

# Modeling the spatio-temporal spread of COVID-19 via a reaction-diffusion system

Malú Grave

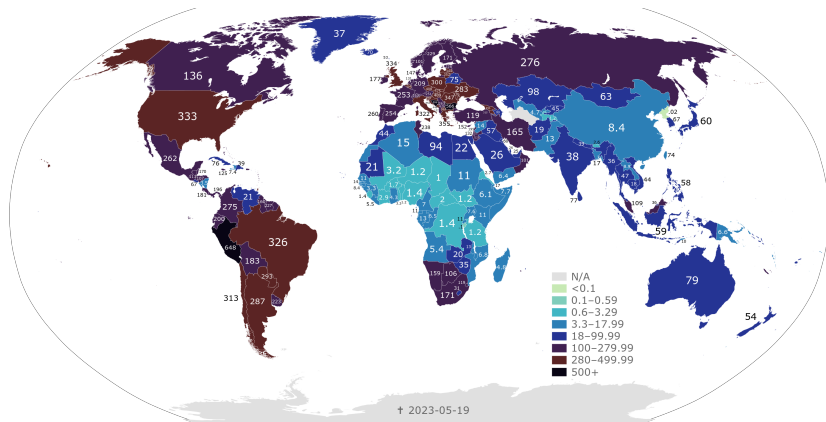
Universidade Federal Fluminense

13 de setembro de 2023

## Malú Grave

- Professora do Departamento de Engenharia Civil da UFF;
- Formada em Engenharia Civil pela UFRGS;
- Mestrado em Engenharia Civil pela UFRGS (Estruturas);
- Doutorado em Engenharia Civil pela COPPE/UFRJ (Mecânica Computacional);
- Principal área de atuação: dinâmica dos fluidos computacional (CFD).

# A pandemia de COVID-19



Mortes confirmadas a cada 100.000 habitantes em 29/05/2023<sup>1</sup>

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/COVID-19\\_pandemic\\_by\\_country\\_and\\_territory](https://en.wikipedia.org/wiki/COVID-19_pandemic_by_country_and_territory)

Pesquisadores de todo o mundo investiram seus conhecimentos para tentar mitigar os danos causados pela pandemia e entender melhor como acontece o **espalhamento da doença**.

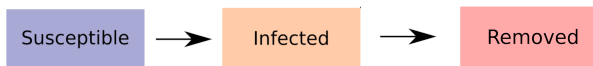
Sabendo como o espalhamento ocorre, podemos:

- Prever onde acontecerão os novos surtos;
- Realocar material e equipes de saúde para regiões de mais necessidade;
- Definir regiões onde estratégias de diminuição da mobilidade são necessárias;
- etc...



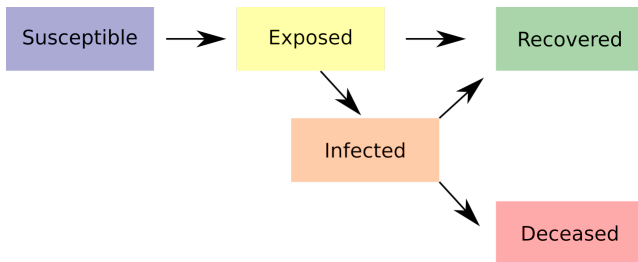
A transmissão de uma doença pode ser modelada como um *modelo compartimental*.

- Modelo SIR:



A transmissão de uma doença pode ser modelada como um *modelo compartimental*.

- Modelo SEIRD:

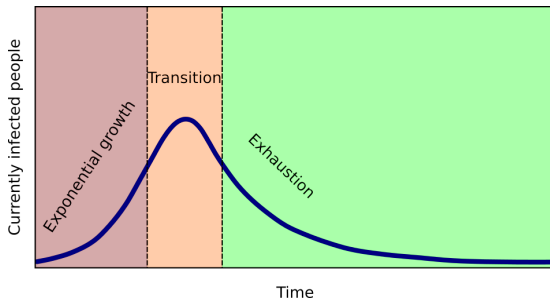


Os modelos compartimentais formam um conjunto de equações, onde as transferências entre grupos são dadas por parâmetros que caracterizam a dinâmica da doença:

- $\beta$ : taxa de transmissão;
- $\alpha$ : taxa de latência;
- $\gamma$ : taxa de recuperação;
- $\delta$ : taxa de letalidade.

Esses parâmetros são definidos através de **dados** sobre a doença.

## Dinâmica de uma onda epidêmica:



## O que pode acontecer na prática:

### Daily new confirmed COVID-19 cases per million people

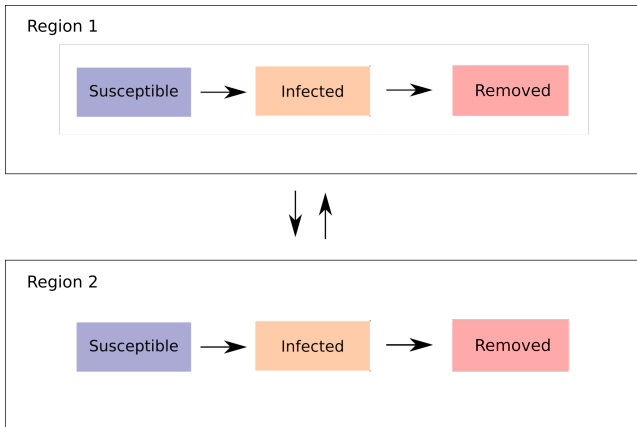
7-day rolling average. Due to limited testing, the number of confirmed cases is lower than the true number of infections.



Source: WHO COVID-19 Dashboard

CC BY

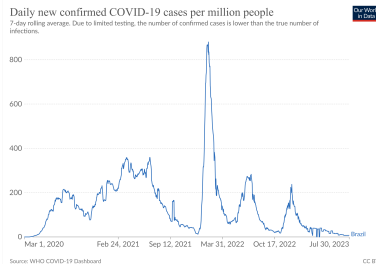
- Modelos de metapopulação



- Cálculo dos parâmetros que governam a dinâmica da doença

## Ajuste de curvas!

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$



Com os parâmetros ajustados, é possível extrapolar o período analisado e fazer **previsões**.

Os modelos também são utilizados para **análise de cenários**.

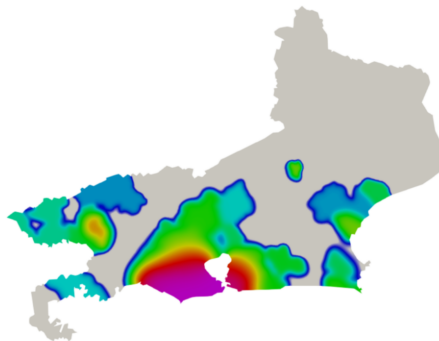
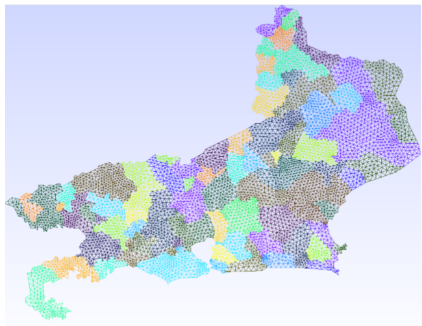


- Algumas dificuldades:

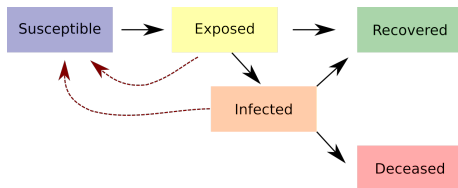
Como modelar uma doença nova (sem dados)?

Como definir um parâmetro que pode variar no tempo, como é o caso da taxa de transmissão?

Neste trabalho, nós estudamos um modelo compartimental do tipo SEIRD que inclui propagação espacial através de *termos de difusão* (EDPs)!



# Modelo de propagação espaço-temporal de COVID-19



- Parte das pessoas expostas nunca desenvolvem sintomas e se movem diretamente do compartimento *expostos* para o compartimento *recuperados* (casos assintomáticos);
- Tanto pacientes assintomáticos (expostos) como sintomáticos (infectados) são capazes de propagar a doença;
- Existe um período de latência entre a exposição e o desenvolvimento dos sintomas;
- O movimento espacial é proporcional ao tamanho da população; ou seja, mais movimento ocorre em regiões densamente povoadas;
- Nenhum movimento ocorre entre a população falecida;
- Consideramos a transmissão dependente da frequência, ou seja, a taxa de contato per capita entre indivíduos suscetíveis e infectados/expostos não depende da densidade populacional.

O sistema de equações resultante é:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\beta_i}{n} si + \frac{\beta_e}{n} se - \nabla \cdot (n\nu_s \nabla s) + S_s s = 0 \quad (1)$$

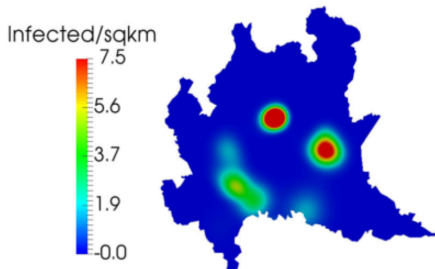
$$\frac{\partial e}{\partial t} - \frac{\beta_i}{n} si - \frac{\beta_e}{n} se + (\alpha + \gamma_e)e - \nabla \cdot (n\nu_e \nabla e) + S_e e = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} - \alpha e + (\gamma_i + \delta)i - \nabla \cdot (n\nu_i \nabla i) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} - \gamma_e e - \gamma_i i - \nabla \cdot (n\nu_r \nabla r) + S_r r = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial d}{\partial t} - \delta i = 0 \quad (5)$$

O modelo é baseado na formulação de Viguerie et al.<sup>1</sup>...



... e foram adicionadas algumas melhorias

- Refinamento de malha adaptativo (AMR/C)
- Fontes e sumidouros entre populações de diferentes cidades;
- Difusão anisotrópica.

---

<sup>1</sup>Alex Viguerie et al. "Diffusion–reaction compartmental models formulated in a continuum mechanics framework: application to COVID-19, mathematical analysis, and numerical study". In: *Computational Mechanics* (2020), pp. 1–22.

A representação vetorial compacta das equações governantes como um sistema de equações de reação-difusão transiente não-linear é:<sup>1</sup>,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{A} + \mathbf{B}(\mathbf{u})) \mathbf{u} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\nu} \nabla \mathbf{u}) - \mathbf{f} = 0 \text{ em } \Omega \times [0, T] \quad (6)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ in } \Gamma_D \times [0, T] \quad (7) \quad (\boldsymbol{\nu} \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ em } \Gamma_N \times [0, T] \quad (8)$$

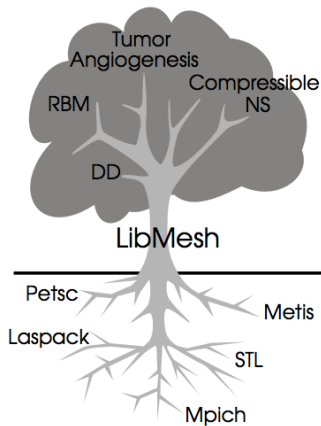
onde  $\mathbf{u} = [s, e, i, r, d]^T$  e as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\boldsymbol{\nu}$ , e o vetor  $\mathbf{f}$  dependem da forma particular da dinâmica do sistema.

O operador de difusão:

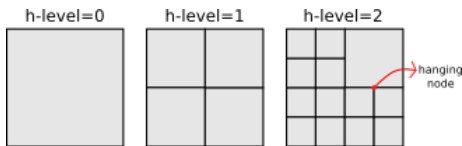
$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \nu_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9) \quad \boldsymbol{\nu}^k = \begin{bmatrix} \nu_{xx}^k & \nu_{xy}^k \\ \nu_{yx}^k & \nu_{yy}^k \end{bmatrix} \text{ com } k = s, e, i, r \quad (10)$$

<sup>1</sup>Malú Grave and Alvaro LGA Coutinho. "Adaptive Mesh Refinement and Coarsening for Diffusion-Reaction Epidemiological Models". In: *arXiv preprint arXiv:2010.11861* (2020).

- libMesh: uma ferramenta para análise por elementos finitos<sup>1</sup>.



AMR/C:



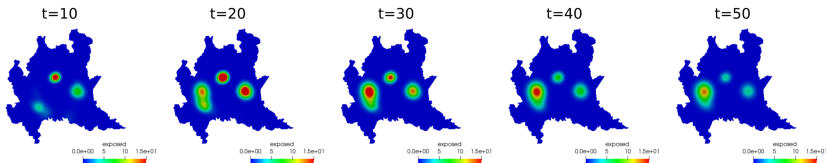
<sup>1</sup>B. S. Kirk et al. "libMesh: a C++ library for parallel adaptive mesh refinement/coarsening simulations". In: *Journal Engineering with Computers* 22.3 (2006), pp. 237–254.

- A discretização do domínio espacial é feita por elementos finitos lineares;
- A integração no tempo usa um método implícito de segunda ordem (BDF2);
- O método de Newton é usado para tratar a não linearidade do problema;
- Todos os sistemas lineares são resolvidos usando GMRES com um Pré-condicionador ILU(0).

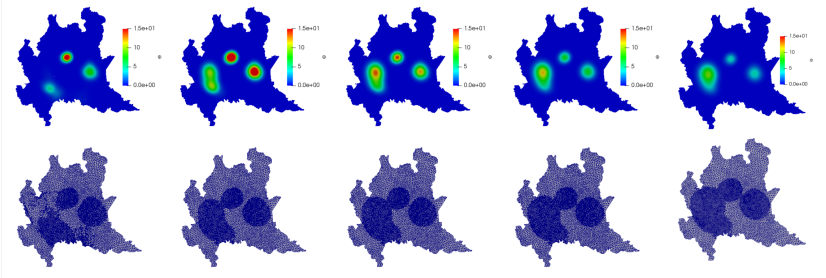


## Comparação dos resultados com Viguerie et al.<sup>1</sup>

Viguerie et al.

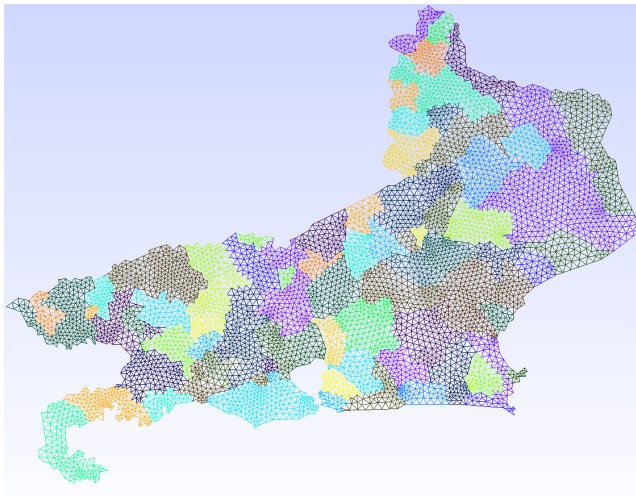


Present work with BE and AMR



<sup>1</sup>Viguerie et al., "Diffusion–reaction compartmental models formulated in a continuum mechanics framework: application to COVID-19, mathematical analysis, and numerical study".

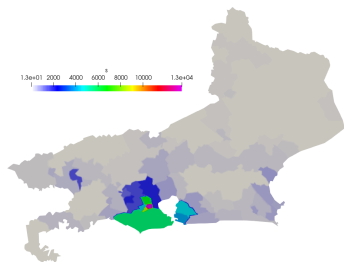
Domínio espacial:



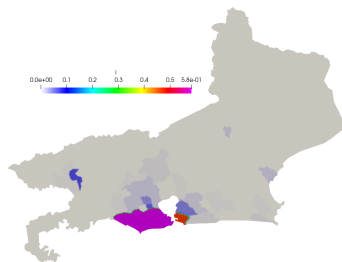
Mapa do estado do RJ dividido nas suas 92 cidades.

## Condições iniciais:

- **Primeiro dia da simulação:** 25 de março de 2020.
- **Suscetíveis:** baseado na estimativa da população de cada município, dada por <https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/rj.html>.
- **Infectados:** números de casos fornecidos para cada cidade em 1<sup>o</sup> de abril de 2020.
- **Expostos:** 10 vezes o número de infectados<sup>1</sup>.



Suscetíveis (*pessoas/km<sup>2</sup>*).



Infectados (*pessoas/km<sup>2</sup>*).

<sup>1</sup>Ruy Freitas Reis et al. "Characterization of the COVID-19 pandemic and the impact of uncertainties, mitigation strategies, and underreporting of cases in South Korea, Italy, and Brazil". In: *Chaos, Solitons & Fractals* (2020), p. 109888.

Definição de parâmetros:

- taxa de latência  $\alpha = 1/7 \text{ dias}^{-1}$ ;
- taxa de recuperação dos infectados  $\gamma_i = 1/24 \text{ dias}^{-1}$ ;
- taxa de recuperação dos expostos  $\gamma_e = 1/6 \text{ dias}^{-1}$ ;
- taxa de letalidade  $\delta = 1/160 \text{ dias}^{-1}$ .

Esses valores são baseados em dados disponíveis na literatura sobre a letalidade, período de incubação e tempo de recuperação para pacientes infectados e assintomáticos<sup>1</sup>.

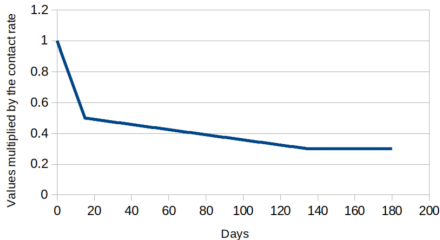
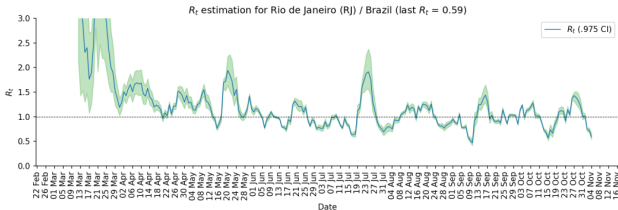
---

<sup>1</sup>Alex Viguier et al. "Simulating the spread of COVID-19 via spatially-resolved susceptible-exposed-infected-recovered-deceased (SEIRD) model with heterogeneous diffusion". In: *Applied Mathematics Letters* 111 (2021), p. 106617.

## Definição de parâmetros:

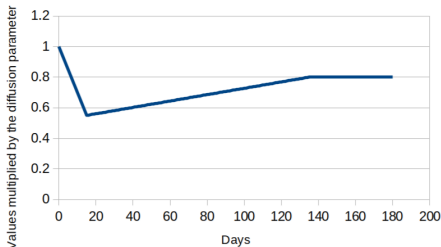
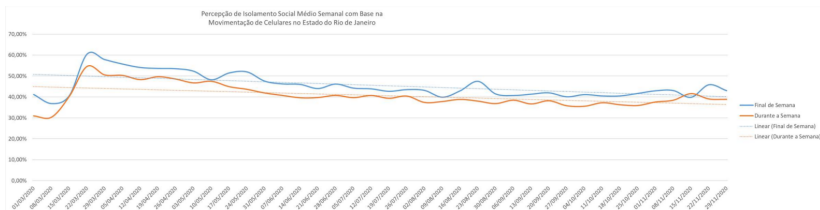
- taxa de transmissão dos infectados  $\beta_i = 0.215 * f(t) \text{ dia}^{-1}$ ;
- taxa de transmissão dos expostos  $\beta_e = 0.215 * f(t) \text{ dia}^{-1}$ ;

<https://perone.github.io/covid19analysis/>

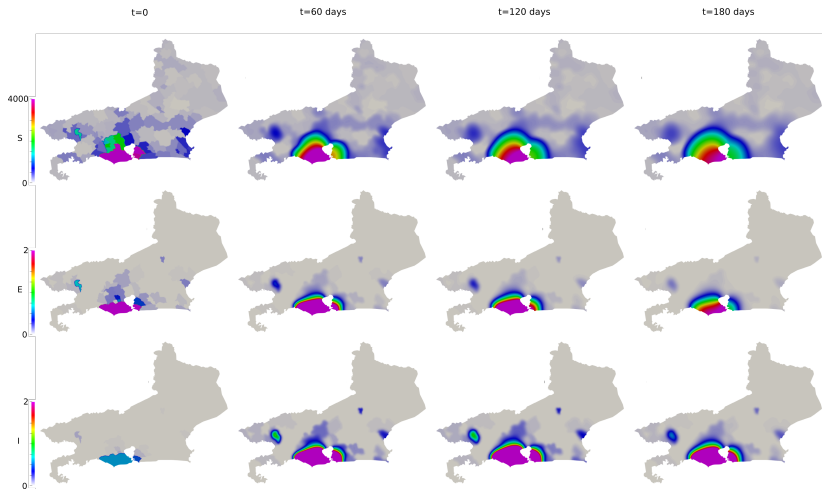


## Definição de parâmetros:

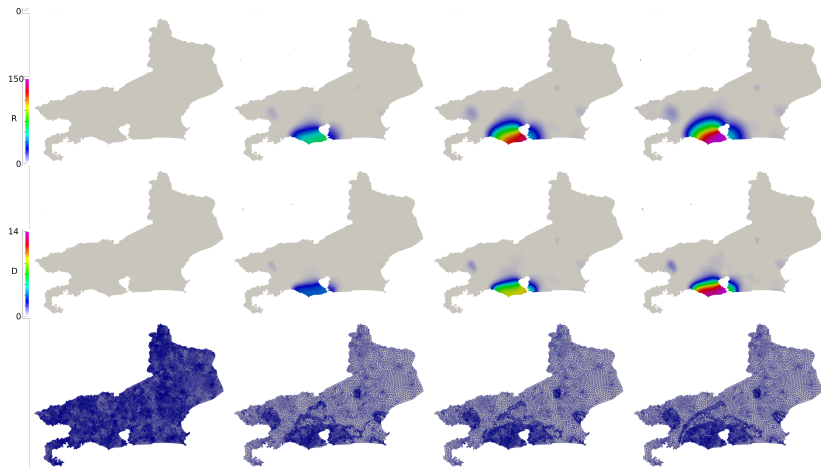
- Coeficiente de difusão  $\nu_s = \nu_e = \nu_r = 1 \times 10^{-3} * f(t) \text{ km}^2 \text{ pessoas}^{-1} \text{ dias}^{-1}$ ;
  - Coeficiente de difusão  $\nu_i = 1 \times 10^{-5} * f(t) \text{ km}^2 \text{ pessoas}^{-1} \text{ dias}^{-1}$ ;
- <https://coronavirus.ufrj.br/covidimetro/>



# Aplicação no Rio de Janeiro

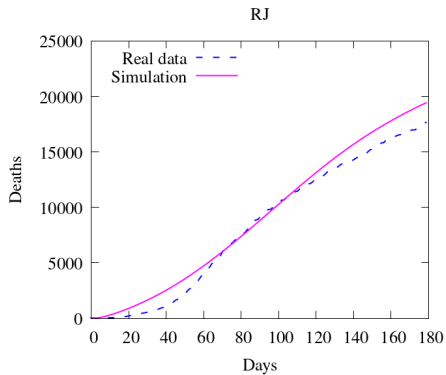


De cima para baixo: Suscetíveis / Expostos / Infectados

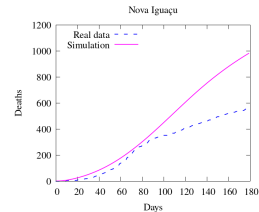
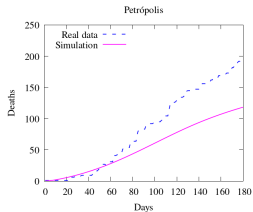
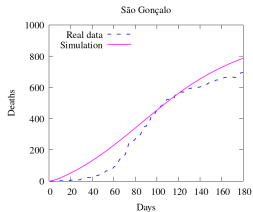
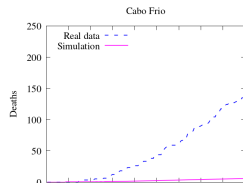
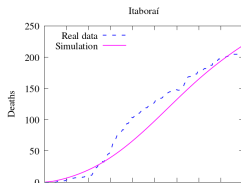
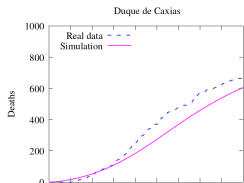
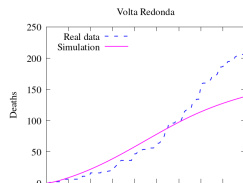
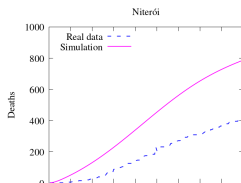
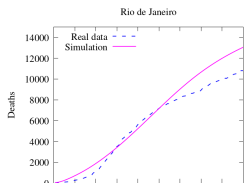


De cima para baixo: Recuperados / Mortos / Malha

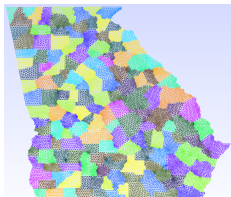




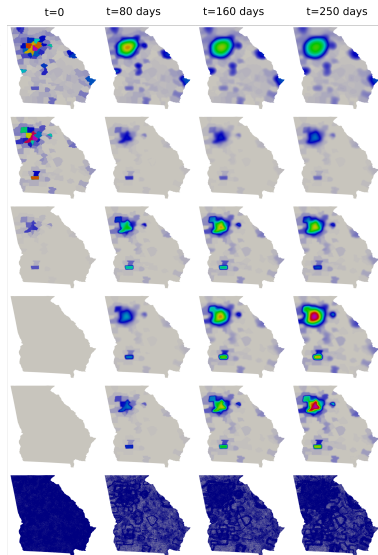
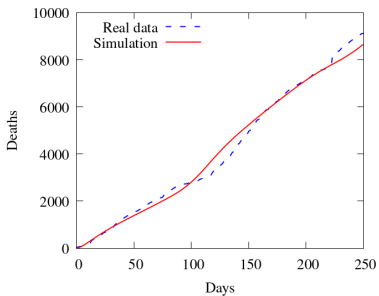
# Aplicação no Rio de Janeiro



# Aplicação na Georgia, U.S.



Georgia



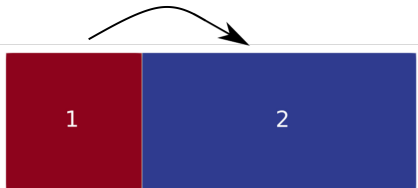
- As pessoas costumam viajar longas distâncias em curtos períodos de tempo, levando à transmissão não local da doença;
- Esse fenômeno não é considerado pelo modelo de difusão;
- Assim, incorporamos um operador de transferência de pessoas entre diferentes regiões para modelar isso<sup>1</sup>.

---

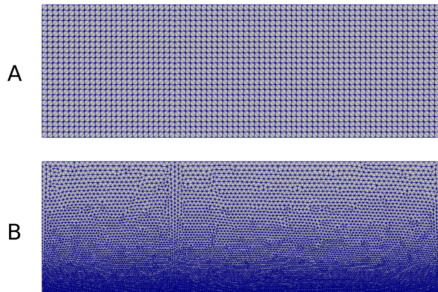
<sup>1</sup>Malú Grave et al. "Modeling nonlocal behavior in epidemics via a reaction–diffusion system incorporating population movement along a network". In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 401 (2022), p. 115541.

- Caso teste

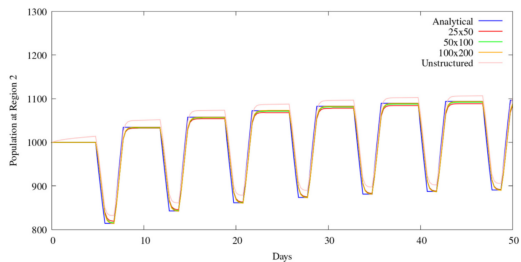
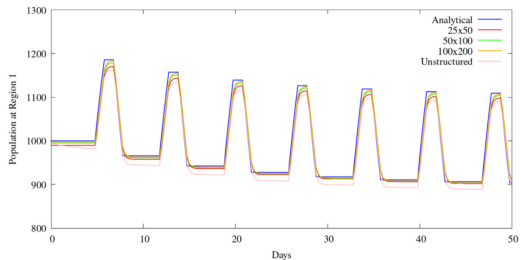
5% da população vai para a região 2 na sexta-feira



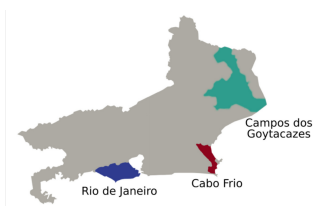
5% da população vai para a região 1 no domingo



- Caso teste



- Rio de Janeiro



Case 1



Case 2



Case 3



Case 4



Case 5



Case 6



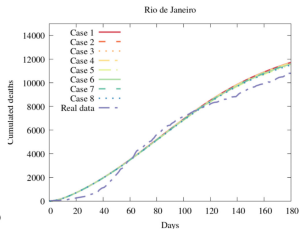
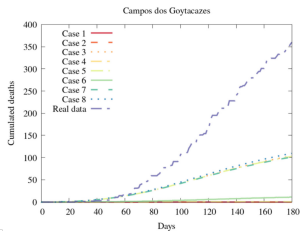
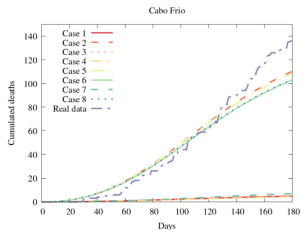
Case 7



Case 8

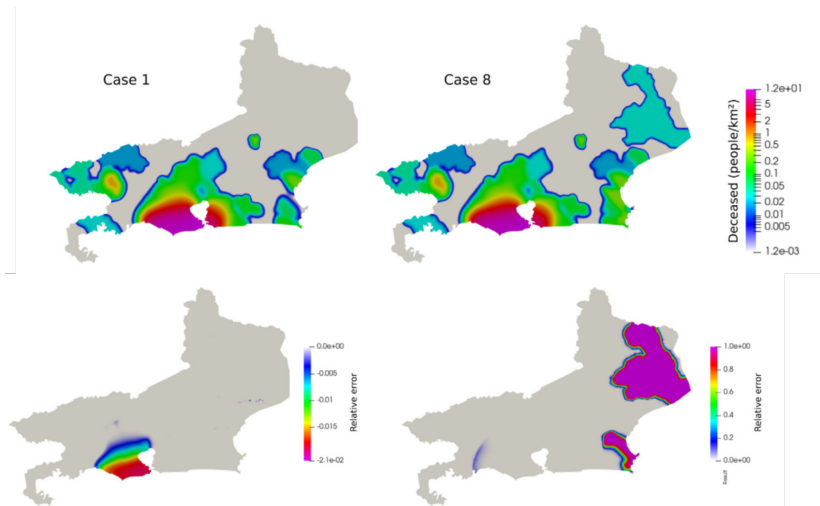


## ● Rio de Janeiro





- Rio de Janeiro



- Apesar das limitações do modelo, o modelo SEIRD desenvolvido pôde reproduzir a dinâmica da propagação espaço-temporal do COVID-19 muito bem, resolvendo várias escalas, por exemplo, no Rio de Janeiro,  $\approx 500m$ .

### **Trabalho futuro:**

- Definição de parâmetros locais;
- Criação de um modelo reação-difusão que considera difusão apenas nos compartimentos de expostos e infectados e que caracterize melhor a transmissão local.

## Alguma dúvida?



Este estudo foi parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código Financeiro 001 e Projeto CAPES TecnoDigital 223038.014313 / 2020-19. Esta pesquisa também recebeu financiamento do CNPq, FAPERJ e FIOCRUZ. Agradecemos ao Prof. Américo Cunha Jr., Prof. Rodrigo Burgos, Prof. Lisandro Lovisolo, pelas frutíferas discussões e inestimável auxílio na compreensão dos modelos epidemiológicos.