método de separação de variáveis se aplica a equações do tipo

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y) \tag{1.8}$$

Assim, se $y = f(x)$ é uma solução de 1.8, então,

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y) = \frac{1}{h(f(x))} f'(x) = g(x) \Longrightarrow \int \frac{1}{h(f(x))} f'(x)\,dx = \int g(x)\,dx \tag{1.9}$$

porém, como $y = f(x) \Rightarrow dy = f'(x)\,dx$ e assim,

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx$$

Exemplo 1.4 *Resolva as equações*

(a) $\dfrac{dy}{dx} = xy$ *(b)* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\cos x}{1+2y^2}$ *(c)* $\dfrac{dy}{dx} = 3y+5$

Solução: (a) *Separando as variáveis*

$$\frac{dy}{dx} = xy \Longleftrightarrow \frac{1}{y}dy = x\,dx$$

Integrando ambos os lados, resulta

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C_1 \Longrightarrow |y| = e^{\frac{x^2}{2}} e^{c_1} \Longrightarrow y = \pm e^{c_1} e^{\frac{x^2}{2}} = ce^{\frac{x^2}{2}}, \qquad 0 \neq c \in \mathbb{R}$$

Observe que a função $y = 0$, também é solução. Portanto, a solução geral desta equação é

$$y = ce^{\frac{x^2}{2}}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

A figura 1.4 mostra o campo de vetores e aos gráficos da solução para vários valores de c.

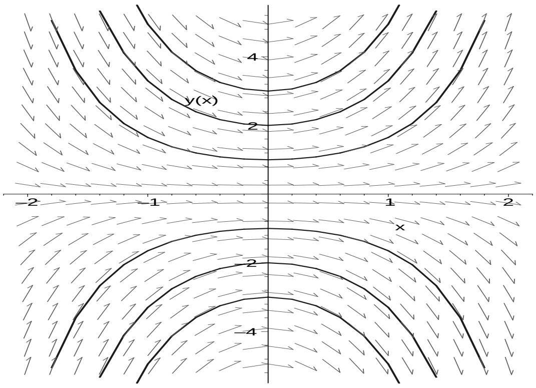

Figura 1.4: Campo de vetores e curvas integrais para $y' = xy$

(b) *Separando as variáveis e integrando*

$$\frac{1+2y^2}{y}\,dy = \cos x\,dx \Longrightarrow (\frac{1}{y} + 2y)\,dy = \cos x\,dx \Longrightarrow \ln|y| + y^2 = \operatorname{sen} x + c$$

Observe que não podemos explicitar y como uma função de x. A solução, neste caso, é chamada de solução implícita da equação.

Observe que $y = 0$ também é solução da equação.

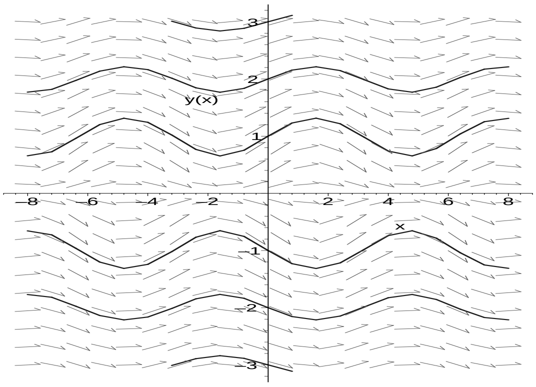

Figura 1.5: Campo de vetores e curvas integrais para $\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos x}{1+2y^2}$

(c) *Separando as variáveis e integrando e supondo $3y + 5 \neq 0$, temos*

$$\frac{dy}{3y+5} = dx \Rightarrow \ln|3y+5| = x + c_1 \Rightarrow y = \frac{-5 \pm e^{c_1}e^{3x}}{3}$$

Observe que $y = -\frac{5}{3}$ também é solução da equação. Assim, se colocarmos $e^{c_1} = c$, podemos reescrever a solução como

$$y = \frac{-5 + ce^{3x}}{3},$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

Observe na figura 1.6 que as soluções convergem rapidamente para a solução de equilíbrio $y = -\frac{5}{3}$

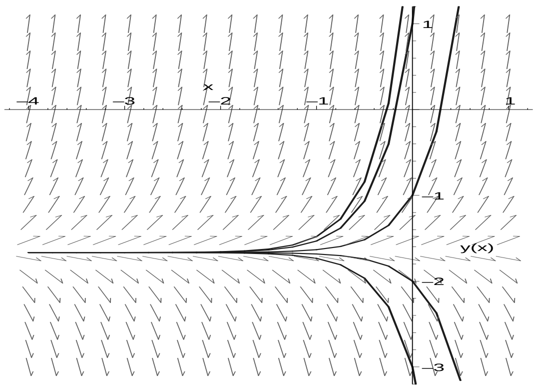

Figura 1.6: Campo de vetores e curvas integrais para $y' = 3y + 5$

1.3 Equações Lineares

Equações do tipo

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x) \tag{1.10}$$

ou, simplificadamente,

$$y' + py = q\,,$$

onde $p = p(x)$ e $q = q(x)$ são funções contínuas em algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$, são chamadas de equações diferencias lineares de 1ª ordem. As funções $p = p(x)$ e $q = q(x)$ são chamadas de coeficientes da equação. É claro que a equação 1.2 pode ser reescrita na forma acima:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g\,.$$

Porém, nem toda equação linear é separável. Por exemplo: $y' + 3y = x$ não é separável.(Tente separar!)

Para se encontrar uma solução de uma equação linear, a idéia é transformar o lado esquerdo de 1.10 em alguma coisa do tipo $F' = f$, tal qual no método de separação de variáveis. Para isto, vamos multiplicar o lado esquerdo por uma função de tal modo que ele se transforme na derivada do produto de duas funções, pois é com o que ele se parece!

Vamos chamar de u esta função. Queremos, então, que

$$u(y' + py) = (uy)' = u'y + uy' \Leftrightarrow uy' + upy = u'y + uy'$$

Assim,

$$upy = u'y \Rightarrow \frac{u'}{u} = p \Rightarrow \ln|u| = \int p\,dx \Rightarrow |u| = e^{\int p\,dx}$$

Como queremos uma função para multiplicar ambos os lados da equação 1.10, podemos considerar

$$u = e^{\int p\,dx}$$

chamado de fator integrante.

Exemplo 1.5 *Resolva as equações*

(a) $y' + 2y = \cos x$ (b) $x^3y' - y = 1$

O fator integrante

$$u = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$$

. Multiplicando ambos os lados da equação por u obtém-se

$$\left(ye^{2x}\right)' = e^{2x}\cos x \Rightarrow \left(ye^{2x}\right) = \int e^{2x}\cos x\, dx$$

Integrando-se duas vezes por partes, obtém-se

$$y = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\text{sen}x + ce^{-2x}$$

Observe na figura 1.7 que uma solução particular da equação converge rapidamente para a solução de equilíbrio $y = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\text{sen}x$.

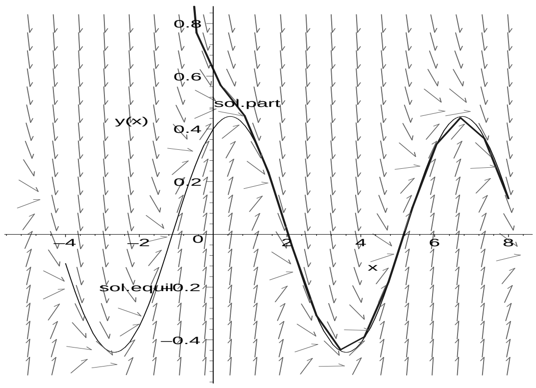

Figura 1.7:

Exemplo 1.6 (b) *Primeiramente, a equação* $x^3y' - y = 1$ *tem que ser colocada na forma linear* $y' + py = q$. *Assim, supondo* $x \neq 0$,

$$x^3y' - y = 1 \Leftrightarrow y' - \frac{y}{x^3} = \frac{1}{x^3}$$

Logo, o fator de integração $u = e^{\frac{x^{-2}}{2}}$. *Multiplicando ambos os lados da equação 1.6, obtém-se*

$$e^{\frac{x^{-2}}{2}}y = \int x^{-3}e^{\frac{x^{-2}}{2}}\, dx = -1e^{\frac{x^{-2}}{2}} + c \Rightarrow y = -1 + ce^{-\frac{1}{2x^2}}$$

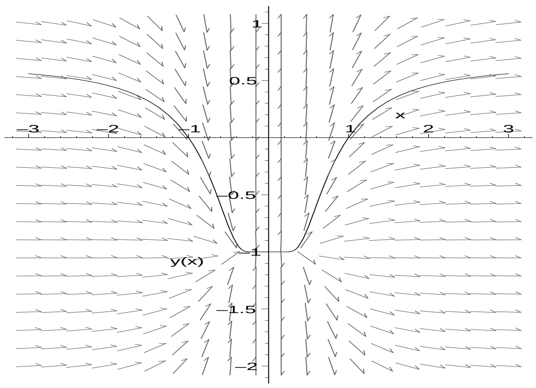

Figura 1.8:

Observe na figura 1.8 que muito embora a equação não esteja definida para $x = 0$, todas as soluções passam pelo ponto $(0, -1)$.

Exemplo 1.7 *Resolva o problema de valor inicial* $xy' + 2y = 4x^2$ *e* $y(1) = 2$

A equação acima é equivalente à equação $y' + \frac{2}{x}y = 4x$ *e portanto seu fator integrante* $u = x^2$. *Assim, multiplicando a equação por* u, *obtém-se*

$$(x^2y)' = 4x^3 \Rightarrow y = x^2 + \frac{c}{x^2}$$

Como a condição inicial $y(1) = 2$, *então,* $c = 1$, *e, portanto, a solução será*

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Veja na figura 1.9 que a solução que passa pelo ponto $(1, 2)$ *é descontínua em* $x = 0$ *e, portanto, temos uma solução contínua apenas para* $x > 0$. *Se impuséssemos a condição inicial* $y(1) = 1$, *a solução do problema seria* $y = x^2$, *contínua em todo* $x \in \mathbb{R}$.

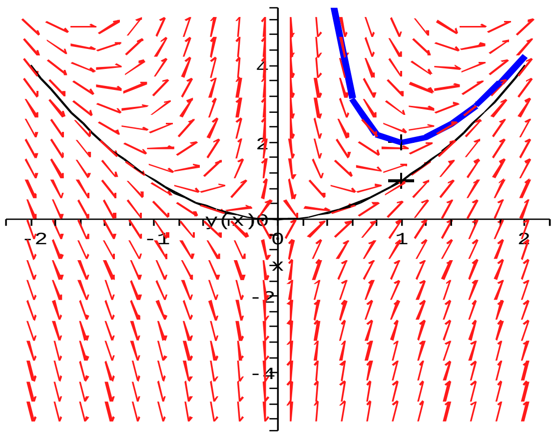

Figura 1.9:

A existência de soluções de equações diferenciais de 1ª ordem linear ou separável, bem como a unicidade de tais soluções, é tratada na próxima seção.

1.4 Existência e Unicidade de soluções

Até agora, só apresentamos dois métodos para encontrar a solução de uma equação diferencial de 1ª ordem do tipo separável ou linear. Vimos que quando uma condição inicial é dada encontramos apenas uma solução. A pergunta que não quer calar é:

`Será que não encontraríamos outras soluções se tivéssemos outros métodos de resolução para aplicar? Isto é, a solução é única?`

Ou ainda, antes mesmo de começar a perder um bocado de tempo tentando encontrar uma solução:

`A solução desta equação existe?`

Para equações lineares, as respostas a essas duas perguntas é dado pelo teorema:

Teorema 1.1 *Dado o problema com condição inicial:*

$$\begin{cases} y' + py = q \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.11}$$

se as funções $p = p(x)$ e $q = q(x)$ são contínuas em um intervalo aberto I, contendo o ponto x_0, então existe uma única função $y = f(x)$, $x \in I$ que satisfaz o problema de valor inicial 1.11.

Note que o teorema garante a existência e a unicidade de uma solução apenas no intervalo onde as funções p e q são contínuas. No exemplo 1.7 a função $p = \frac{2}{x}$ não é contínua no ponto $x = 0$, porém, dependendo da condição inicial, existem soluções que são contínuas no ponto $x = 0$.

Para equações não-lineares, temos um teorema mais geral:

Teorema 1.2 *Se f e $\frac{df}{dy}$ são contínuas em um retângulo $R = \{(t, y); |t| < a, |y| < b\}$, então existe algum intervalo $I = \{t; |t| < c < a\}$, no qual existe uma única solução $y = h(t)$ do problema de valor inicial*

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0$$

1.5 Aplicações

1.5.1 Crescimento e Decaimento Exponencial

1. Decaimento Radioativo

   O isótopo radioativo tório desintegra-se numa taxa proporcional à quantidade presente. Se 100 gramas deste material são reduzidos a 80 gramas em uma semana, ache uma expressão para a quantidade de tório em qualquer tempo.

   Calcule, também, o intervalo de tempo necessário para a massa decair à metade de seu valor original, chamado de meia vida.

   Solução: Seja $Q(t)$ a quantidade de tório em um instante t (dias). Como o tório desintegra-se numa taxa proporcional à quantidade presente, tem-se:

$$\frac{dQ}{dt} = kQ$$

   onde $k < 0$, pois $Q(t)$ é decrescente. Como já vimos, a solução desta equação diferencial pode ser encontrada através do método de separação de variáveis ou pelo fator integrante, cuja solução é:

$$Q(t) = ce^{kt}$$

   Como a condição inicial $Q(0) = 100$, então,

$$Q(t) = 100e^{kt}$$

   Para calcular o valor da constante k, usamos o fato de que o isótopo é reduzido a $80\,g$ em 7 dias, isto é,

$$Q(7) = 100e^{7k} = 80 \Rightarrow k = \frac{1}{7}\ln 0,8 = -0.031$$

   Para calcular a meia vida L do tório, tem-se

$$Q(L) = \frac{1}{2}Q(0) \Rightarrow 100e^{-0.031\,L} = 50 \Rightarrow L = \frac{ln2}{0.031} = 21,74\,\text{dias}$$

2. Crescimento Populacional

   Uma cultura de bactérias, com uma quantidade inicial Q_0 bactérias, cresce a uma taxa proporcional à quantidade presente. Ao fim de 20 minutos cresceu 5%.

   (a) Determine a quantidade de bacteria em qualquer tempo t.

   (b) Quanto tempo levará a cultura para duplicar?

   Solução: (a) Seja $Q(t)$ a quantidade presente de bactérias no instante t. Como a taxa de crescimento de bactérias é proporcional à quantidade presente, tem-se

$$\frac{dQ}{dt} = kQ \Longrightarrow Q(t) = Q_0 e^{kt}$$

   Como $Q(20) = 1,05\,Q_0 \Longrightarrow Q_0 e^{20k} = 1,05 Q_0 \Longrightarrow k = \frac{1}{20}\ln 1,05 = 0,00243$ Portanto,

$$Q(t) = Q_0 e^{0,00243t}$$

   (b) Vamos agora determinar para qual valor de t tem-se $Q(t) = 2Q_0$.

$$Q_0 e^{0,00243t} = 2Q_0 \Longrightarrow t = 284,13$$

3. Misturas

   Considere um tanque contendo, inicialmente, 100 litros de salmora com $10\,kg$ de sal. Suponha que uma torneira despeje mais salmora no tanque numa taxa de $3\,l/min$, com $1/4\,kg$ de sal por litro e que a solução bem misturada esteja saindo por um orifício no fundo do tanque na mesma taxa. Determine a quantidade de sal no tanque em qualquer instante.

   Solução: Seja $Q(t)$ a quantidade de sal no tanque em qualquer instante t. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{dt} &= \text{taxa de variação da quantidade de sal no tanque em relação ao tempo } t\\
&= \text{taxa } \frac{\text{quantidade de sal que entra - quantidade de sal que sai}}{\text{relação ao tempo}}\\
&= \text{taxa de entrada - taxa de saída da quantidade de sal}\\
&= \frac{1}{4}\frac{kg}{l}\,3\frac{l}{min} - \frac{Q(t)}{100}\frac{kg}{l}\,3\frac{l}{min}\\
&= \frac{3}{4} - \frac{3}{100}Q
\end{aligned}$$

   Assim
$$\frac{dQ}{dt} + \frac{3}{100}Q = \frac{3}{4} \Longrightarrow Q(t) = 25 + ce^{-0,03t}$$

   Como $Q(0) = 10$, então, $c = -15$ e, portanto,

$$Q(t) = 25 - 15e^{-0,03t}$$

4. Aplicações à Física

(a) Um paraquedista salta de um avião e cai livremente durante 30 segundos. Durante este tempo a resistência do ar é desprezada. Quando seu para-quedas abre a resistência do ar é proporcional à sua velocidade. Encontre a velocidade do paraquedista a partir do instante em que o para-quedas abriu.

Solução: Suponha que o aviador tenha massa m. Então, antes do para-quedas abrir temos:

$$m\frac{dv}{dt} = mg \Longrightarrow v = gt + c\,,$$

onde g é a constante gravitacional. Como a velocidade inicial $v(0) = 0$, então, $v = gt$ e assim $v(30) = 30g$, que é a condição inicial quando do problema quando o para-quedas abre. Neste caso, como as forças atuantes são o peso do paraquedista e força de resistência, tem-se,

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

Resolvendo-se esta equação utilizando o fator integrante $u = e^{\frac{k}{m}t}$, obtém-se

$$v(t) = \frac{m}{k}g + ce^{-\frac{k}{m}t}$$

Com a condição inicial $v(0) = 30g$, obtém-se

$$v(t) = \frac{m}{k}g + (30g - \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t}$$

Observe que quando $t \to +\infty \Rightarrow v(t) \to \frac{mg}{k}$, que é chamada de velocidade limite.

(b) Um torpedo de massa $m = 1$ é lançado horizontalmente, debaixo d'água, com velocidade inicial $v_0\, m/s$. A resistência d'água é proporcional à velocidade do torpedo ao quadrado com constante de proporcionalidade $k = 10^{-3}$. Se o torpedo deve atingir o alvo com pelo menos metade de sua velocidade inicial para causar danos, qual é a distância máxima a qual o tiro ainda produzirá efeito?

Solução: Como a única força atuante é a resistência d'água, tem-se a equação:

$$\frac{dv}{dt} = -10^{-3}v^2$$

que resolvendo-se por separação de variáveis obtém-se:

$$\int \frac{1}{v^2}\,dv = \int -10^{-3}\,dt \Longrightarrow v = \frac{1}{10^{-3}t + c}$$

Como sua velocidade inicial $v(0) = v_0$, então, $c = \frac{1}{v_0}$, e, portanto, sua velocidade é

$$v(t) = \frac{v_0}{10^{-3}v_0 t + 1}$$

Assim, supondo que sua posição inicial é dada por $x(0) = 0$, sua posição em cada instante é dada por

$$x(t) = 10^3 \ln\left(10^{-3}v_0 t + 1\right)$$

Agora, para calcular a distância máxima para o tiro ter efeito, devemos calcular o tempo que o alvo é atingido com metade de sua velocidade inicial, isto é, para que valor de t tem-se $v(t) = \frac{v_0}{2}$.

$$\frac{v_0}{10^{-3}v_0 t + 1} = \frac{v_0}{2} \Longrightarrow 10^{-3}v_0 t + 1 = 2 \Longrightarrow t = \frac{10^3}{v_0}$$

Calculando-se a distância com esse tempo, obtém-se:

$$x\left(\frac{10^3}{v_0}\right) = 10^3 \ln(2) = 693{,}14 \text{ metros}$$

1.6 Exercícios

1. Resolva as seguintes equações diferenciais:

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}$ R: $y = \ln\left(\frac{-1}{c+e^x}\right)$

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ R: $y = ce^{x^2}$

   (c) $(t^2 - xt^2)\dfrac{dx}{dt} + x^2 + tx^2 = 0$ R: $\frac{t+x}{tx} + \ln|\frac{x}{t}| = c$ e $x = 0$

   (d) $xy' = 2\sqrt{y-1}$ R: $y = (\ln|x| + c)^2 + 1$ e $y = 1$

   (e) $x\ln y\,\dfrac{dy}{dx} = y$ R: $(\ln y)^2 = \ln x^2 + c$

   (f) $(x^2+1)y' + y^2 + 1 = 0$ e $y(0) = 1$ R:$y = \frac{1-x}{1+x}$

   (g) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{y}$ e $y(0) = 1$ R: $y = \sqrt{2e^x - 1}$

   (h) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x}$ R: $y = c|x| + x\ln|x|$

   (i) $y' + 3y = x + e^{-2x}$ R: $y = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + e^{-2x} + ce^{-3x}$

   (j) $y' + x^2y = x^2$ R: $y = ce^{-\frac{x^3}{3}} + 1$

   (k) $y' - 3y = \mathrm{sen}2x$ R: $y = ce^{3x} - \frac{3}{11}\mathrm{sen}2x - \frac{1}{11}\cos 2x$

   (l) $y' + 2y = xe^{-2x}$ e $y(1) = 0$ R: $y = \frac{x^2}{2}e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$

   (m) $xy' + 2y = 4x^2$ e $y(1) = 2$ R: $y = x^2 + x^{-2}$

   (n) $\dfrac{dy}{dx} + 2\dfrac{\cos x}{\mathrm{sen}x}y = \mathrm{sen}x$ R: $y = \frac{c - 3\cos x + \cos^3 x}{3\mathrm{sen}^2 x}$

   (o) $y' + y = x^2y^2$ (Equação de Bernoulli : $y' + p(x)y = q(x)y^n$. Solução: multiplique a equação por y^{-n} e faça a substituição $u = y^{1-n} \Rightarrow y^{-n}y' = \frac{u'}{1-n}$)

2. Uma cultura de bactérias cresce a uma taxa proporcional à quantidade de bactérias presentes em cada instante. Ao fim de 10 minutos cresceu 3%.

   (a) Determine a constante de proporcionalidade.

   (b) (b) Quanto tempo levará a cultura para duplicar?

   R: (a) $k = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{103}{100}\right)$ (b) $t = \frac{\ln 2}{k}$

3. Certa substância radioativa decresce a uma taxa proporcional à quantidade presente. Observa-se que após 1 hora houve uma redução de 10% da quantidade inicial da substância, determine a meia-vida da substância.

   R: $6,6$ horas.

4. Devido a uma maldição rogada por uma tribo vizinha, os membros de uma aldeia são gradualmente impelidos ao assassinato ou ao suicídio. A taxa de variação da população é $-2\sqrt{p}$ pessoas por mês, quando o número de pessoas é p. Quando a maldição foi rogada, a população era de 1600. Quando morrerá toda a população da aldeia?

   R: 40 meses.

5. Um tanque com 50 galões de capacidade contém inicialmente 10 galões de água. Adiciona-se ao tanque uma solução de salmoura com 1 kg de sal por galão, à razão de 4 galões por minuto, enquanto a mistura escoa à razão de 2 galões por minuto. Determine:

   (a) O tempo necessário para que ocorra o transbordamento.

   (b) A quantidade de sal presente no tanque por ocasião do transbordamento.

   R: (a) 20 minutos (b) 48 kg

6. Um tanque com capacidade de 900 litros contém inicialmente 100 litros de água pura. Entra água com 4 gramas de sal por litro numa taxa de 8 litros por minuto e a mistura escoa numa taxa de 4 litros por minuto. Determine a quantidade de sal no tanque quando a solução está para transbordar.

7. Certa industria lança seus dejetos químicos em um rio que desagua num lago. Os dejetos causam irritação na pele quando sua concentração é superior ou igual a 20 partes por milhão (ppm). Pressionada pelos ecologistas do Green Peace, fazem 30 dias que a fábrica parou de lançar dejetos, cuja concentração no lago foi estimada em 120 ppm. Hoje, verificou-se que a concentração de dejetos no lago é de 60 ppm. Supondo-se que a taxa de variação da concentração de dejetos no lago é proporcional à concentração presente no lago em cada instante, quanto tempo ainda levará para se poder nadar sem o perigo de sofrer irritação na pele? R: 47,5 dias.

8. Um veículo de massa $m = 1$, partindo do repouso é impulsionado por uma força constante F. O meio oferece uma resistência ao deslocamento proporcional à velocidade, onde a constante de proporcionalidade é $k = 3$. Quanto valerá F de modo que a velocidade limite seja 10? Em que instante o veículo atinge a velocidade 5? R: $F = 30$, $t = \ln 2^{1/3}$

9. Um barco a vela em repouso de massa $m = 1$ põe-se em movimento impulsionado pela força do vento que é proporcional à diferença de velocidade do vento, $V\ km/h$, e do barco, $v\ km/h$, sendo $k = 2/3$ a constante de proporcionalidade.

   A resistência que a água oferece ao movimento é proporcional a velocidade do barco com constante de proporcionalidade $r = 1/3$.

   Qual deve ser a velocidade constante V do vento, para que o barco atinja a velocidade máxima limite de 50 km/h?

10. A força devida à resistência do ar que atua num veículo de massa m é kv, onde k é constante e v é a velocidade. Qual a força constante que o motor do veículo deve transmitir a ele para que a velocidade máxima seja v_1? Em que tempo veículo atinge a metade da velocidade máxima?

    R: $F = kv_1$ $t = \frac{m}{k} \ln 2$

11. Um veículo de massa $m = 1$, partindo do repouso é impulsionado por uma força constante F. O meio oferece uma resistência ao deslocamento proporcional à velocidade, onde a constante de proporcionalidade é $k = 3$. Quanto valerá F de modo que a velocidade limite seja 10? Em que instante o veículo atinge a velocidade 5?

    R: $F = 30$; $t = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{F}{F-15}\right)$.

12. Uma bala de massa $m = 0,01$ kg introduz-se em uma tábua de $0,10$ m de espessura, com velocidade de 200 m/s. Ela sofre uma resistência da tábua ao seu movimento proporcional ao quadrado de sua velocidade, com constante de proporcionalidade k. Determine k e o tempo

que a bala leva para perfurar a tábua, sabendo-se que sai com velocidade de 80 m/s. Despreze a força da gravidade.

R: $k = \frac{\ln(5/2)}{10}$, $t = \frac{3}{4.10^4 k}$

13. Um navio de massa m se move em direção ao cais com velocidade de $12km/h$. Seu motor é desligado a uma distância de $3km$ do cais. Considerando que a resistência da água é proporcional à velocidade com constante de proporcionalidade $k = 6m$:

    (a) (a) Determine a velocidade do navio 1 hora após o motor ser desligado.

    (b) (b) O navio atingirá o cais? Justifique.

14. Um barco a vela em repouso de massa $m = 1$, é posto em movimento impulsionado pela força do vento que é proporcional à diferença de velocidade do vento $V\ km/h$ e do barco, $v\ km/h$, sendo $k = \frac{2}{3}$ a constante de propocionalidade.

    A resistência que a água oferece ao movimento é proporcional à velocidade do barco com constante de proporcionalidade $r = \frac{1}{3}$

    Qual deve ser a velocidade constante V do vento, para que o barco atinja a velocidade máxima limite de 50 km/h?

    Resp: $v(t) = \frac{2}{3}V(1 - e^{-t})$. $vel_{limit} = 75\, km/h$

15. Em uma comunidade de 100 pessoas, inicialmente, existe 1 pessoa infectada com um vírus. A velocidade de propagação do vírus é proporcional a k vezes o número de pessoas infectadas vezes o número de pessoas não infectadas. Após 1 dia, $\frac{1}{4}$ da comunidade está contamindada.

    (a) Após 2 dias, quantas pessoas estarão contaminadas?

    (b) Se $p(t)$ é o número de pessoas contaminadas no instante t, determine $\lim_{t\to\infty} p(t)$.

    (c) Desenhe o gráfico de $p(t)$.