

O processo de contato com dois tipos de partículas e prioridade

Mariela Pentón Machado
Instituto de Matemática e Estatística, USP

COLMEA 20 de maio, 2021.

1 Introdução

2 Metaestabilidade

3 Convergência em volume infinito

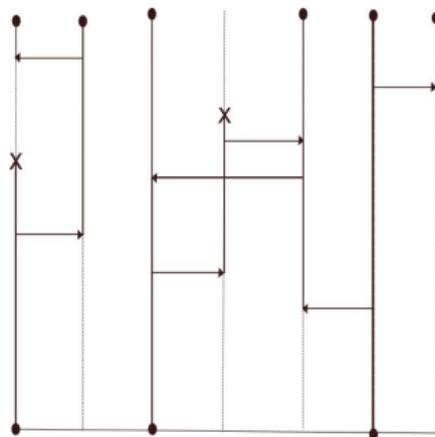
Introdução

Contact interactions on a lattice. Ted Harris. 1974.

Introdução

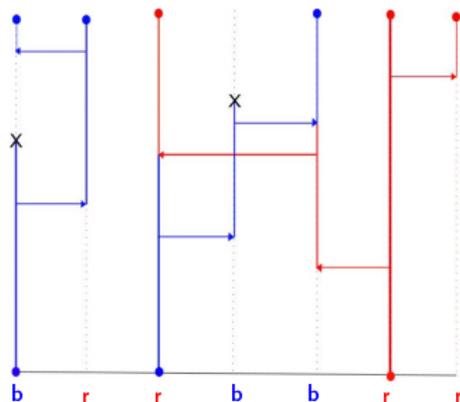
Contact interactions on a lattice. Ted Harris. 1974.

The G-B-T: Are there bushes in a forest? Richard Durrett, Glen Swindle. 1991.



Seja $A \subset \mathbb{Z}$, definimos o processo de contato no tempo t com configuração inicial A por

$$\xi_t^A = \{x : \text{existe } y \in A \text{ tal que } (y, 0) \rightarrow (x, t)\}.$$



Sejam A e B conjuntos disjuntos de \mathbb{Z} , denotamos por $\zeta_t^{A,B}$ o processo de contato com dois tipos de partículas e prioridade com configuração inicial $\mathbb{1}_A + 2\mathbb{1}_B$, onde as partículas de tipo 1 têm prioridade em $(-\infty, 0]$ e as partículas de tipo 2 em $[1, \infty)$.

Metaestabilidade

Um sistema é considerado em uma situação metastável quando se comporta como uma distribuição de falso equilíbrio por um tempo grande até que abruptamente alcança o verdadeiro equilíbrio.

[Exemplo \(00:00:16\)](#)

Metaestabilidade

Um sistema é considerado em uma situação metastável quando se comporta como uma distribuição de falso equilíbrio por um tempo grande até que abruptamente alcança o verdadeiro equilíbrio.

[Exemplo \(00:00:16\)](#)

O processo de contato clássico apresenta uma transição de fase: existe uma taxa crítica λ_c tal que para todo $\lambda \geq \lambda_c$ existe uma medida invariante não trivial μ diferente de δ_\emptyset .

Metaestabilidade

Um sistema é considerado em uma situação metastável quando se comporta como uma distribuição de falso equilíbrio por um tempo grande até que abruptamente alcança o verdadeiro equilíbrio.

Exemplo (00:00:16)

O processo de contato clássico apresenta uma transição de fase: existe uma taxa crítica λ_c tal que para todo $\lambda \geq \lambda_c$ existe uma medida invariante não trivial μ diferente de δ_\emptyset .

Quando restrito a um volume finito, o processo de contato é uma cadeia de Markov com espaço de estados finito e δ_\emptyset é o único estado de equilíbrio. Neste contexto a medida μ restrita ao volume finito se comporta como um estado metastável, quando o processo começa com condições especiais.

Em *Cassandro, Galves, Olivieri, Vares, 1984*, foi provado o comportamento metaestável do processo de contato unidimensional para λ suficientemente grande. Neste artigo o fenômeno foi estudado estabelecendo

(i)

$$\frac{T_N^1}{\mathbb{E}(T_N^1)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E \quad \text{em distribuição,} \quad (1)$$

onde E tem distribuição exponencial com taxa 1.

Em *Cassandro, Galves, Olivieri, Vares, 1984*, foi provado o comportamento metaestável do processo de contato unidimensional para λ suficientemente grande. Neste artigo o fenômeno foi estudado estabelecendo

(i)

$$\frac{T_N^1}{\mathbb{E}(T_N^1)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E \quad \text{em distribuição,} \quad (1)$$

onde E tem distribuição exponencial com taxa 1.

- (ii) Propriedade de termalização: é provado que, antes de alcançar o equilíbrio, as meias temporais de certas estatísticas medidas no processo se estabilizam próximo as meias de ditas estatísticas medidas com respeito ao estado metastável.

Em *Cassandro, Galves, Olivieri, Vares, 1984*, foi provado o comportamento metaestável do processo de contato unidimensional para λ suficientemente grande. Neste artigo o fenômeno foi estudado estabelecendo

(i)

$$\frac{T_N^1}{\mathbb{E}(T_N^1)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E \quad \text{em distribuição,} \quad (1)$$

onde E tem distribuição exponencial com taxa 1.

- (ii) Propriedade de termalização: é provado que, antes de alcançar o equilíbrio, as meias temporais de certas estatísticas medidas no processo se estabilizam próximo as meias de ditas estatísticas medidas com respeito ao estado metastável.

Em *Schonmman, 1985*, este resultado é estendido para todo λ super-crítico.

Em *Durrett, Schonmman, 1988*, foi dada uma prova diferente para (i) e também foi provado que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log T_N^1 = c_\infty \text{ em probabilidade,} \quad (2)$$

onde $c_\infty > 0$.

Em *Durrett, Schonmman, 1988*, foi dada uma prova diferente para (i) e também foi provado que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log T_N^1 = c_\infty \text{ em probabilidade,} \quad (2)$$

onde $c_\infty > 0$.

Os limites (1) e (2) foram estendidos para $d \geq 2$ em *Mountford, 1993* e *Mountford, 1999*, respetivamente.

Em *Durrett, Schonmman, 1988*, foi dada uma prova diferente para (i) e também foi provado que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log T_N^1 = c_\infty \text{ em probabilidade,} \quad (2)$$

onde $c_\infty > 0$.

Os limites (1) e (2) foram estendidos para $d \geq 2$ em *Mountford, 1993* e *Mountford, 1999*, respetivamente.

A propriedade de termalização para $d \geq 2$ foi provada em *Simonis, 1996*.

Nossos resultados se referem ao processo de contato com dois tipos de partículas e prioridades em dimensão $d = 1$ e com alcance finito $R \geq 1$.

Nossos resultados se referem ao processo de contato com dois tipos de partículas e prioridades em dimensão $d = 1$ e com alcance finito $R \geq 1$.

Theorem 1 (Pentón, 2019)

Seja β_N tal que $\mathbb{P}(\tau_N^{1,2} \geq \beta_N) = e^{-1}$, então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tau_N^{1,2}}{\beta_N} = E \text{ em distribuição,}$$

onde E tem distribuição exponencial com taxa 1.

$\tau_N^{1,2}$ é o tempo de extinção de um dos dois tipos de partículas para o processo restrito a $[-N, N]$ e com configuração inicial $\mathbb{1}_{[-N,0]} + 2\mathbb{1}_{[1,N]}$

Teorema 2 (Pentón, 2019)

Existe uma constante $c_\infty > 0$ que depende somente da taxa λ e do alcance R tal que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \tau_N^{1,2} = c_\infty \text{ em probabilidade.}$$

Convergência em volume infinito

Theorem 3 (Pentón, 2020)

Existe uma medida ν invariante para o processo de contato com dois tipos de partículas que satisfaz

$$\zeta_t^{1,2} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \nu \text{ em distribuição.}$$

Comentários sobre o Teorema 3

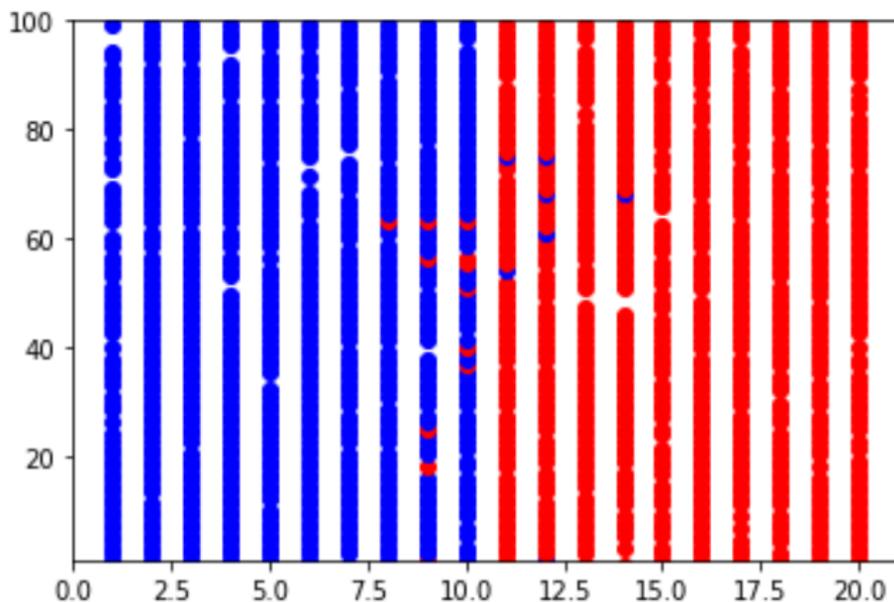


Figura: $\lambda = 3$, $t = 100$, $N = 10$, $R = 2$.

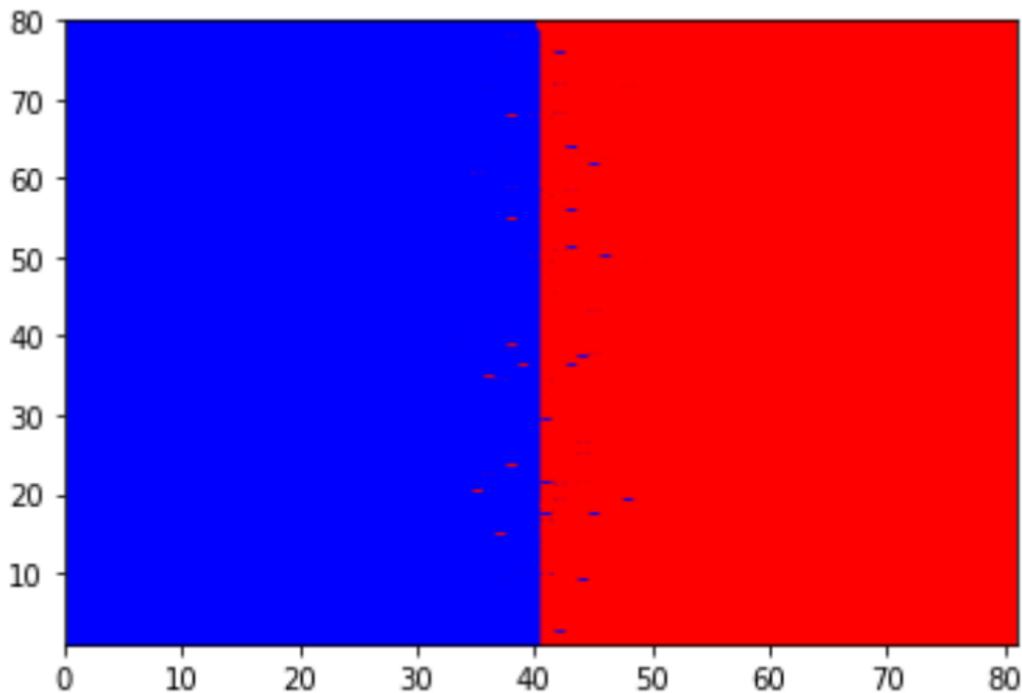


Figura: $\lambda = 4$, $t = 80$, $N = 40$, $R = 8$.

Theorem 4 (Pentón, 2020)

Se A e B são conjuntos disjuntos de \mathbb{Z} , o processo $\zeta_t^{A,B}$ converge em distribuição à uma combinação convexa das medidas δ_\emptyset , μ_1 , μ_2 e ν .

Referências

Andjel E.; Mountford T.; Pimentel L.; Valesin D. *Tightness for the Interface of One-Dimensional Contact Process*, Bernoulli 16 (2010).

Andjel, E.; Mountford, T.; Valesin D. *Equilibrium of the interface of the grass-bushes-trees process* Bernoulli 24 (2018).

Durrett, R.; Swindle, G. *The G-B-T: are there bushes in a forest?*. Stochastic Process. Appl. 37, (1991).

Harris, T. E. *Contact interactions on a lattice*, Ann. Probability 2 (1974).

Mountford, T.; Sweet, T. *An Extension of Kuczek's Argument to Nonnearest Neighbor Contact Processes*, J. Theoret. Probab. 13 (2000).

Pentón Machado, M. *Metastability for the contact process with two types of particles and priorities*, Stochastic Processes and their Applications (2019).

Pentón Machado, M. *Convergence of the one-dimensional contact process with two types of particles and priority*, Preprint (2020).